



Fondamenti di Automatica

Esempi applicativi

Dott. Ing. Marcello Bonfè

Dipartimento di Ingegneria - Università di Ferrara

Tel. +39 0532 974839

E-mail: marcello.bonfe@unife.it



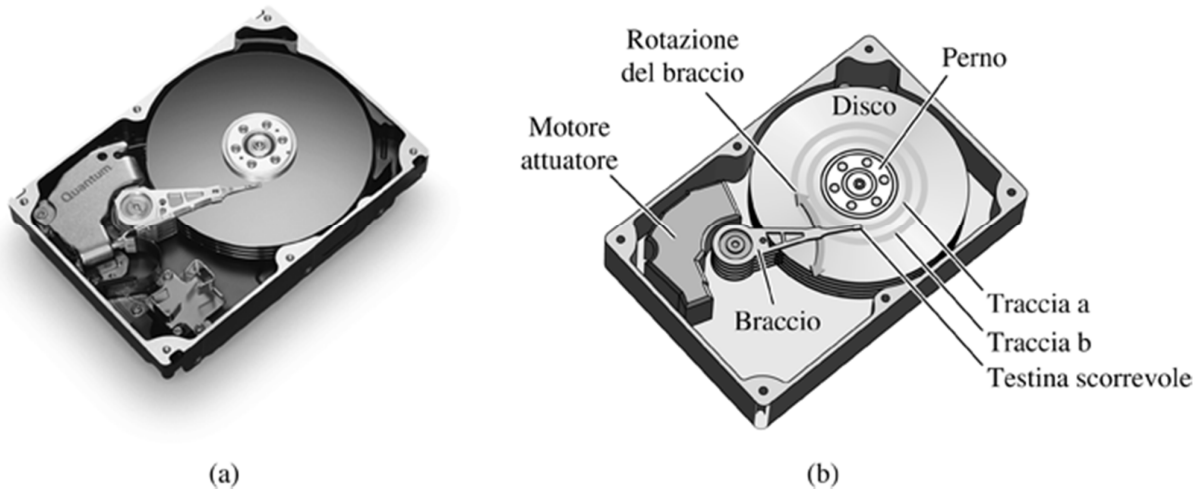
Esempi applicativi

TESTINA DI LETTURA DI UN HARD-DISK



Hard-disk: sistema *meccatronico* ad alte prestazioni

► Componenti elettromeccanici di un hard-disk:

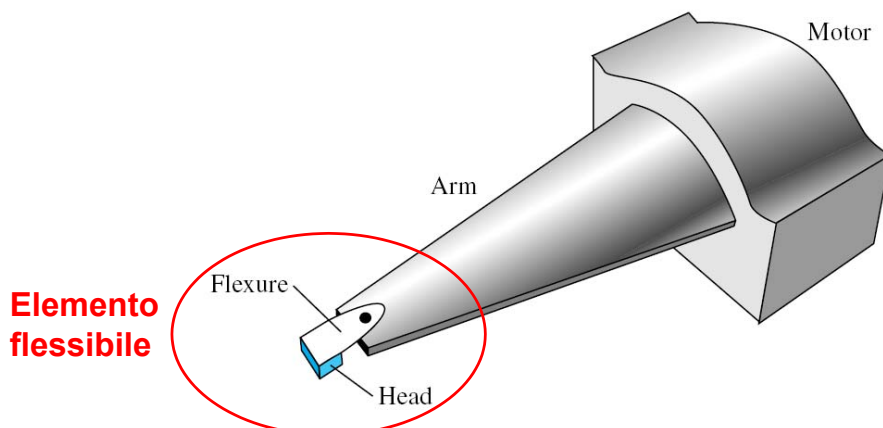


(a) Sistema di azionamento del disco ©1999 Quantum Corporation. Tutti i diritti riservati. (b) Schema dell'azionamento del disco.



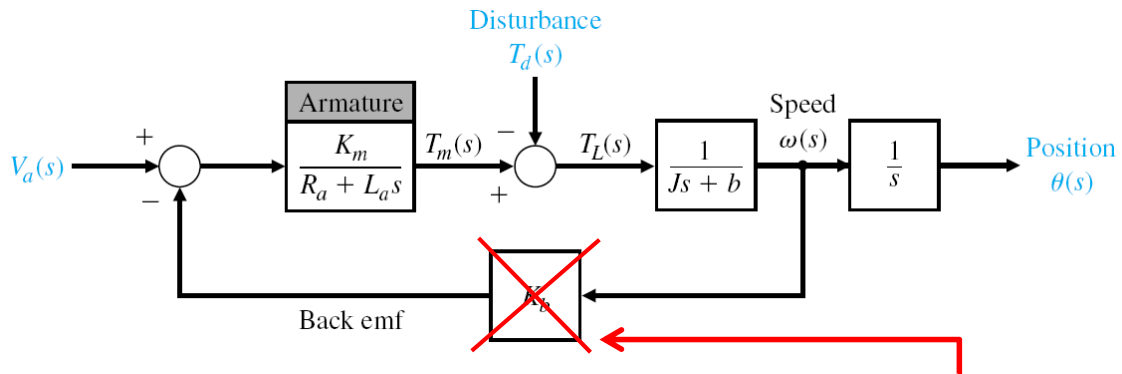
Hard-disk: sistema *meccatronico* ad alte prestazioni - 1

► Schema di controllo e dettaglio della testina:



Hard-disk: sistema *meccatronico* ad alte prestazioni - 2

- L'attuatore è un tipo di motore DC con feedback sulla posizione, avente cioè uno schema a blocchi del tipo:

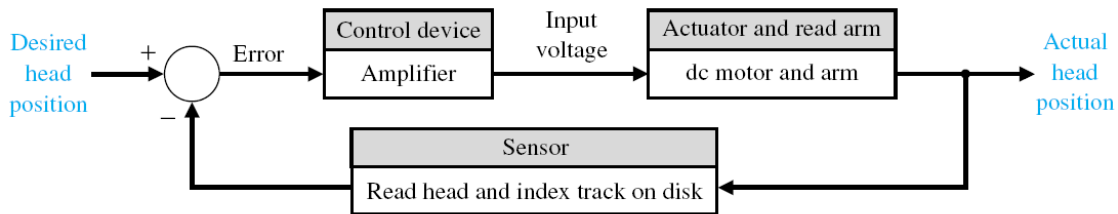


- La tipologia usata negli hard-disk è chiamata *voice coil*, per il quale si può ipotizzare (come semplificazione) che la costante di BEMF sia nulla e quindi si possa eliminare la retroazione intrinseca dello schema precedente

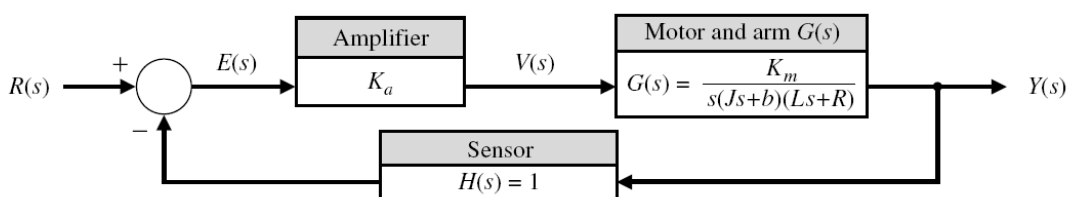


Hard-disk: sistema *meccatronico* ad alte prestazioni - 3

- La testina dell'hard-disk è essa stessa il dispositivo di feedback, in quanto la sua posizione determina la traccia letta sul disco:



(a)

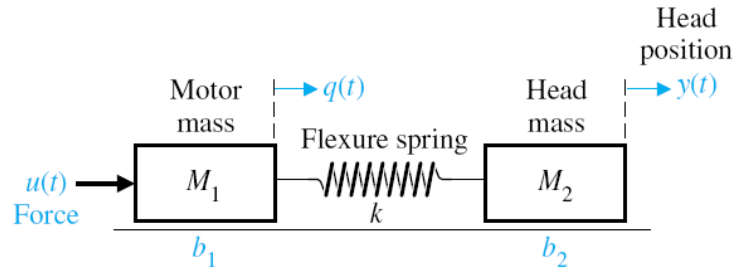


(b)

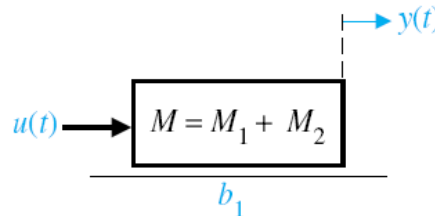


Hard-disk: sistema *meccatronico* ad alte prestazioni - 4

- Una modellazione più dettagliata dell'accoppiamento tra motore e braccio può evidenziare un effetto elastico, assimilabile ad una coppia di masse con interposta una molla:

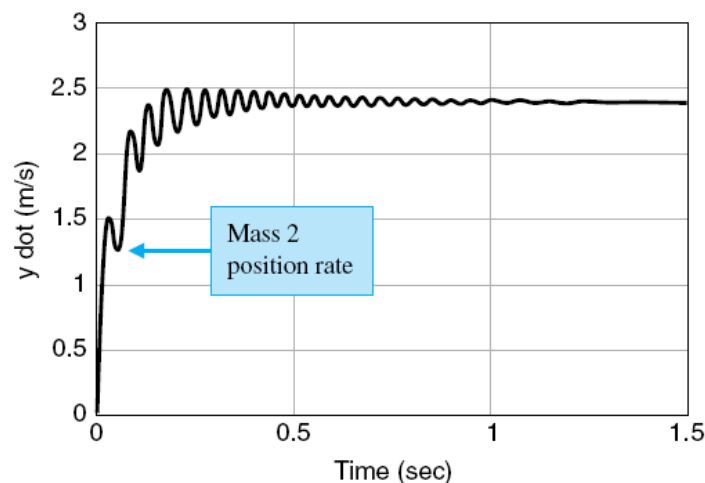


- Se la molla è sufficientemente rigida, le due masse si possono ipotizzare accoppiate direttamente:



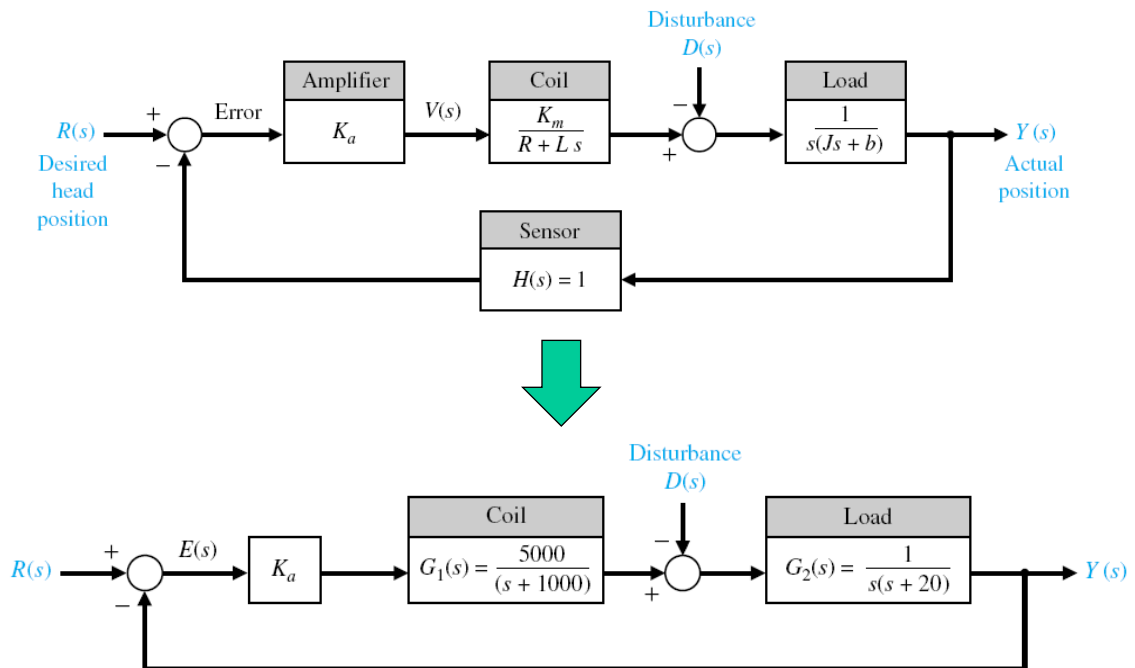
Hard-disk: sistema *meccatronico* ad alte prestazioni - 5

- Se invece la molla non garantisce adeguata rigidità, la risposta del sistema può essere eccessivamente oscillatoria per garantire una buona lettura del disco: :



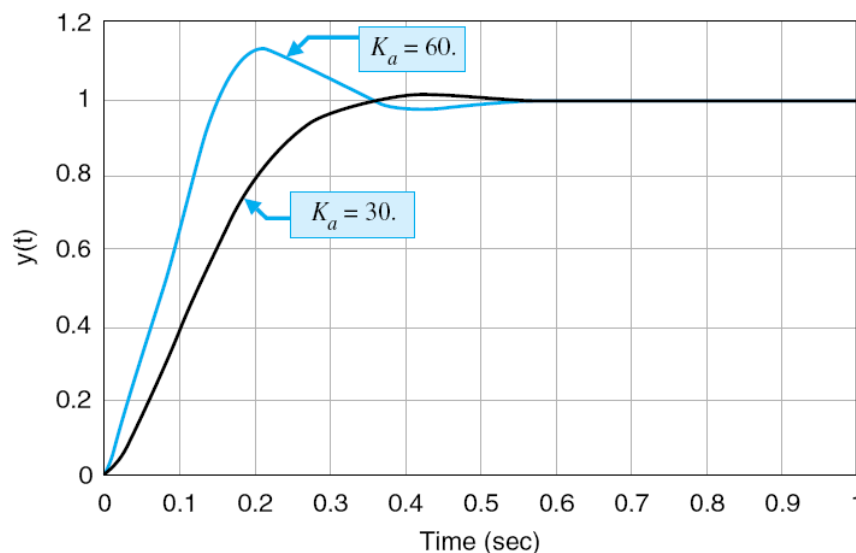
Hard-disk: sistema *meccatronico* ad alte prestazioni - 6

- Con parametri tipici ed effetti elastici trascurabili:



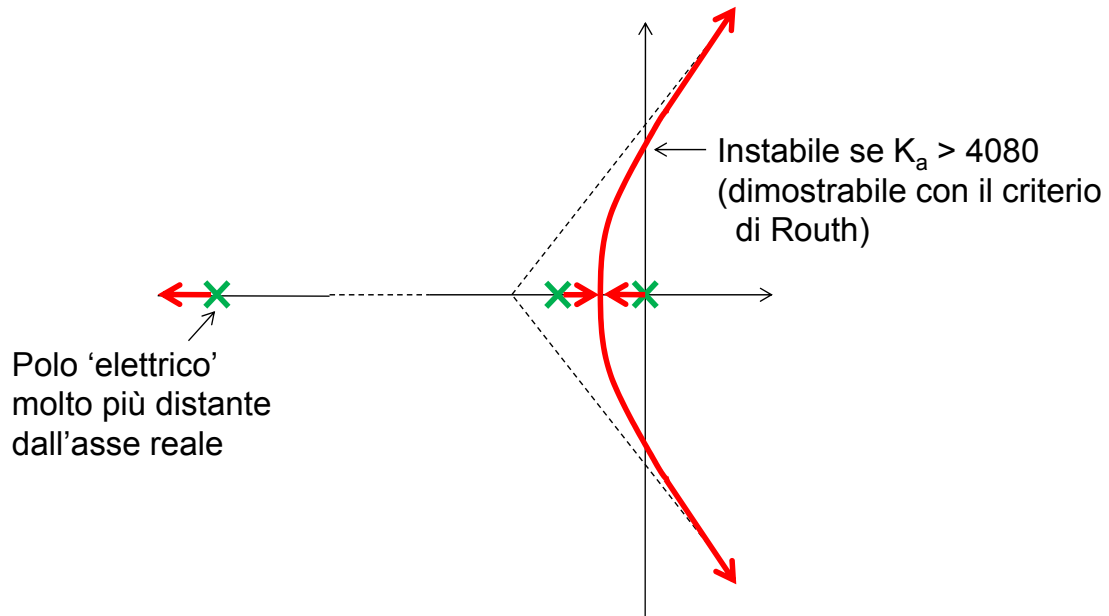
Hard-disk: sistema *meccatronico* ad alte prestazioni - 7

- Per garantire una bassa sensibilità al disturbo, importante soprattutto per le applicazioni su notebook portatili, è necessario che il controllo abbia guadagno elevato:



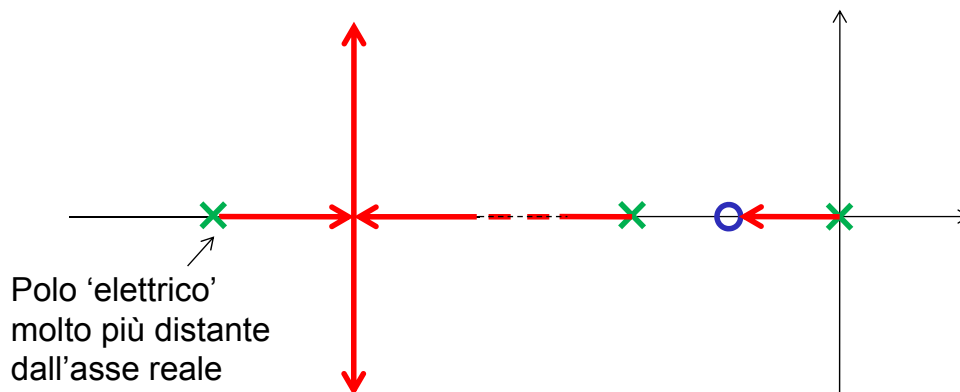
Hard-disk: sistema *meccatronico* ad alte prestazioni - 8

- Un guadagno troppo elevato rende però il sistema instabile, come evidenziato dal luogo delle radici:



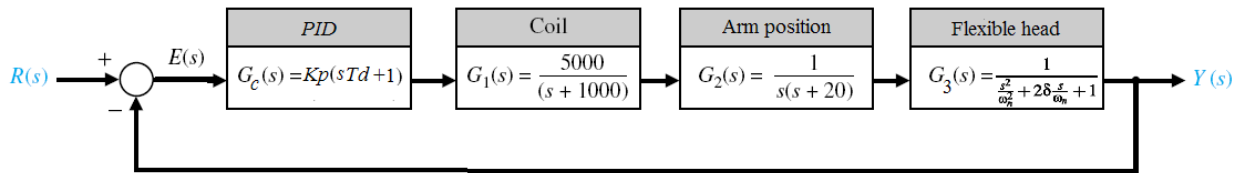
Hard-disk: sistema *meccatronico* ad alte prestazioni - 9

- Con un controllore **PD** (ideale) il sistema diventa stabile per qualsiasi scelta di guadagno, grazie all'inserimento di uno zero a parte reale negativa, il quale però fissa un limite al tempo di assestamento (**X/O**: plant, **X/O**: PD):



Hard-disk: sistema *meccatronico* ad alte prestazioni - 10

- Il supporto della testina è però inevitabilmente elastico, per cui in realtà il sistema completo include una ulteriore dinamica di ordine 2 (massa-molla-smorzatore)



- Nel progetto sarà necessario verificare con cura se la pulsazione di risonanza sia o meno all'interno della banda passante del sistema in retroazione
- Se infatti tale risonanza è esterna alla banda di controllo, essa non verrà sollecitata nel funzionamento controllato



Hard-disk: sistema *meccatronico* ad alte prestazioni – 11

FdT di anello

(PID*Coil*Arm*Head) _{dB}

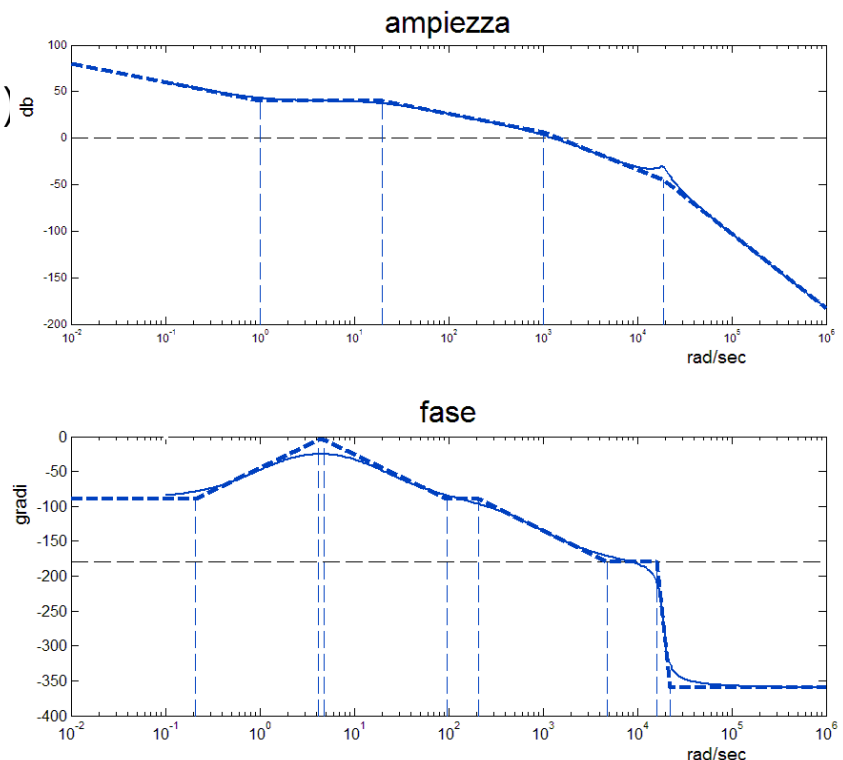
con:

$$\omega_n = 18850$$

$$\delta = 0.3$$

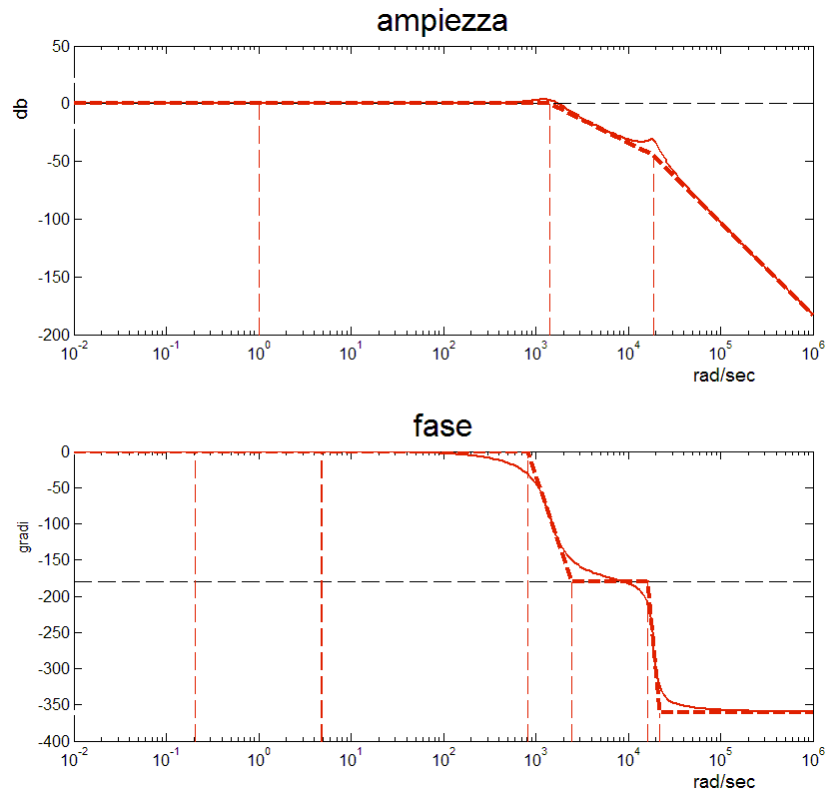
$$T_d = 1$$

$$K_p = 400$$





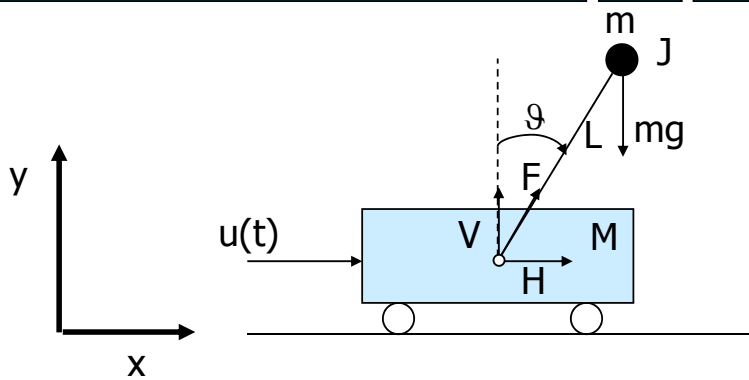
FdT ad anello chiuso:
risonanza fuori dalla banda passante



Esempi applicativi PENDOLO INVERSO SU CARRELLO



Pendolo inverso su carrello



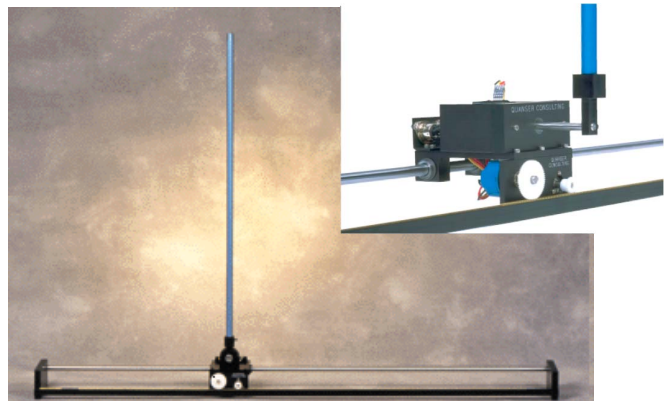
La posizione dell'asta rispetto al carrello è individuata da ϑ mentre x individua la posizione del carrello.

L'azione di controllo è esercitata tramite la forza lineare $u(t)$ applicata al carrello.

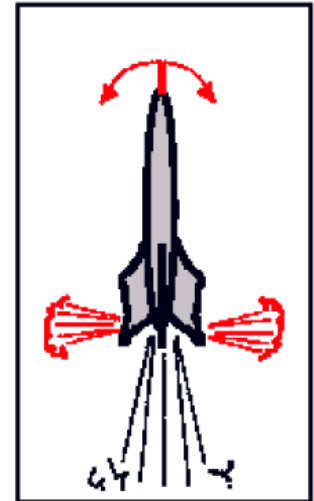
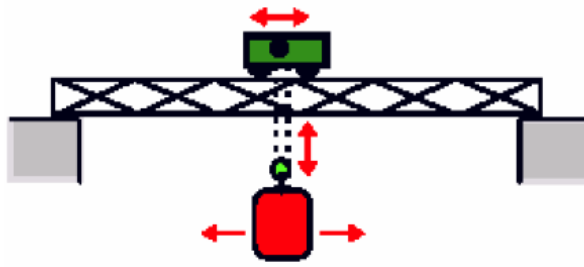
Lo studio di tale sistema "didattico" è utile per le analogie con molte altre applicazioni di controllo di vario genere (es. i sistemi guida missili, il controllo di gru, il Segway® ecc.).



Pendolo inverso su carrello: sistema *didattico*...



... ma con applicazioni reali!



Pendolo inverso su carrello: modello matematico

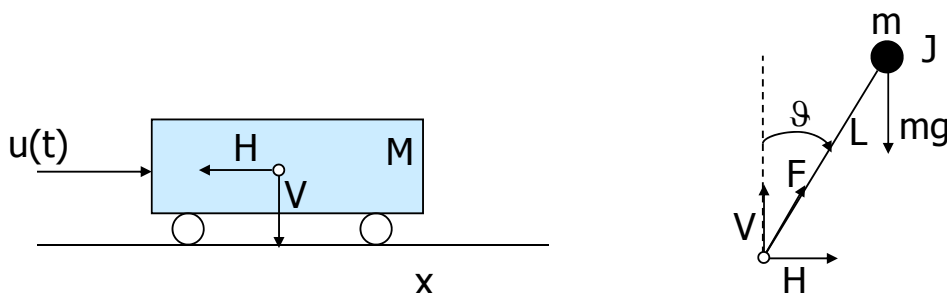
Il sistema è composto da due sottosistemi: **l'asta e il carrello**.

L'asta è vincolata al carrello tramite una cerniera che vincola il movimento alla rotazione attorno all'asse della cerniera (perpendicolare a xy).

Il carrello può muoversi solo lungo l'asse x per l'azione di una forza $u(t)$.

L'asta e il carrello interagiscono tramite una forza F di reazione, diretta lungo l'asta, che può essere scomposta in una componente verticale V e una componente orizzontale H .

N.B. Forze di reazione uguali ed opposte a causa del vincolo dato dalla cerniera



Pendolo inverso su carrello: modello matematico - 1

- Bilancio di forze e coppie:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + H = u$$

$$J\ddot{\vartheta} = VL\sin\vartheta - HL\cos\vartheta$$

- Scomposizione delle forze vettoriali:

$$V = mg + mL\ddot{\vartheta}\sin\vartheta - mL\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta$$

$$H = m\ddot{x} + mL\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - mL\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta$$

- Sostituendo e riscrivendo i termini:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + mL\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - mL\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta = u(t) \\ mL\ddot{x}\cos\vartheta + (J + mL^2)\ddot{\vartheta} + mgL\sin\vartheta = 0 \end{cases}$$

Modello
Completo
COMPATTO



Pendolo inverso su carrello: modello matematico - 2

- Ponendo:

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T = [x \quad \dot{x} \quad \vartheta \quad \dot{\vartheta}]^T$$

ed approssimando come segue:

$$\begin{cases} \sin x_3 \approx x_3 \\ \cos x_3 \approx 1 \\ \sin^2 x_3 = 1 - \cos^2 x_3 \approx 0 \\ \dot{x}_3 \approx 0 \end{cases}$$



Pendolo inverso su carrello: modello matematico - 3

- Supponendo di poter misurare direttamente x_1 e x_3 , si ottiene il modello matematico LTI: $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(J+mL^2)b}{J(M+m)+MmL^2} & \frac{m^2gL^2}{J(M+m)+MmL^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mLb}{J(M+m)+MmL^2} & \frac{(M+m)mgL}{J(M+m)+MmL^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{J+mL^2}{J(M+m)+MmL^2} \\ 0 \\ \frac{mL}{J(M+m)+MmL^2} \end{bmatrix}$$

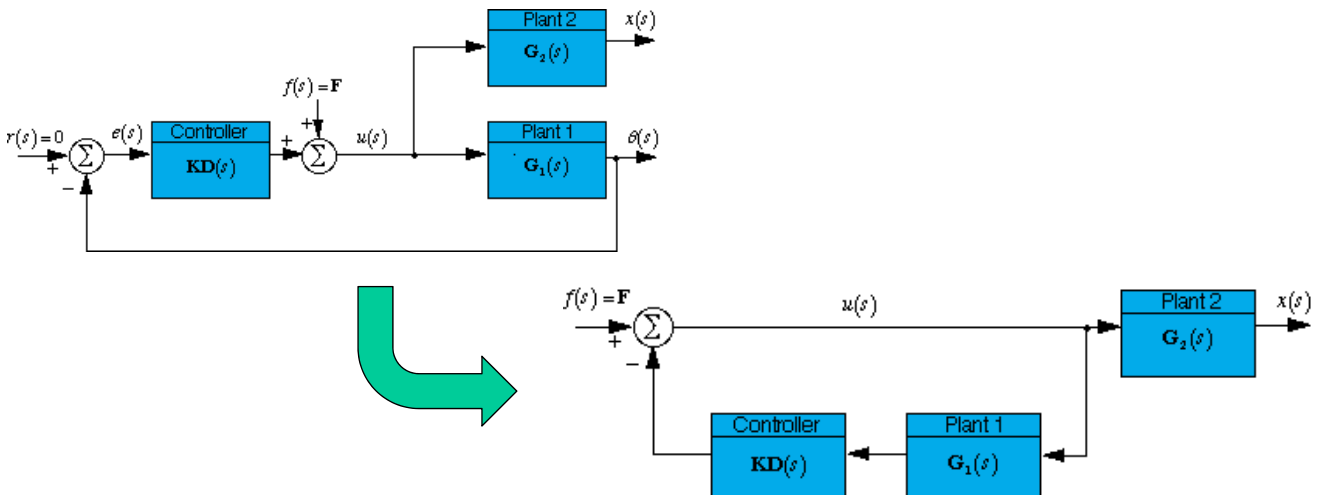
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

NOTA: in questo modello è considerato l'attrito ($b \neq 0$) e l'inerzia dell'asta ($J \neq 0$), trascurati invece nel modello di pag. 24 – Proprietà Strutturali



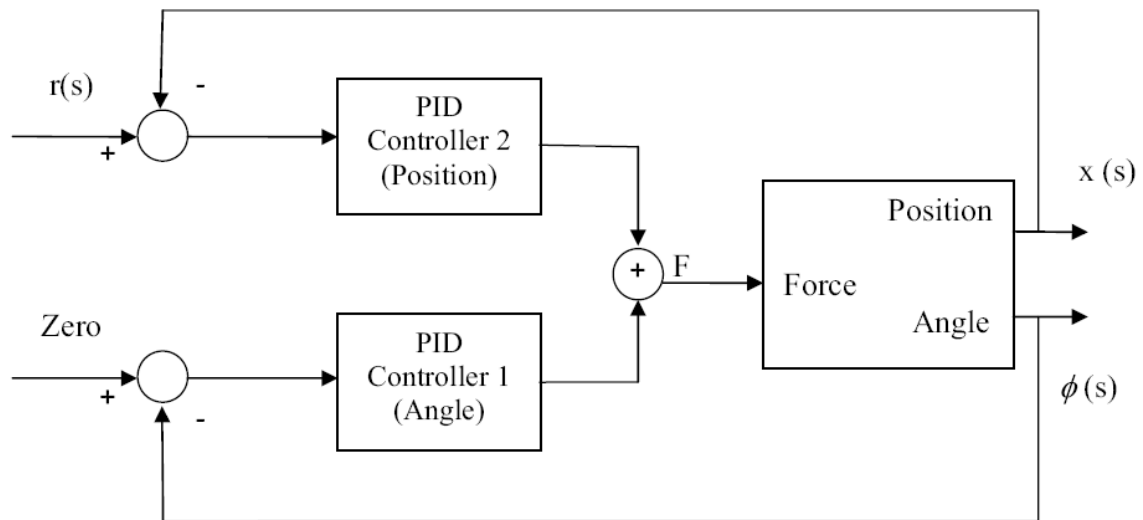
Pendolo inverso su carrello: progetto PID

- Il progetto PID è complicato dal fatto che il sistema non può essere considerato SISO
- Infatti, progettando un controllore per la stabilizzazione dell'angolo sulla verticale ($x_3 = 0$), non è garantito che la posizione del carrello si mantenga limitata!



Pendolo inverso su carrello: progetto PID - 1

- Il progetto PID deve quindi essere fatto in modo simultaneo sia sull'angolo che sulla posizione del carrello, considerandone le reciproche interazioni
- Lo schema finale sarà del tipo:



Pendolo inverso su carrello: controllo stato-ingresso

- In alternativa, il progetto di controllo può essere fatto sulla base del modello nello spazio degli stati
- Il sistema è infatti **completamente raggiungibile**, il che garantisce la possibilità di assegnare arbitrariamente gli autovalori del sistema in retroazione tramite una retroazione stato-ingresso
- Il sistema è inoltre **completamente osservabile**, il che permette di progettare un osservatore dello stato con dinamica arbitraria, per ricostruire le informazioni su x_2 e x_4 , non misurate direttamente



Pendolo inverso su carrello: controllo stato-ingresso-1

➔ Sostituendo i valori:

- $M = 0.5$ kg (massa del carrello)
- $m = 0.2$ kg (massa del pendolo)
- $b = 0.1$ N/m/s (attrito sul carrello)
- $L = 0.3$ m (lunghezza dell'asta)
- $J = 0.006$ kg m² (inerzia dell'asta)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1818 & 2.6727 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.4545 & 31.1818 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.8182 \\ 0 \\ 4.5455 \end{bmatrix}$$



Pendolo inverso su carrello: controllo stato-ingresso-2

➔ Le matrici di raggiungibilità e osservabilità sono:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1.8182 & -0.3306 & 12.2089 \\ 1.8182 & -0.3306 & 12.2089 & -4.4287 \\ 0 & 4.5455 & -0.8264 & 141.8858 \\ 4.5455 & -0.8264 & 141.8858 & -31.3196 \end{bmatrix}$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.18 & -0.45 & 0.033 & 0.082 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2.67 & 31.18 & -0.48 & -1.215 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.67 & 31.18 \end{bmatrix}$$



Pendolo inverso su carrello: controllo stato-ingresso-3

- Il progetto della retroazione stato-ingresso può essere semplificato con una opportuna trasformazione dello stato, che ponga il modello in **forma canonica di raggiungibilità**
- Per ottenere tale rappresentazione, occorre calcolare il polinomio caratteristico di A , i cui coefficienti cambiati di segno sono quelli espressi nell'ultima riga della nuova matrice di stato del sistema in forma canonica:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -5.6, \lambda_3 = -0.143, \lambda_4 = 5.56$$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 0.1818\lambda^3 - 31.1818\lambda^2 - 4.4536\lambda$$



Pendolo inverso su carrello: controllo stato-ingresso-4

- In generale:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$



$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & I_{(n-1) \times (n-1)} & \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Pendolo inverso su carrello: controllo stato-ingresso-5

- ➔ Il modello in forma canonica di raggiungibilità avrà quindi le seguenti matrici:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4.4536 & 31.1818 & -0.1818 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- ➔ La matrice di trasformazione dello stato si può ottenere come: $T = P\hat{P}^{-1}$ nella quale P è la matrice di raggiungibilità del sistema di partenza e \hat{P} quella del sistema in forma canonica, calcolabile in modo esplicito in quanto le matrici \hat{A} e \hat{B} della forma canonica sono appunto note a priori



Pendolo inverso su carrello: controllo stato-ingresso-6

- ➔ Il progetto della retroazione stato-ingresso è agevolato dalla struttura canonica, in quanto:

$$\hat{A} + \hat{B}\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hat{h}_1 & \hat{h}_2 + 0.4536 & \hat{h}_3 + 31.1818 & \hat{h}_4 - 0.1818 \end{bmatrix}$$

- ➔ I parametri di \hat{H} sono calcolabili una volta fissati gli autovalori desiderati e, di conseguenza, i relativi coefficienti del nuovo polinomio caratteristico
- ➔ **N.B.:** la matrice di retroazione per lo stato originale è

$$H = \hat{H}T^{-1}$$



Pendolo inverso su carrello: controllo stato-ingresso-7

- Essendo il sistema completamente osservabile, anche gli autovalori dell'osservatore ad anello chiuso:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(C\hat{x}(t) - y(t))$$

possono essere assegnati arbitrariamente

- Il progetto dell'osservatore risulta agevolato, per il calcolo della matrice di guadagno K , utilizzando la **forma canonica di osservabilità**, avente matrici A e C del tipo:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ & & & -a_1 \\ & I_{(n-1) \times (n-1)} & & \vdots \\ & & & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \hat{C} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]$$



Pendolo inverso su carrello: controllo stato-ingresso-8

- Nella colonna n -esima della nuova matrice \hat{A} vi sono sempre i coefficienti del polinomio caratteristico di A (cambiati di segno)
- La matrice di trasformazione per passare alla forma canonica è $T = Q^{-1}\hat{Q}$, con Q matrice di osservabilità del sistema originario e \hat{Q} quella del sistema in forma canonica, calcolabile a priori note \hat{A} e \hat{C}
- Gli autovalori dell'osservatore saranno quelli della matrice

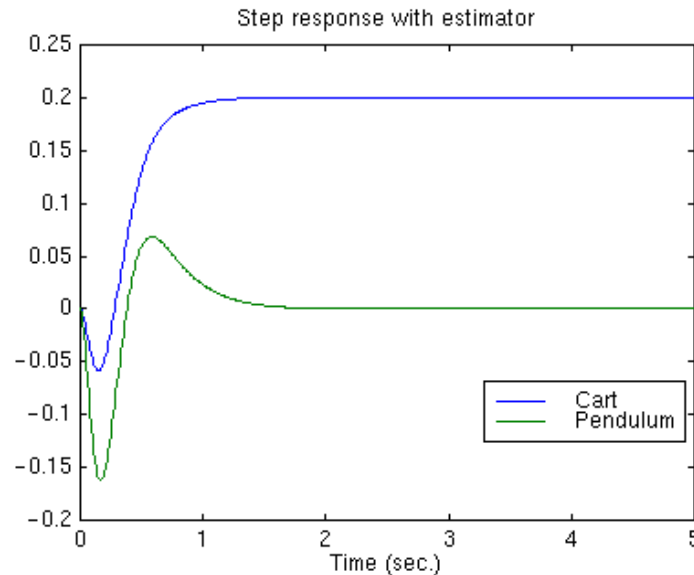
$$\hat{A} + \hat{K}\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \hat{k}_1 - a_0 \\ & & & \hat{k}_2 - a_1 \\ & I_{(n-1) \times (n-1)} & & \vdots \\ & & & \hat{k}_n - a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \boxed{K = T\hat{K}}$$

Retroazione per lo stato originario



Pendolo inverso su carrello: controllo stato-ingresso-9

- Sfruttando adeguatamente i progetti separati di retroazione dello stato e di osservatore dello stato, si può usare lo stato stimato nella retroazione con buoni risultati



ESEMPI APPLICATIVI

- Testina di lettura di un hard-disk
- Pendolo inverso su carrello

FINE

