DIMOSTRAZIONE DEI SEGUENTI TEOREMI (INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE) 2015-2016

Le seguenti dimostrazioni sono fondamentali ma non rappresentano la totalita' di quelle svolte a lezione.

- (Teorema di caratterizzazione del sottospazio generato)
  Sia V uno s.v. su R e sia $S=\{v_1,v_2,...,v_n\}\subseteq V (n\geq 1).$ Allora:
  a) $[S]$ é un sottospazio di V;
  b) $[S]\supseteq S$;
  c) se W é un sottospazio di V e $W\supseteq S$ allora $W\supseteq [S]$.
- (Teorema di caratterizzazione dei sottoinsiemi linearmente dipendenti)
  Sia V uno s.v. su R e sia $S=\{v_1,v_2,...,v_n\}\subseteq V (n\geq 1).$ Allora:
  a) $S=\{v_1\}$ é linearmente dipendente $\Leftrightarrow v_1=0$;
  b) Se $n>1, S$ é linearmente dipendente $\Leftrightarrow$ esiste un elemento di S che è combinazione lineare degli altri elementi di S.
- (Teorema che porta al concetto di coordinate di un vettore rispetto ad una base)
  Se $\beta=(v_1,v_2,...,v_n)$ é una base dello s.v. V, allora ogni elemento $v\in V$ si può rappresentare in un unico modo come combinazione lineare degli elementi di β. (Segue definizione di $M_\beta(v)$).
- Se $A\in M_n(R)$ é invertibile, allora $|A|\neq 0$ e $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$.
- Teorema di Cramer. Se il sistema lineare $AX=B$ ha n equazioni in n incognite e $|A|\neq 0$, allora $AX=B$ ha una ed una sola soluzione (non vale il viceversa). Calcolo della soluzione col "metodo della matrice inversa".
- Teorema di Rouché-Capelli. Il sistema lineare $AX=B$ ha soluzione $\Leftrightarrow r(A)=r(A:B)$.
- Se V é uno s.e.r. allora presi $v,v_1,....,v_m\in V, a_1,....,a_m\in R$,
  a) $<0,v>=0$;
  b) $<v,a_1v_1+...+a_mv_m>=a_1<v,v_1>+...+a_m<v,v_m>$.
- Se V é uno s.e.r. allora
  a) $\|\alpha v\|=|\alpha|\ \|v\|$,
  b) Se $v\neq 0$, allora $\dfrac{v}{\|v\|}$ é un versore,
  c) $v-cw\perp w (w\neq 0, v,w\in V, c$ coefficiente di Fourier di v rispetto a w).
- Se $\beta=(v_1,...,v_n)$ é una base ortonormale di V e $v\in V$ allora $M_\beta(v)=\begin{pmatrix}<v,v_1>\\<v,v_2>\\...\\<v,v_n>\end{pmatrix}$.
- Costruzione di una base ortogonale . Procedimento di Gram-Schmidt e dimostrazione che $v_1'\perp v_2'$. Passaggio da una base ortogonale ad una ortonormale.

- Proprieta' caratteristica delle matrici ortogonali ($AA_{-1} = I$).
- Se $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$ é una matrice ortogonale, allora
  a) le righe (colonne) di A formano una base ortonormale di R^n e viceversa (per n=2),
  b) $|A| = \pm 1$ (non vale il viceversa),
  c) $A_{ij} = \pm a_{ij}$ (non vale il viceversa).
- Se $A, B \in M_n(R)$ sono matrici ortogonali, allora AB é ortogonale.
- Geometria analitica e s.e.r. Dimostrazioni delle condizioni di perpendicolarità e di parallelismo "rette-piani" (tutti i casi possibili).
- Parallelismo piano-retta mediante la discussione del sistema formato dalle loro equazioni.
- Equazioni della sfera e della circonferenza. Determinazione di centro e raggio.
- Se λ é un autovalore di $A \in M_n(R)$ allora V_λ é un sottospazio di R^n.
- Se $A \in M_2(R)$ allora $\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + |A|$.
- Teorema fondamentale per il calcolo degli autovalori e degli autospazi.
- m.g. di $\lambda = n - r(\lambda I - A)$.
- Se $A \in M_n(R)$ é diagonalizzabile con U ortogonale, allora A é simmetrica.
- a) $\lambda = 0$ é autovalore di $A \Leftrightarrow |A| = 0$.
  b) Se x_1, x_2 sono autovettori di A associati agli autovalori λ_1, λ_2 con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, allora x_1, x_2 sono linearmente indipendenti.
  c) $A \approx B \rightarrow |A| = |B|$ e $A \approx B \rightarrow \Delta_A(\lambda) = \Delta_B(\lambda)$.
  d) Se λ é autovalore di A e x é un relativo autovettore, allora λ^2 é autovalore di A^2 e x é un autovettore di A^2.
- Se G é una matrice a scala, allora $r(G) =$ numero di righe non nulle di G.
- Teorema sulla riduzione a forma diagonale di una forma quadratica.
- Teorema sulle forme quadratiche definite (semi-definite) positive.
- Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ e' definita positiva $\Leftrightarrow |A| > 0$ e $a > 0$.
- Se $A \in M_n(R)$ é simmetrica e (semi-) definita positiva, allora esiste una (unica) matrice B simmetrica e (semi-) definita positiva tale che $B^2 = A$. Segue definizione di $\sqrt{A}$.
- Lo s.v. $R[x]$ (polinomi nell'indeterminata x e a coefficienti reali) non ha dimensione finita.

- Una funzione $f : V \rightarrow V'$ V, V' s.v. su R) é lineare
  $\Leftrightarrow a') f(a_1 w_1 + a_2 w_2) = a_1 f(w_1) + a_2 f(w_2)$.
- Noti gli elementi di una base $\beta = (v_1, ..., v_n)$ di V e noti i corrispondenti tramite una funzione lineare $f : V \rightarrow V'$ degli elementi di β (cioé noti $f(v_1), ..., f(v_n)$), possiamo trovare $f(v)$ per ogni $v \in V$.
- Se $f : V \rightarrow V'$ é una funzione lineare, allora
  a) $f(0) = 0$,
  b) $f(-w) = -f(w)$,
  c) N_f é un sottospazio di V,
  d) I_f é un sottospazio di V'.
- Una funzione lineare $f : V \rightarrow V'$ é iniettiva $\Leftrightarrow N_f = \{0\}$.
- Le funzioni del tipo f_A ($A \in M_{m,n}(R)$) sono funzioni lineari da $R^n \rightarrow R^m$.

- La funzione lineare f_A con $A \in M_n(R)$ e' iniettiva se e solo se $|A| \neq 0$.
- Se $f: V \to V'$ e' lineare e $S = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ e' linearmente dipendente, allora $f(S) = \{f(v_1), ..., f(v_n)\} \subseteq V'$ e' linearmente dipendente.
- Se $f: V \to V'$ e' lineare e 1-1 e $S = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ e' linearmente indipendente, allora $f(S) = \{f(v_1), ..., f(v_n)\} \subseteq V'$ e' linearmente indipendente.
- Se $S \subseteq V$ e' una base di V allora $f(S)$ genera I_f.