Secondo parziale di Geometria (Ing. Informatica) 21-12-2009-A

1) Determinare:

a) gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali la minima distanza tra le rette

$$r \equiv \begin{cases} x = 2z - 4 \\ y = 3z + 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2z + \alpha \\ y = 4z + \beta \end{cases}$$

sia uguale a $\sqrt{5}$;

b) le equazioni delle eventuali sfere S aventi il centro C sulla retta $r \equiv \begin{cases} x = -z - 1 \\ y = 2z + 5 \end{cases}$ e tangenti i piani $\pi \equiv 2x + 3y - 6z - 19 = 0$ e $\pi_1 \equiv 2x + 3y - 6z - 15 = 0$.

2) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \beta \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$,

a) determinare gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile,

b) per $\alpha = 3$ esprimere A^3 come combinazione lineare di A^2, A, I_3.

3) Sia $A = \begin{pmatrix} -14 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica).

a) Trovare una base ortonormale $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A.

b) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

c) Trovare $M_\beta((x, y, z))$.

d) Detta f_A la funzione lineare associata ad A, trovare $< f_A((1,1,1)), (1,0,1) >$.

4) Sia f l'operatore lineare in $\mathbf{R}^3$ per il quale

$$f((1,0,0)) = (1,1,2), f((0,1,0)) = (-1,1,0), f((0,0,1)) = (1,-2,-1).$$

a) Trovare $f((x, y, z))$

b) Trovare una base e la dimensione del nucleo e dell'immagine di f (N_f, I_f).

c) Dire se f è iniettiva o suriettiva.

Facoltativo. Dimostrare che se $f : V \to V'$ è una funzione lineare e $\beta = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ è una base di V, allora $S' = (f(\mathbf{v}_1), ..., f(\mathbf{v}_n))$ genera I_f.

Compito di Geometria e Algebra per Ingegneria dell'Informazione 12-01-2010-A

1) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f((x,y,z)) = (x+2y-z, x+5z, 2x+3y+kz) \qquad (k \in \mathbf{R})$$

Al variare di k in $\mathbf{R}$
a) trovare una base e la dimensione di N_f (nucleo di f) e di I_f (immagine di f),
b) stabilire se f é iniettiva o suriettiva,
c) discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (3, \alpha, 3)$ ad I_f ($\alpha \in \mathbf{R}$).

2) Discutere

$$\begin{cases} \alpha x + 2y - t = 0 \\ 2x + y + 3z + t = 0 \\ 3x + 2y + 4z + \beta t = 0 \end{cases} \qquad (\alpha, \beta \quad \in \mathbf{R})$$

3) Sia $A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.
a) Determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.
b) Calcolare $(1\ 1\ 1) \cdot A_{-1}$.
c) Trovare gli eventuali $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali $\det(A^{-1}) < -1/3$.

4) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.
b) Dire "cosa" rappresentano geometricamente (in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$) gli autospazi di A.

5) Determinare:
a) le equazioni ridotte della retta passante per $P(2,-1,3)$, perpendicolare alla retta $t \equiv \begin{cases} x = z + 4 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$ e parallela al piano $\pi \equiv 2x + 4y + z - 5 = 0$;
b) $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che $d(r,s) = \sqrt{10}$ con

$$r \equiv \begin{cases} x = 3z - 5 \\ y = 2z + 7 \end{cases} \quad \text{e} \quad s \equiv \begin{cases} x = 3z + \alpha \\ y = z + \beta \end{cases}$$

c) le equazioni delle eventuali sfere tangenti il piano $\pi_1 \equiv x+y+z-6 = 0$ in $Q(2,2,2)$ ed aventi il centro sul piano $\pi_2 \equiv x + y - z - 3 = 0$.

6) Con il metodo del completamento dei quadrati studiare la conica $\mathcal{C} \equiv x^2+6x+y+8 = 0$ e tracciarne il grafico.

Compito di Geometria e Algebra per Ingegneria dell'Informazione 26-01-2010

1) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f((x,y,z)) = (2x - z, x - y + 2z, x + ky - 3z) \qquad (k \in \mathbf{R})$$

Al variare di k in $\mathbf{R}$

a) trovare una base e la dimensione di N_f (nucleo di f) e di I_f (immagine di f),

b) stabilire se f é iniettiva o suriettiva,

c) discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (5, 4, \alpha)$ ad I_f ($\alpha \in \mathbf{R}$).

2) Usando la riduzione a scala, discutere i seguenti sistemi lineari:

$$\text{a)} \begin{cases} x - y + \alpha z = 0 \\ y - 3z = \beta \\ 4x - y - z = 6 \end{cases} \quad , \quad \text{b)} \begin{cases} x - y + \alpha z = 0 \\ y - 3z + \beta t = 0 \\ 4x - y - z + 6t = 0 \end{cases} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$$

3) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile e per tali valori diagonalizzarla.

b) Trovare la prima riga di A^{-1} (inversa di A).

4) Sia $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Dire se A è definita positiva e in caso affermativo calcolare determinante e traccia di $\sqrt{A}$.

c) Trovare la forma quadratica $Q((x,y,z))$ associata ad A.

5) Determinare:

a) la minima distanza tra le rette

$$r \equiv \begin{cases} x = 3y \\ z = 2y \end{cases} \quad \text{e} \quad s \equiv \begin{cases} x = 3y + 4 \\ z = 2y + 1 \end{cases} ,$$

b) le equazioni ridotte della retta parallela al piano $\pi \equiv 3x + y - 4z + 1 = 0$, perpendicolare all'asse x e passante per il punto $P(3, -4, -1)$,

c) $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che $P(1, \alpha, 1)$ sia il centro delle eventuali sfere tangenti il piano $\pi_1 \equiv 6x + 2y + 3z - 7 = 0$ e di raggio uguale a 2.

6) Ridurre a forma canonica e studiare la conica $\mathcal{C} \equiv x^2 + 6x - y + 10 = 0$.

Compito di Geometria e Algebra per Ingegneria dell'Informazione 16-02-2010

1) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f((x,y,z)) = (2x + y - z, y + 5z, 3x + 2y + kz) \quad (k \in \mathbf{R})$$

Al variare di k in $\mathbf{R}$

a) trovare una base e la dimensione di N_f (nucleo di f) e di I_f (immagine di f),
b) stabilire se f é iniettiva o suriettiva,
c) discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (\alpha, 3, 3)$ ad I_f ($\alpha \in \mathbf{R}$).

2) Discutere

$$\begin{cases} x + 3y + z + 2t = 0 \\ \beta x + 4y + 2z + 3t = 0 \\ -x + 2z + \alpha t = 0 \end{cases} \quad (\alpha, \beta. \quad \in \mathbf{R})$$

3) Sia $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & \alpha \end{pmatrix}$.

a) Determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.
b) Calcolare $(1\ 1\ 1) \cdot A_{-1}$.
c) Trovare gli eventuali $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali $\det(A^{-1}) < -1/5$.

4) Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.
b) Dire "cosa" rappresentano geometricamente (in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$) gli autospazi di A.

5) Determinare:

a) le equazioni ridotte della retta passante per $P(-1,2,3)$, perpendicolare alla retta $t \equiv \begin{cases} x = 2z - 4 \\ y = z + 2 \end{cases}$ e parallela al piano $\pi \equiv 4x + 2y + z - 7 = 0$;

b) $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che $d(r,s) = \sqrt{17}$ con

$$r \equiv \begin{cases} x = 4z - 7 \\ y = 3z + 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad s \equiv \begin{cases} x = 4z + \alpha \\ y = z + \beta \end{cases}$$

c) le equazioni delle eventuali sfere tangenti il piano $\pi_1 \equiv x+y+z-9 = 0$ in $Q(3,3,3)$ ed aventi il centro sul piano $\pi_2 \equiv x - y + z - 4 = 0$.

6) Con il metodo del completamento dei quadrati studiare la conica $\mathcal{C} \equiv x^2 - 6x + y + 10 = 0$ e tracciarne il grafico.

Compito di Geometria e Algebra per Ing. Informatica del 16-06-2010

9 C.F.U

1) Sia

$$W = \{(x+y+z, x-2y-z, 3x+z, 2x-y) \ : \ x,y,z \in \mathbf{R}\} \sqsubset \mathbf{R}^4 \ .$$

a) Trovare una base e la dimensione di W.
b) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{w} = (2,0,0,k)$ a W $(k \in \mathbf{R})$.
c) Risolvere a) e b) anche con il metodo della riduzione a gradini.

2) Siano:

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} x-2y-3z=-1 \\ x+y=\beta \\ \alpha x+3y+2z=4 \end{cases} \quad , \quad \text{(ii)} \quad \begin{cases} x-2y-3z-t=0 \\ x+y+\beta t=0 \\ \alpha x+3y+2z+4t=0 \end{cases} \qquad (\alpha,\beta \in \mathbf{R})$$

a) Discutere (i).
b) Trovare la dimensione del sottospazio di $\mathbf{R}^4$ delle soluzioni di (ii).

3) Sia $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 0 & 4 & \beta \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Trovare:

a) il rango di A al variare di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$,
b) gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.

4) Sia $B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica).

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.
b) Verificare che la forma quadratica associata ad A è definita positiva e trovare $\Delta_{\sqrt{A}}(\lambda)$.

5) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare tale che:

$$f(1,0,0) = (0,2,1) \ , \ f(1,1,0) = (-2,2,4) \ , \ f(0,0,1) = (-1,-3,0) \ .$$

Trovare:

a) $f(x,y,z)$, determinare N_f e stabilire se f è suriettiva.
b) la matrice A associata ad f,
c) AB dove $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6) Determinare:

a) le equazioni ridotte della retta passante per $P(2,-3,1)$, perpendicolare al vettore $\mathbf{v} = (2,3,1)$ e parallela al piano $\pi \equiv 2x-3y+z-5=0$;
b) $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che $d(r,s) < \sqrt{5}$, dove

$$r \equiv \begin{cases} x = 2z+3 \\ y = 3z-5 \end{cases} \quad \text{e} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2z+\alpha \\ y = -5z+\beta \end{cases} \quad ;$$

c) le equazioni delle eventuali sfere aventi il centro sulla retta $t \equiv \begin{cases} x = 2z-1 \\ y = 3z-5 \end{cases}$ tangenti il piano $\pi \equiv 2x+3y+z-11=0$ e aventi raggio $R = \sqrt{14}$.