Soluzione dell'Esame di Teoria dei Circuiti - 7 gennaio 2008

1-a)

Dal circuito risulta evidente che $V_1 = V_1' + R_1 i_1 + R_2(i_1 + i_2 - gR_1 i_1)$, dove $V_1' = R_{11}' i_1 + R_{12}'(i_2 - gR_1 i_1)$ e' la tensione alla porta 1 del due porte $\underline{R}'$, per cui

$$V_1 = [R_{11}' + R_1 + R_2 - gR_1(R_2 + R_{12})]\, i_1 + [R_{12}' + R_2]\, i_2$$

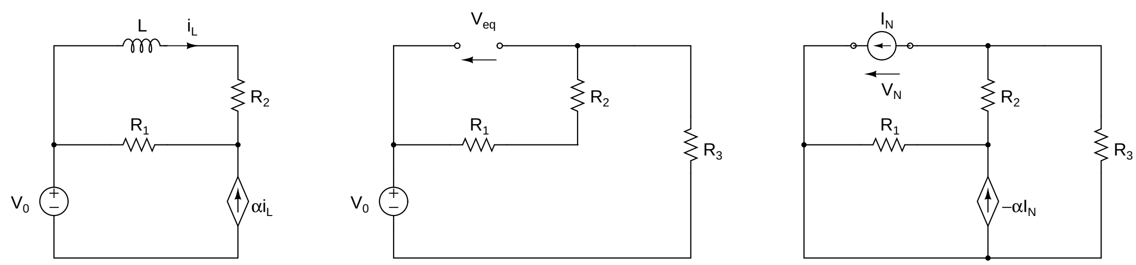
Alla porta 2 invece si può scrivere $V_2 = V_2' + (r + R_2) i_2$, dove $V_2' = R_{21}' i_1 + R_{22}'(i_2 - gR_1 i_1)$ per cui si ottiene

$$V_2 = [R_{21}' - gR_1 R_{22}' + (r + R_2)(1 - gR_1)]\, i_1 + [R_{22}' + r + R_2]\, i_2$$

da cui
$$\underline{R} = \begin{bmatrix} R_{11}' + R_1 + R_2 - gR_1(R_2 + R_{12}) & R_{12}' + R_2 \\ R_{21}' - gR_1 R_{22}' + (r + R_2)(1 - gR_1) & R_{22}' + r + R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 15 \end{bmatrix} \mathrm{k}\Omega.$$

Collegando il generatore reale $\{V_0, R_0\}$ alla porta 1, si ha $V_1 = V_0 - R_0 i_1 = R_{11} i_1 + R_{12} i_2$ e $V_2 = R_{21} i_1 + R_{22} i_2$; risolvendo il sistema ricavando V_2 in funzione di i_2 si ottiene $V_2 = \frac{R_{21} V_0}{R_{11} + R_0} + \left(R_{22} - \frac{R_{12} R_{21}}{R_{11} + R_0}\right) i_2 = V_{eq} + R_{eq} i_2$Ne segue immediatamente $V_{eq} = \frac{R_{21} V_0}{R_{11} + R_0} = 15\mathrm{V}$ e $R_{eq} = R_{22} - \frac{R_{12} R_{21}}{R_{11} + R_0} = 6\mathrm{k}\Omega$.

1-b)



Per $t \leq 0$sec il circuito è a regime e l'induttore si comporta come un cortocircuito; la situazione è mostrata in figura (a). Applicando la ripartizone di corrente, si puo' scrivere $i_L = -(\alpha i_L) \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ da cui segue immediatamente $i_L = 0$ per cui $i_L(t) = 0, \forall t \in (-\infty, 0)$.

Per $t > 0$ conviene calcolare l'equivalente di Thevenin ai capi dell'induttore. La tensione equivalente si ricava dal circuito di figura (b). Si ricava banalmente $V_{eq} = V_0 \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 5\mathrm{V}$.

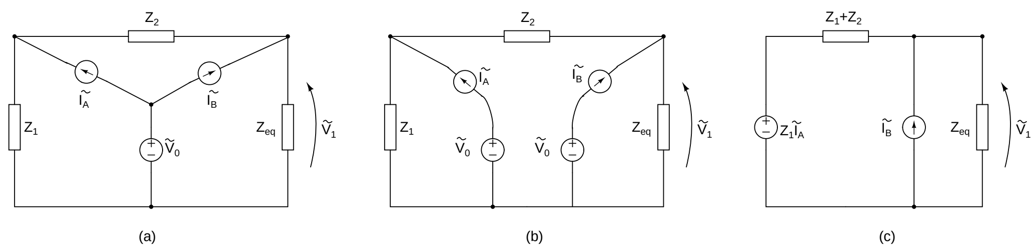
La resistenza equivalente si ricava dal circuito (c) dove $I_N - \frac{V_N}{R_3} - \frac{V_N + V_x}{R_2} = 0$ e $\alpha I_N + \frac{V_x}{R_1} + \frac{V_x + V_N}{R_2} = 0$. Risolvendo il sistema si ottiene $V_N = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3}(R_1(1 + \alpha) + R_2) I_N$ da cui $R_{eq} = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3}(R_1(1 + \alpha) + R_2) = 2.5\mathrm{k}\Omega$.

Si può scrivere quindi $i_L(t) = i_\infty - (i_\infty - i_L(0^+)) e^{-t/\tau}$ dove $i_\infty = \frac{V_{eq}}{R_{eq}} = 2\mathrm{mA}$, $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$ e $\tau = L/R_{eq} = 2\mu\mathrm{sec}$. Sostituendo si ricava $i_L(t) = 2[1 - e^{-500000t}]\mathrm{mA}$.

1-c)

Passando al dominio dei fasori si ha ($\omega = 1$rad/sec): $Z_1 = Z_{R1} + Z_{C1} = (1-j)\Omega$, $Z_2 = R_2 + j\omega L_2 = (1+j)\Omega$, $Z_3 = R_3 - j1/\omega C_3 = 4(1-j)\Omega$, $\widetilde{I}_A = 2(1+j)$A, $\widetilde{I}_B = (1-j)$A, $\widetilde{V}_0 = 2(1-j)$V.

Conviene calcolare l'equivalente di Thevenin a valle della porta 1 del trasformatore. Brevemente, poichè al secondario del trasformatore è presente una sola impedenza, l'equivalente di Thevenin sarà una impedenza ($\widetilde{V}_{eq} = 0$). Essendo $\widetilde{V}_1 = \widetilde{V}_2/n = -\widetilde{I}_2 Z_3/n = -(-\widetilde{I}_1/n)Z_3/n = \frac{Z_3}{n^2}\widetilde{I}_1$, si ottiene immediatamente $Z_{eq} = \frac{Z_3}{n^2} = (1-j)\Omega$.



Applicando il pricipio di rilocazione delle sorgenti impressive al generatore di tensione $\widetilde{V}_0$, si ottiene la situazione di figura (b). La serie generatore di corrente - generatore di tensione è equivalente al solo generatore di corrente. Il generatore di tensione $\widetilde{V}_0$ risulta quindi ininfulente. A questo punto si puo' trasformare il generatore reale di corrente $(\widetilde{I}_A, Z_1)$ in un generatore reale di tensione, ottenendo la situazione circuitale mostrata nella figura (c). L'applicazione diretta del teorema di Millmann consente di calcolare $\widetilde{V}_1 = \frac{Z_1\widetilde{I}_A/(Z_1+Z_2+\widetilde{I}_B}{1/(Z_1+Z_2)+1/Z_{eq}}$ da cui si ricava $\widetilde{V}_1 = 2(1-j)$V.

Tornando nel dominio dei tempi si può quindi scrivere $v_1(t) = 2\sqrt{2}\cos(t-\pi/4)$V.

2-a) Essendo gli operazionali ideali, e operanti sempre nella zona ad alto guadagno, numerandoli coerentemente con le denominazioni delle tensioni di uscita, vale $V_-^{(i)} = V_+^{(i)}$ e $i_-^{(i)} = i_+^{(i)} = 0$A con $i = 1, 2$.

Indicando con V_x la tensione al nodo cui sono collegati R_2, R_3, I_1, si può scrivere $V_x = V_-^{(1)} - R_2 i_{R1} = -\frac{R_2}{R_1}V_0 = -5$V. Essendo $i_{R3} = i_+^{(2)} = 0$ si ha $V_{o1} = V_x - R_4 i_{R4} = V_x - R_4(i_{R2} - I_1) = -7$V.

Essendo $V_-^{(2)} = V_+^{(2)} = V_x$, si ha $i_{R6} = -I_2 + i_{R5}$ dove $i_{R5} = V_x/R_5$.
Infine quindi $V_{o2} = V_x - R_6 i_{R6} = 5$V.