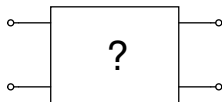


Teoria dei Circuiti – Esercitazione di Laboratorio

Due-porte e circuiti equivalenti di Thevenin e Norton

Esercizio 1



Si determini tramite misure la descrizione del due porte tramite matrice resistenza \underline{R} o tramite matrice conduttanza \underline{G} .

Soluzione (calcolo matrice \underline{R})

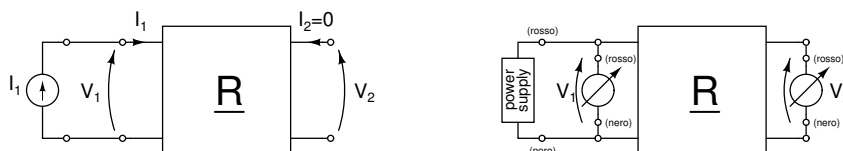
Le due equazioni costitutive di un due porte descritto tramite matrice \underline{R} sono

$$V_1 = R_{11} I_1 + R_{12} I_2$$

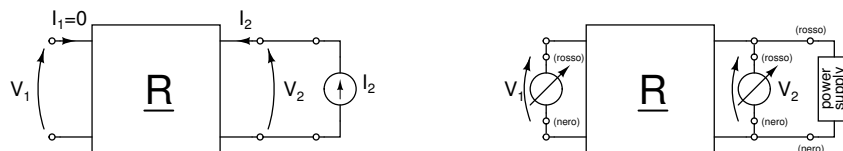
$$V_2 = R_{21} I_1 + R_{22} I_2$$

Usando l'alimentatore del laboratorio come generatore di corrente costante per imporre una delle due correnti di ingresso (I_1 o I_2), e lasciando l'altra porta aperta in corto circuito (quindi rispettivamente $I_2 = 0$ o $I_1 = 0$), si possono misurare direttamente i quattro termini della matrice.

$$R_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}, \quad R_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}, \quad R_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}, \quad R_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$



Cominciando, ad esempio, lasciando la porta 2 come circuito aperto (quindi $I_2 = 0$), si imposti sull'alimentatore una corrente di 100 mA, con una tensione massima di 4–5 V e si colleghi il due porte all'alimentatore come indicato in figura, rispettando le polarità indicate (che sono standard per ogni alimentatore). Quindi si misurino tramite il multimetro le due tensioni V_1 e V_2 per ricavare, rispettivamente, R_{11} e R_{21}



Completata la misura, mettere la porta 1 come circuito aperto, e collegare l'alimentatore alla porta 2. Impostare sempre una corrente di 100 mA. Dalla misura di V_1 e V_2 sarà possibile ricavare, rispettivamente, R_{21} e R_{22} .

Soluzione (calcolo matrice \underline{G})

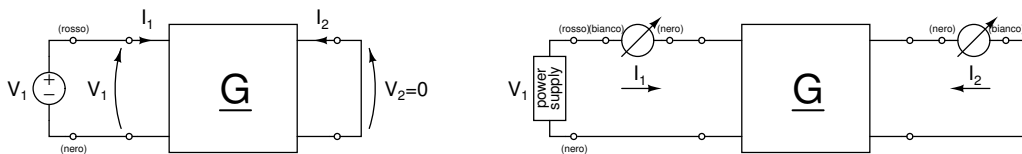
Per un due porte descritto tramite matrice \underline{G} si ha

$$I_1 = G_{11} V_1 + G_{12} V_2$$

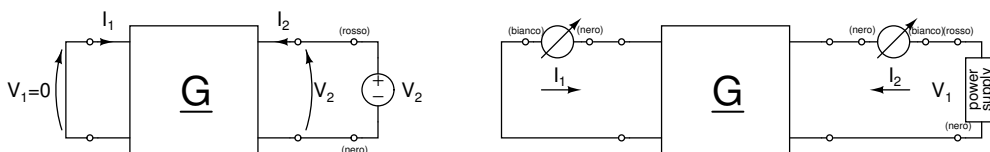
$$I_2 = G_{21} V_1 + G_{22} V_2$$

Per questa misura è necessario utilizzare l'alimentatore come generatore di tensione costante, per imporre la tensione ad una porta mentre si annulla la tensione all'altra porta tramite un corto circuito. I quattro termini di \underline{G} sono dati da

$$G_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0}, \quad G_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0}, \quad G_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0}, \quad G_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$



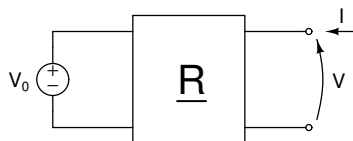
Si imposti sull'alimentatore una tensione di 1 V (e corrente massima di 100–200 mA) e lo si colleghi (rispettando le polarità standard) alla porta 1 del due porte. Si chiuda la porta 2 in corto circuito. Misurando I_1 e I_2 con il multimetro (si ricorda che per una misura di corrente è necessario collegare il multimetro *in serie* al terminale di cui si vuole misurare la corrente) si ottengono rispettivamente G_{11} e G_{21} .



Sempre programmato per generare una tensione di 1 V, si colleghi l'alimentatore alla porta 2 del due porte e si chiuda la porta 1 in corto circuito. Dalla misura di I_1 e I_2 si ottengono rispettivamente G_{12} e G_{22} .

ATTENZIONE: non impostare valori di corrente e di tensione superiori a quelli consigliati durante la misura, altrimenti la potenza dissipata dal due porte potrebbe diventare eccessiva, fino a bruciarlo.

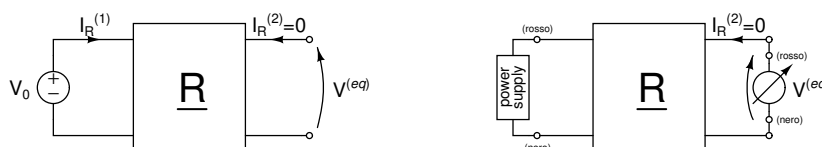
Esercizio 2



Si consideri il circuito in figura, composto dal due porte dell'esercizio precedente (supponendo di conoscerne la descrizione tramite matrice resistenze \underline{R}) ed un generatore ideale di tensione $V_0 = 3\text{ V}$.

Si determini tramite misurazioni il circuito equivalente di Thevenin, oppure in alternativa il circuito equivalente di Norton, del circuito in figura.

Soluzione (calcolo circuito equivalente di Thevenin)



Per ottenere la $V^{(eq)}$ è necessario misurare la tensione di circuito aperto, ovvero lasciare la porta del circuito aperta (circuito aperto, $I = 0$) e misurare la tensione ai suoi capi.

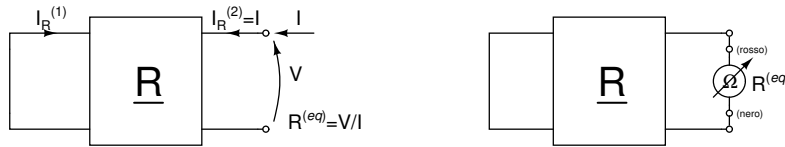
Dalle equazioni del due porte, considerando $I_R^{(2)} = 0$, si ha

$$V_R^{(1)} = V_0 = R_{11}I_R^{(1)}$$

$$V_R^{(2)} = V^{(eq)} = R_{21}I_R^{(1)}$$

da cui $V^{(eq)} = \frac{R_{21}}{R_{11}}V_0$.

Per la misura diretta di $V^{(eq)}$, impostare l'alimentatore come generatore di tensione, con $V_0 = 3\text{ V}$ (corrente massima: qualche centinaio di mA), collegarlo alla porta 1 di \underline{R} e misurare la tensione alla porta 2.



Per calcolare la $R^{(eq)}$ è necessario spegnere i generatori indipendenti (in questo caso V_0 , da sostituire con un corto circuito) e calcolare la relazione V/I in uscita.

Dalle equazioni del due porte

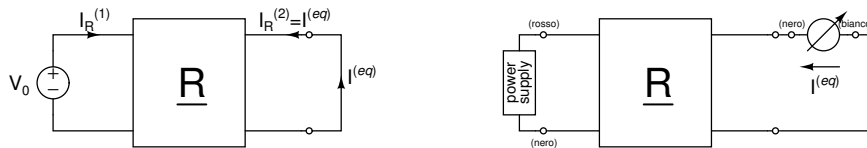
$$V_R^{(1)} = 0 = R_{11}I_R^{(1)} + R_{12}I_R^{(2)} = R_{11}I_R^{(1)} + R_{12}I$$

$$V_R^{(2)} = V = R_{21}I_R^{(1)} + R_{22}I_R^{(2)} = R_{21}I_R^{(1)} + R_{22}I$$

da cui $R^{(eq)} = \frac{V}{I} = R_{22} - \frac{R_{12}R_{21}}{R_{11}}$.

È possibile misurare direttamente $R^{(eq)}$ tramite il multimetro, in modalità "Ohm". Collegando il multimetro alla porta 2, questo genera automaticamente una corrente costante nel circuito sotto misura, e misura la differenza di potenziale generata. Il valore di resistenza visualizzato è calcolato come rapporto tra le due grandezze.

Soluzione (calcolo circuito equivalente di Norton)



La corrente di cortocircuito $I^{(eq)}$, date le equazioni del due porte

$$V_R^{(1)} = V_0 = R_{11}I_R^{(1)} + R_{12}I_R^{(2)} = R_{11}I_R^{(1)} + R_{12}I^{(eq)}$$

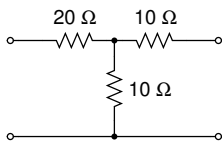
$$V_R^{(2)} = 0 = R_{21}I_R^{(1)} + R_{22}I_R^{(2)} = R_{21}I_R^{(1)} + R_{22}I^{(eq)}$$

è data da $I^{(eq)} = -\frac{R_{21}}{R_{11}} \frac{V_0}{R_{22} - \frac{R_{12}R_{21}}{R_{11}}}$.

Per il calcolo e la misura di $G^{(eq)}$, vale esattamente quanto sopra (equivalente di Thevenin), con $G^{(eq)} = 1/R^{(eq)}$.

Nota

I due porte distribuiti appartengono ad uno dei seguenti tre tipi.



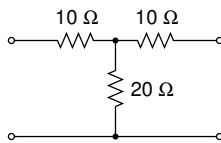
$$\underline{R} = \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \Omega$$

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} 40 & -20 \\ -20 & 60 \end{pmatrix} \text{m}\Omega^{-1}$$

$$V^{eq} = 1 \text{ V}$$

$$R^{eq} = 16,67 \Omega$$

$$I^{eq} = -60 \text{ mA}$$



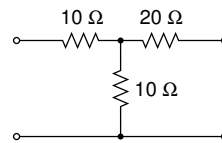
$$\underline{R} = \begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 20 & 30 \end{pmatrix} \Omega$$

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} 60 & -40 \\ -40 & 60 \end{pmatrix} \text{m}\Omega^{-1}$$

$$V^{eq} = 1 \text{ V}$$

$$R^{eq} = 16,67 \Omega$$

$$I^{eq} = -60 \text{ mA}$$



$$\underline{R} = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \Omega$$

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} 60 & -20 \\ -20 & 40 \end{pmatrix} \text{m}\Omega^{-1}$$

$$V^{eq} = 1,5 \text{ V}$$

$$R^{eq} = 25 \Omega$$

$$I^{eq} = -60 \text{ mA}$$