Compito di Geometria e Algebra per Ing. Informatica ed Elettronica 17-02-2015

1) Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f((x,y,z,t)) = (-x+y-2z+kt, x+y+t, 2x+y+z) \quad \forall (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4, k \in \mathbf{R} \ .$$

a) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ trovare un insieme di generatori, una base e la dimensione dell'immagine di f (I_f).

b) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{w} = (1, \alpha, 4)$ ad I_f, $\alpha \in \mathbf{R}$.

2) Discutere i seguenti sistemi lineari

$$a) \quad \begin{cases} x - y + z = \alpha \\ x + 2y - z = -1 \\ -3y + \alpha z = \beta \end{cases} \qquad b) \quad \begin{cases} x - y + z + \alpha t = 0 \\ x + 2y - z - t = 0 \\ -3y + \alpha z + \beta t = 0 \end{cases} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$$

3) Sia $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Trovare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.

b) Trovare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali A è invertibile e risulta $5|A^{-1}| \geq \mathrm{tr}(A) - 6$.

4) Sia $\quad A = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ (A è simmetrica).

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Rappresentare A^3 come combinazione lineare di A^2, A e I_3.

5) Trovare:

a) le equazioni ridotte della retta t passante per $P(1,2,3)$, parallela al piano $\pi \equiv 4x + 2y + 3z - 5 = 0$ e perpendicolare alla retta $r \equiv \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z + 5 = 0 \end{cases}$

b) $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che la minima distanza tra le rette $r_1 \equiv \begin{cases} x = 3z - 5 \\ y = 2z - 3 \end{cases}$ e $r_2 \equiv \begin{cases} x = 3z + \alpha \\ y = 4z + \beta \end{cases}$ sia minore di $2\sqrt{10}$,

c) l'equazione delle eventuali sfere S di raggio $R = 2\sqrt{3}$, tangenti il piano $\pi_1 \equiv x + y + z - 6 = 0$ ed aventi il centro sulla retta $r_3 \equiv \begin{cases} x = 2z - 5 \\ y = 3z - 7 \end{cases}$.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente motivati.

<u>Soluzione</u>. **1)** a) Risulta

$$I_f = \{(-x+y-2z+kt, x+y+t, 2x+y+z) \ : \ x,y,z,t \in \mathbf{R}\} \subseteq \mathbf{R}^3$$

quindi l'insieme

$$S = \{(-1,1,2),(1,1,1),(-2,0,1),(k,1,0)\}$$

genera I_f.
Consideriamo adesso la matrice A che ha come righe i vettori di S,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Consideriamo il determinante del minore C ottenuto prendendo gli elementi all'incrocio delle prime due righe e delle prime due colonne:

$$|C| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 .$$

Consideriamo adesso i determinanti dei due orlati ottenuti da C:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 0 \end{vmatrix} = -k+3$$

Possiamo quindi dire che se $k \neq 3$ allora $r(A) = 3$ mentre se $k = 3$ allora $r(A) = 2$.
Pertanto se

$$k \neq 3 \to \dim W = 3 \ (= r(A)) \text{ e } S' = \{(-1,1,2),(1,1,1),(3,1,0)\} \text{ è una base di } I_f.$$

Si noti che in questo caso $I_f = \mathbf{R}^3$ e quindi può andare bene una qualunque base di $\mathbf{R}^3$.
Se

$$k = 3 \to \dim W = 2 \ (= r(A)) \text{ e } \overline{S} = \{(-1,1,2),(1,1,1)\} \text{ è una base di } I_f.$$

b) Se $k \neq 3$, poichè $I_f = \mathbf{R}^3$ chiaramente $\mathbf{w} \in I_f$, qualunque sia $\alpha \in \mathbf{R}$.
Se $k = 3$ risulta $\mathbf{w} \in I_f \iff$ la matrice ottenuta prendendo come righe i vettori della base $\overline{S}$ di I_f e il vettore $\mathbf{w}$ ha rango due. Poichè tale matrice è

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 4 \end{pmatrix}$$

questo accade esattamente quando il suo determinante è uguale a 0, ossia $|B| = 3\alpha - 9 = 0$ e quindi $\alpha = 3$.

2) a) Calcoliamo anzitutto il determinante della matrice incompleta A del sistema (che è una matrice quadrata 3×3):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & \alpha \end{vmatrix} = 3\alpha - 6 \ .$$

Quindi se $\alpha \neq 2$ il sistema è di Cramer e ha quindi un'unica soluzione, qualunque sia il valore di β.
Supponiamo allora $\alpha = 2$ e consideriamo la matrice completa del sistema $A : B$. Risulta

$$A : B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & \beta \end{pmatrix}$$

e calcoliamo il determinante dei minori orlati di ordine tre del minore di ordine due formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne, minore che ha determinante uguale a 3. Il primo di questi minori è proprio A che ha determinante, come sappiamo, nullo, mentre il secondo è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & \beta \end{pmatrix}$$

che ha determinante $3\beta - 9$. Quindi se $\beta \neq 3$ si ha $r(A : B) = 3 \neq 2 = r(A)$ e quindi per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema non ha soluzioni.
Se invece $\beta = 3$ si ha $r(A : B) = r(A) = 2$ e, sempre per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.
b) Il sistema è omogeneo e la sua matrice incompleta $\overline{A}$ (l'unica che è necessario considerare) coincide con la matrice completa del sistema a). Quindi:
se $\alpha \neq 2$ o $\beta \neq 3$ è $r(\overline{A}) = 3$ e il sistema ha $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni,
se $\alpha = 2$ e $\beta = 3$ è $r(\overline{A}) = 2$ e il sistema ha $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni.

3) a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -3 \\ 0 & \lambda - \alpha & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - \alpha)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = (\lambda - \alpha)(\lambda - 1)(\lambda - 5)$$

e quindi gli autovalori di A sono $\alpha, 1, 5$.
Se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 5$ i tre autovalori sono tutti distinti (quindi in particolare ogni autovalore ha molteplicità algebrica e molteplicità geometrica uguale a 1). La matrice A è quindi diagonalizzabile.
Se $\alpha = 1$ allora $\lambda = 5$ è tale che m.a. di $5 = 1 =$ m.g. di 5.
Invece $\lambda = 1$ è tale che m.a. di $1 = 2$ e dobbiamo quindi quindi trovare la m.g. di 1.

Quest'ultima è data da

$$3 - r(1I - A) = 3 - r \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

e quindi m.g. di $1 = 2 =$ m.a. di 1. Allora A è diagonalizzabile.
Se $\alpha = 5$ allora $\lambda = 1$ è tale che m.a. di $1 = 1 =$ m.g. di 1.
Invece $\lambda = 5$ è tale che m.a. di $5 = 2$ e dobbiamo quindi quindi trovare la m.g. di 5.
Quest'ultima è data da

$$3 - r(5I - A) = 3 - r \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

e quindi m.g. di $5 = 2 =$ m.a. di 5. Anche in questo caso A è diagonalizzabile.
2) Poichè $|A| = 5\alpha$, A è invertibile $\iff \alpha \neq 0$. Poichè $|A^{-1}| = 1/|A| = 1/5\alpha$ si ha che

$$5|A^{-1}| \geq \operatorname{tr}(A) - 6 \iff 5 \cdot \frac{1}{5\alpha} \geq (2 + \alpha + 4) - 6 \iff \frac{1}{\alpha} \geq \alpha \iff$$
$$\alpha \leq -1 \ \text{ oppure } \ 0 < \alpha \leq 1 \ .$$

4) a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 15 & 0 & -4 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ -4 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 16)$$

e quindi gli autovalori di A sono $-1, 16$.
Determiniamo i relativi autospazi:

$$V_{16} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} x - 4z = 0 \\ 17y = 0 \\ -4x + 16z = 0 \end{cases} \right\}$$

e una sua base ortonormale è data da $\{(4/\sqrt{17}, 0, 1/\sqrt{17})\}$.

$$V_{-1} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} -16x - 4z = 0 \\ -4x - z = 0 \end{cases} \right\}$$

e una sua base ortonormale è data da $\{(0, 1, 0), (1/\sqrt{17}, 0, -4/\sqrt{17})\}$.
Quindi $\{(4/\sqrt{17}, 0, 1/\sqrt{17}), (0, 1, 0), (1/\sqrt{17}, 0, -4/\sqrt{17})\}$ è una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A e la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 4/\sqrt{17} & 0 & 1/\sqrt{17} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{17} & 0 & -4/\sqrt{17} \end{pmatrix}$$

è ortogonale e diagonalizza A. Risulta

$$U_{-1}AU = \lambda = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

b) Risulta

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^3 - 14\lambda^2 - 31\lambda - 16$$

e per il teorema di Hamilton-Cayley $\Delta_A(A) = 0$ ossia

$$A^3 - 14A^2 - 31A - 16I_3 = 0 \quad \text{ e quindi } \quad A^3 = 14A^2 + 31A + 16I_3 .$$

5) a) La generica retta per P ha equazione

$$t \equiv \frac{x-1}{\ell} = \frac{y-2}{m} = \frac{z-3}{n} .$$

La condizione di parallelismo con π ($a\ell+bm+cn = 0$) porta all'equazione $4\ell+2m+3n = 0$, mentre la condizione di perpendicolarità con r ($\ell\ell_1+mm_1+nn_1 = 0$) di parametri direttori $2, 1, 1$ porta all'equazione $2\ell + m + n = 0$. Il sistema delle due equazioni fornisce $n = 0$ e $m = -2\ell$ e quindi

$$t \equiv \begin{cases} y = -2x + 4 \\ z = 3 \end{cases} .$$

b) I parametri direttori di r_1 e r_2 sono rispettivamente $3, 2, 1$ e $3, 4, 1$ e, non essendo proporzionali, possiamo dire che r_1 e r_2 non sono parallele.
Determiniamo adesso il piano π contenente r_1 e parallelo a r_2. Preso un generico punto P di r_2 sarà $\mathrm{d}(r_1, r_2) = \mathrm{d}(P, \pi)$.
Il fascio di piani di asse r_1 ha equazione

$$\pi \equiv x - 3z + 5 + \lambda(y - 2z + 3) = 0 \quad \text{ossia} \quad \pi \equiv x + \lambda y + (-3 - 2\lambda)z + 5 + 3\lambda = 0 .$$

Risulta $\pi \parallel r_2 \iff 3 + 4\lambda - 3 - 2\lambda = 0 \iff \lambda = 0$ e quindi $\pi \equiv x - 3z + 5 = 0$.
Come punto di r_2 prendiamo $P(\alpha, \beta, 0)$. Risulta allora

$$\mathrm{d}(r_1, r_2) = \mathrm{d}(P, \pi) = \frac{|\alpha + 5|}{\sqrt{10}}$$

e

$$\frac{|\alpha + 5|}{\sqrt{10}} < 2\sqrt{10} \iff |\alpha + 5| < 20 \iff -25 < \alpha < 15 .$$

c) Il centro C è un punto di r_3, quindi $C(2\alpha - 5, 3\alpha - 7, \alpha)$. La sfera S è tangente a $\pi_1 \iff \mathrm{d}(C, \pi_1) = R \iff$

$$\frac{|2\alpha - 5 + 3\alpha - 7 + \alpha - 6|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \iff |6\alpha - 18| = 6 \iff \alpha = 4 \ \text{ oppure } \ \alpha = 2 .$$

Se $\alpha = 4$ risulta $C_1(3, 5, 4), R = 2\sqrt{3}$ e

$$S_1 \equiv (x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 = 12 \ ,$$

se invece $\alpha = 2$ risulta $C_2(-1, -1, 2), R = 2\sqrt{3}$ e

$$S_2 \equiv (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 12 \ .$$

Compito di Geometria e Algebra per Ing. Informatica ed Elettronica 12-01-2015

1) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f((x,y,z)) = (y-2z, x+y+z, x+2y-z, x+kz) \quad k \in \mathbf{R} \ .$$

a) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ trovare una base e la dimensione di N_f (nucleo di f) e I_f (immagine di f).

b) Per i valori di k per i quali $\dim I_f = 2$, discutere l'appartenenza di $\mathbf{w} = (1,2,3,\alpha)$ ad I_f usando la riduzione a gradini ($\alpha \in \mathbf{R}$).

2) Discutere i seguenti sistemi lineari

$$a) \ \begin{cases} x - \alpha y + 2z = -2 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ x + z = \beta \end{cases} \qquad b) \ \begin{cases} x - \alpha y + 2z - 2t = 0 \\ 2x + 3y - z + t = 0 \\ x + z + \beta t = 0 \end{cases} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$$

3) Sia $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Trovare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali:

a) A è diagonalizzabile,

b) A è invertibile e risulta $9|A^{-1}| \leq \dfrac{1}{9}|A|$.

4) Sia $\quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica).

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Verificare che A è definita positiva e trovare $\sqrt{A}$.

c) (Vedi forme quadratiche) Verificare l'uguaglianza $Q((x,y)) = Q_1((x_1,y_1))$ con $(x,y) = (1,1)$.

5) Trovare:

a) le equazioni ridotte della retta passante per $P(1,2,3)$, parallela al piano $\pi \equiv x - 2y + z + 5 = 0$ e perpendicolare al vettore $\mathbf{v} = (1,-2,3)$;

b) la minima distanza tra le rette $r_1 \equiv \begin{cases} x = 3z + 5 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x = 3z - 5 \\ y = 4z + 2 \end{cases}$;

c) le equazioni delle (eventuali) rette contenute nel piano $\pi_1 \equiv x + y + z - 3 = 0$, passanti per $Q(1,1,1)$ e incidenti la retta $t \equiv \begin{cases} x = -2y \\ z = -2y \end{cases}$.

6) Trovare

a) l'equazione del cilindro che proietta la conica $\mathcal{C} \equiv \begin{cases} x^2 + 2y^2 - 4 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ parallelamente al vettore $\mathbf{v} = (2,1,1)$,

b) i vertici della conica $\mathcal{C}$.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente motivati.

<u>**Soluzione**</u>. **1)** a) Risulta

$$N_f = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} y - 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ x + kz = 0 \end{cases} \right\}$$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} y = 2z \\ x = -3z \\ (k-3)z = 0 \end{cases} .$$

Quindi se $k \neq 3$ si ha $N_f = \{(0,0,0)\}$, mentre se $k = 3$ risulta $N_f = \{(-3z, 2z, z)\ ,\ z \in \mathbf{R}\}$.
Perciò
se $k \neq 3$ $\quad \emptyset$ è una base di N_f e $\dim N_f = 0$,
se $k = 3$ $\quad \{(-3,2,1)\}$ è una base di N_f e $\dim N_f = 1$.
L'insieme $S = \{(0,1,1,1), (1,1,2,0), (-2,1,-1,k)\}$ genera I_f.
Per il teorema dimensionale
se $k \neq 3$ è $\dim I_f = 3$ e S è una base di I_f,
se $k = 3$ è $\dim I_f = 2$ e $S' = \{(0,1,1,1), (1,1,2,0)\}$ è una base di I_f.
b) Sia $k = 3$. Si ha

$$\mathbf{w} \in I_f \iff r(B) = r \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \alpha \end{pmatrix} = 2 = \dim I_f \ .$$

Utilizzando la riduzione a gradini otteniamo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix} .$$

Quindi se $\alpha \neq 1$ risulta $r(B) = 3$ e $\mathbf{w} \notin I_f$, mentre se $\alpha = 1$ è $r(B) = 2$ e $\mathbf{w} \in I_f$.

2) a) Calcoliamo anzitutto il determinante della matrice incompleta A del sistema (che è una matrice quadrata 3×3):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\alpha - 3 \ .$$

Quindi se $\alpha \neq 1$ il sistema è di Cramer e ha quindi un'unica soluzione, qualunque sia il valore di β.

Supponiamo allora $\alpha = 1$ e consideriamo la matrice completa del sistema $A : B$. Risulta

$$A : B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

e calcoliamo il determinante dei minori orlati di ordine tre del minore di ordine due formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne, minore che ha determinante non nullo (uguale a 5). Il primo di questi minori è proprio A che ha determinante, come sappiamo, nullo, mentre il secondo è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

che ha determinante $5\beta + 5$. Quindi se $\beta \neq -1$ si ha $r(A : B) = 3 \neq 2 = r(A)$ e quindi per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema non ha soluzioni.
Se invece $\beta = -1$ si ha $r(A : B) = r(A) = 2$ e, sempre per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.
b) Il sistema è omogeneo e la sua matrice incompleta $\overline{A}$ (l'unica che è necessario considerare) coincide con la matrice completa del sistema a). Quindi:
se $\alpha \neq 1$ o $\beta \neq -1$ è $r(\overline{A}) = 3$ e il sistema ha $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni,
se $\alpha = 1$ e $\beta = -1$ è $r(\overline{A}) = 2$ e il sistema ha $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni.

3) a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -8 & -2 \\ 0 & \lambda - \alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - \alpha)(\lambda - 3)^2$$

e quindi gli autovalori di A sono $\alpha, 3$.
Se $\alpha = 3$ l'unico autovalore è $\lambda = 3$ con molteplicità algebrica 3. Dobbiamo trovare la sua molteplicità geometrica.Questa è data da

$$3 - r\begin{pmatrix} 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1\ .$$

Quindi m.g. di $3 = 1 \neq$ m.a. di $3 = 3$ e A non è diagonalizzabile.
Se $\alpha \neq 3$ m.a. di $\alpha = 1 =$ m.g. di α.
m.a. di $3 = 2$. Quanto vale la m.g. di 3?

$$\text{m.g. di } 3 = 3 - r\begin{pmatrix} 0 & -8 & -2 \\ 0 & 3-\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Poichè

$$\begin{vmatrix} -8 & -2 \\ 3-\alpha & -\alpha \end{vmatrix} = 6\alpha + 6$$

possiamo dire che se $\alpha \neq -1$ allora m.g. di $3 = 3 - 2 = 1 \neq$ m.a. di 3 e quindi A non è diagonalizzabile.
Se invece $\alpha = -1$ allora m.g. di $3 = 3 - 1 = 2 =$ m.a. di 3 e quindi A è diagonalizzabile.
b) $|A| = 9\alpha$ e quindi A è invertibile solo se $\alpha \neq 0$, inoltre $|A^{-1}| = 1/9\alpha$. Perciò

$$9|A^{-1}| \leq \frac{1}{9}|A| \iff \frac{1}{\alpha} \leq \alpha \iff -1 \leq \alpha < 0 \ \text{ oppure } \ \alpha \geq 1 \ .$$

4) a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda - 4)$$

e quindi gli autovalori di A sono $9, 4$.
Determiniamo i relativi autospazi:

$$V_9 = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \right\} = \{(x, -2x) \ : \ x \in \mathbf{R}\}$$

e una sua base ortonormale è data da $\{(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})\}$.

$$V_4 = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \right\} = \{(2y, y) \ : \ y \in \mathbf{R}\}$$

e una sua base ortonormale è data da $\{(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})\}$.
Quindi $\{(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}), (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})\}$ è una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A e la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

è ortogonale e diagonalizza A. Risulta

$$U_{-1}AU = \lambda = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \ .$$

b) A è definita positiva perchè tutti i suoi autovalori sono positivi. Risulta poi $U_{-1}\sqrt{A}U = \sqrt{\lambda}$ e quindi

$$\sqrt{A} = U\sqrt{\lambda}U_{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\sqrt{A} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -2 & 14 \end{pmatrix} \ .$$

c) Risulta

$$(x_1, y_1) = (1,1)U = (-1/\sqrt{5}, 3/\sqrt{5})$$

e quindi

$$Q((x,y)) = 5x^2 - 4xy + 8y^2 \to Q((1,1)) = 9$$

mentre

$$Q_1((x_1,y_1)) = 9x_1^2 + 4y_1^2 \to Q_1((-1/\sqrt{5}, 3/\sqrt{5})) = 9 \ .$$

5) a) La generica retta per P ha equazione

$$t \equiv \frac{x-1}{\ell} = \frac{y-2}{m} = \frac{z-3}{n} \ .$$

La condizione di parallelismo con π ($a\ell + bm + cn = 0$) porta all'equazione $\ell - 2m + n = 0$, mentre la condizione di perpendicolarità con $\mathbf{v}$ porta all'equazione $\ell - 2m + 3n = 0$. Il sistema delle due equazioni fornisce $\ell = 2m$ e $n = 0$ e quindi

$$t \equiv \begin{cases} x = 2y - 3 \\ z = 3 \end{cases} \ .$$

b) I parametri direttori di r_1 e r_2 sono rispettivamente $3,2,1$ e $3,4,1$ e, non essendo proporzionali, possiamo dire che r_1 e r_2 non sono parallele.
Determiniamo adesso il piano π contenente r_1 e parallelo a r_2. Preso un generico punto P di r_2 sarà $\mathrm{d}(r_1, r_2) = \mathrm{d}(P, \pi)$.
Il fascio di piani di asse r_1 ha equazione

$$\pi \equiv x - 3z - 5 + \lambda(y - 2z - 3) = 0 \quad \text{ossia} \quad \pi \equiv x + \lambda y + (-3 - 2\lambda)z - 5 - 3\lambda = 0 \ .$$

Risulta $\pi \parallel r_2 \iff 3 + 4\lambda - 3 - 2\lambda = 0 \iff \lambda = 0$ e quindi $\pi \equiv x - 3z - 5 = 0$.
Come punto di r_2 prendiamo $P(-5,2,0)$. Risulta allora

$$\mathrm{d}(r_1, r_2) = \mathrm{d}(P, \pi) = \frac{|-5-5|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \ .$$

c) La retta richiesta è quella passante per Q (che appartiene a π_1) e per il punto $\overline{Q}$ di intersezione di t e π_1. Come si vede facilmente è $\overline{Q}(2,-1,2)$ e quindi la retta richiesta ha equazione

$$\begin{cases} x = z \\ y = -2z + 3 \end{cases} \ .$$

6) a) La generica retta t parallela al vettore $\mathbf{v}$ ha equazione

$$\begin{cases} x = 2z + h \\ y = z + k \end{cases} \ .$$

Il punto Q di intersezione di t col piano $z = 2$ è allora $Q(4+h, 2+k, 2)$ e appartiene al cilindro $\iff$ $(4+h)^2 + 2(2+k)^2 - 4 = 0$ e sviluppando $h^2 + 2k^2 + 8h + 8k + 20 = 0 \quad (*)$.

Ricavando h e k dall'equazione di t otteniamo $h = x - 2z$ e $k = y - z$ che sostituite in $(*)$ danno

$$(x - 2z)^2 + 2(y - z)^2 + 8(x - 2z) + 8(y - z) + 20 = 0$$

che è l'equazione del cilindro cercato.
b) La conica $\mathcal{C}$ è, nel piano $z = 2$, un'ellisse, la cui forma canonica è

$$\mathcal{C} \equiv \begin{cases} \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

e quindi i vertici di $\mathcal{C}$ sono:

$$V_1(2, 0, 2)\ ,\ V_2(-2, 0, 2)\ ,\ V_3(0, \sqrt{2}, 2)\ ,\ V_4(0, -\sqrt{2}, 2)\ .$$