



# Fondamenti di Automatica

## Regolatori PID

Dott. Ing. Marcello Bonfè

Dipartimento di Ingegneria - Università di Ferrara

Tel. +39 0532 974839

E-mail: [marcello.bonfe@unife.it](mailto:marcello.bonfe@unife.it)



## Regolatori PID CENNI STORICI



## PID: il *best-seller* dei regolatori

- *Da una indagine su 11.000 applicazioni industriali [...] , il 97% dei controllori impiegati risulta essere di tipo PID*  
(L. Desborough – R. Miller, Int.Conf. Chemical Process Control, 2002)
- La struttura dei regolatori **PID** è basata sulla combinazione di tre termini base: **P**roporzionale, **I**ntegrale e **D**erivativo
- Il successo della struttura PID è motivato da:
  - **versatilità**: è applicabile per sistemi da controllare con dinamica del primo o secondo ordine (approx.)
  - **semplicità**: richiede la taratura, anche empirica, di tre soli parametri
  - **realizzazione**: la dinamica di tipo PID può essere ottenuta con circuiti elettronici analogici o digitali, sistemi pneumatici o meccanici, ecc.



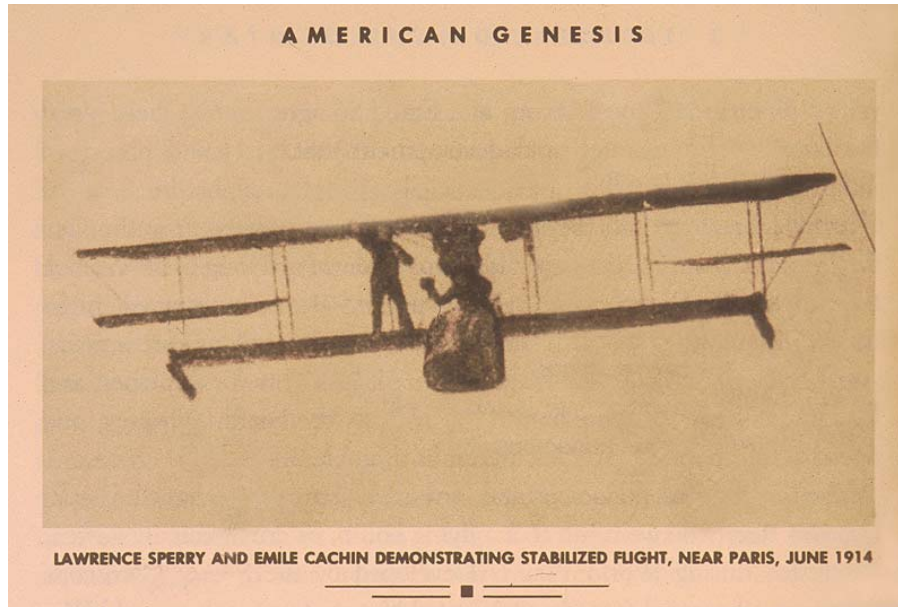
## PID: *the early years*

- Gli studi di J.C. Maxwell (1868) sulla stabilità del regolatore centrifugo di J. Watt presentano le prime intuizioni sulle conseguenze di un effetto integrativo nel feedback, in termini di comportamento a regime (annullamento dell'errore)
- Il primo PID definito tale in modo esplicito è progettato da Elmer A. Sperry (1911), nel corso dei suoi studi sulla stabilizzazione autonoma della rotta per navi mercantili e militari (prima installazione: corazzata USS *Delaware*, BB-28)
- E.A. Sperry sviluppò contemporaneamente il giroscopio e la bussola giroscopica come strumenti di navigazione (i cui brevetti furono oggetto di una disputa con il tedesco H. Anschütz-Kaempfe, sulla quale intervenne anche Albert Einstein, all'epoca impiegato presso l'ufficio brevetti di Berna, Svizzera)



## PID: *the early years* - 1

- Il figlio di E.A. Sperry, Lawrence, dimostrò per primo l'uso del giroscopio per la stabilizzazione automatica dell'assetto di un aereo (1914)



pag. 5

Fondamenti di Automatica – 3.3 Regolatori PID



## PID: *the early years* - 2

- Il primo articolo scientifico sull'analisi del controllo PID per la navigazione autonoma di navi è pubblicato nel **1922** dall'ingegnere americano (nato in Russia) Nicolas Minorsky (progettista dell'autopilota per la USS *New Mexico*, BB-40)
- Il primo rapporto tecnico che descrive metodi di taratura per controllori PD per una classe di sistemi da controllare è pubblicato da Albert Callander, della Imperial Chemical Industries, nel **1934**, poi esteso nei rapporti del 1935-6-7 a controllori PI e PID
- Lo storico articolo di J.G. Ziegler e N.B. Nichols sui metodi di taratura dei PID, ancora oggi i più citati nei testi di tutto il mondo e tra i più usati nella pratica, è del **1942**

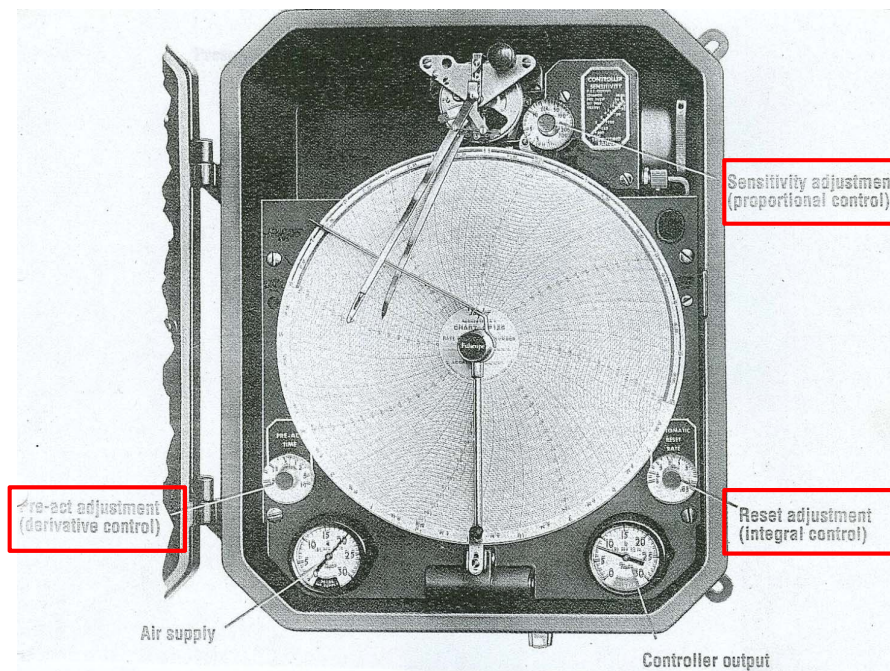
pag. 6

Fondamenti di Automatica – 3.3 Regolatori PID



## PID: the early years - 3

- **PID pneumatico: Taylor Instruments *Fulscope 100*** (1939), si notino i tre pomelli di regolazione e la loro denominazione!



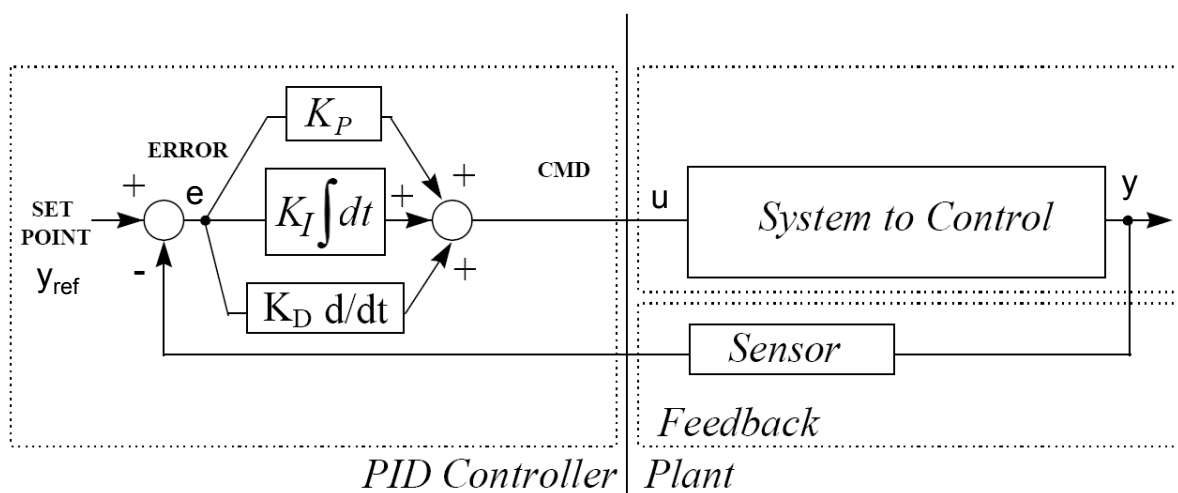
pag. 7

Fondamenti di Automatica – 3.3 Regolatori PID



## PID: intuizioni... dalla pratica alla teoria

- Il regolatore PID nasce quindi prima della teoria del controllo (almeno di quella oggi diffusa), **MA** dopo la diffusione del concetto di feedback



pag. 8

Fondamenti di Automatica – 3.3 Regolatori PID



## PID: intuizioni... dalla pratica alla teoria - 1

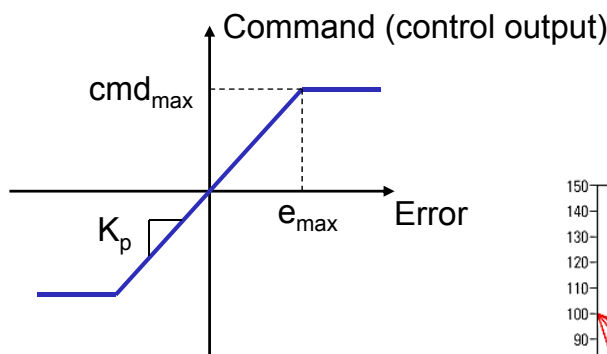
- Il termine proporzionale è la base del feedback: se c'è *differenza (errore) tra uscita desiderata e misurata, agisci sul comando con intensità proporzionale a tale differenza!*
- Poiché il *comando* di un sistema fisico è normalmente compreso tra due valori estremi (saturazione), un metodo per tararne la proporzionalità rispetto all'errore è quello di specificare il valore massimo di quest'ultimo cui deve corrispondere il valore massimo del comando
- Ciò corrisponde a definire una banda proporzionale (**Proportional Band**) in percentuale, ancora oggi un termine tecnico usato nell'industria per specificare il guadagno dell'elemento P di un regolatore PID:

$$PB = (\text{errore}_{\max} / \text{cmd}_{\max}) * 100$$

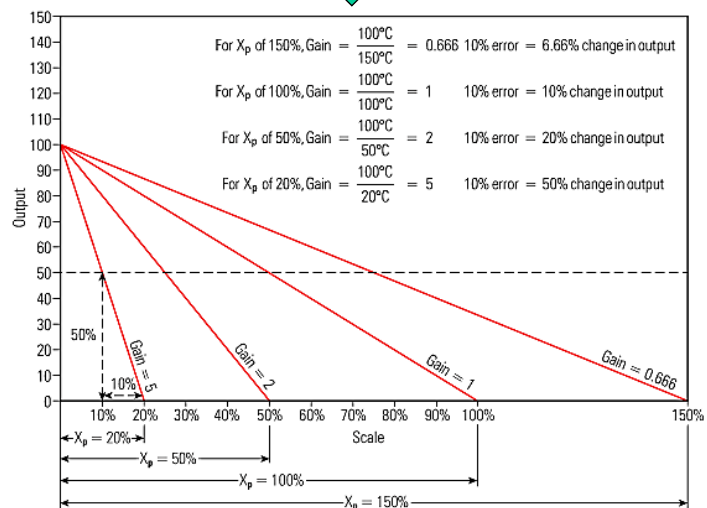


## PID: intuizioni... dalla pratica alla teoria - 2

- Proportional Band (%) e guadagno  $K_p$ :



$$PB = (1 / K_p) * 100$$

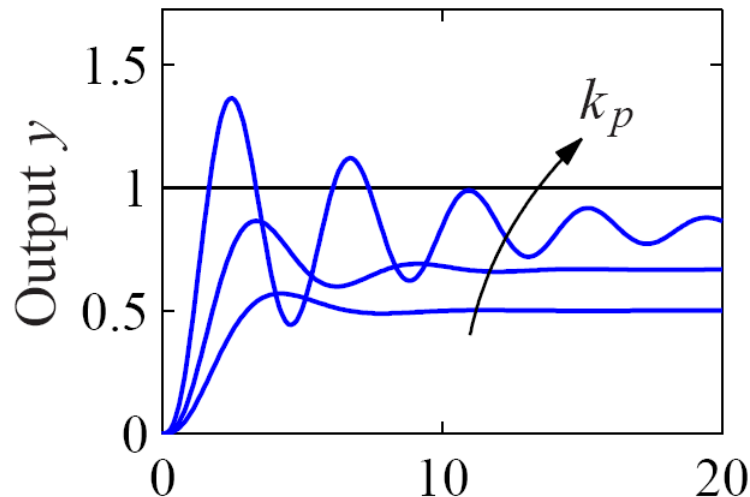


Più è alto il guadagno proporzionale più è stretta la banda percentuale attorno al set-point nella quale il regolatore non satura l'uscita



## PID: intuizioni... dalla pratica alla teoria - 3

- Il **controllo proporzionale** non può sempre garantire che a regime si abbia un errore nullo rispetto al set-point
- Se c'è un errore non nullo a regime, lo si può ridurre aumentando il  $K_p$ , ma anche le oscillazioni nella risposta:



## PID: intuizioni... dalla pratica alla teoria - 4

- Il controllo proporzionale potrebbe essere modificato aggiungendo una costante (termine di *feedforward*), al fine di annullare l'errore a regime:

$$CMD = u(t) = K_p e(t) + u_{ff}$$

- Conoscendo il guadagno statico  $G(0)$  del sistema da controllare, la costante aggiuntiva dovrebbe essere tarata in base al set-point  $y_{ref}$ :

$$u_{ff} = \frac{y_{ref}}{G(0)}$$

- Questa costante è efficace fintanto che non ci sono disturbi sul sistema da controllare e, in tal caso, andrebbe modificata manualmente
- Tale procedura è anche detta **reset manuale** dell'errore



## PID: intuizioni... dalla pratica alla teoria - 5

- Per compensare l'errore a regime, si può facilmente osservare che modificando la funzione di controllo con un **termine integrale**:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau$$

risulta impossibile che l'errore a regime sia diverso da 0

- Ipotizzando che il sistema in retroazione sia stabile in un punto di equilibrio, in tale equilibrio si avrebbe:

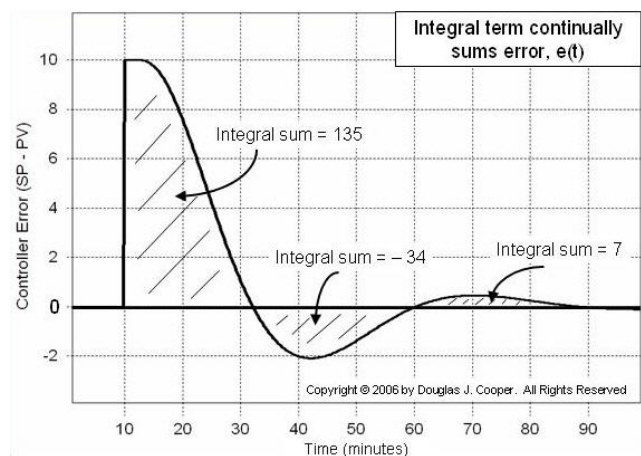
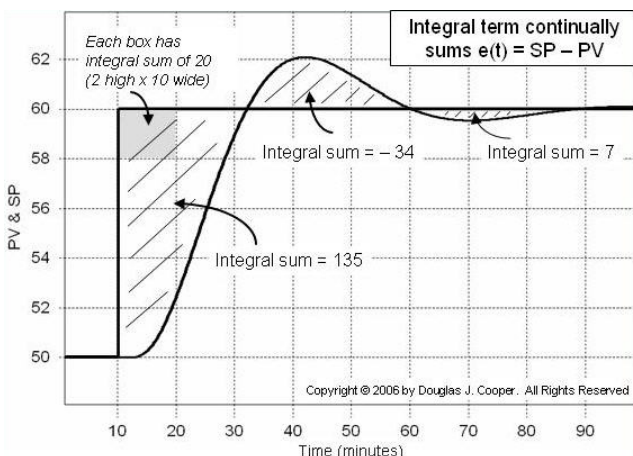
$$u_0 = K_p e_0 + K_i e_0 t$$

- Ciò è ovviamente **una contraddizione**, a meno che non sia  $e_0 = 0$  (oppure  $K_i = 0!$ )



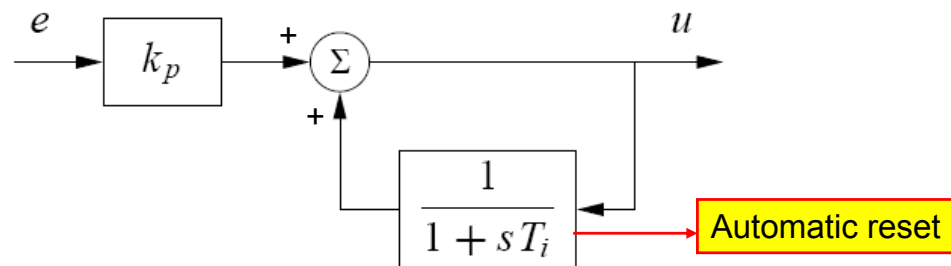
## PID: intuizioni... dalla pratica alla teoria - 6

- **N.B.:** l'effetto dell'integrale NON dipende da ipotesi sulla linearità del sistema o sull'assenza di disturbi, ma solo dall'ipotesi di esistenza di un punto di equilibrio stabile
- Il valore di regime dell'integratore corrisponde al valore della costante aggiuntiva  $u_{ff}$  vista in precedenza



## PID: intuizioni... dalla pratica alla teoria - 7

- Il termine integrale introdotto nei primi regolatori PID veniva definito **reset automatico** e implementato come:



- Con questo schema, la funzione di trasferimento del controllore diventa:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \frac{1 + sT_i}{sT_i} = K_p \left( 1 + \frac{1}{sT_i} \right) = K_p + \frac{K_p}{sT_i}$$



## PID: intuizioni... dalla pratica alla teoria - 8

- Il dispositivo di **reset automatico** è quindi un filtro del primo ordine che retroaziona l'uscita stessa del controllore
- La costante di tempo  $T_i$  del filtro determina il tempo di assestamento con cui avviene il reset dell'errore
- Più grande è la costante  $T_i$ , più è lenta l'azione di reset
- Più è piccola questa costante, più è rapido il reset
- Il guadagno integrale  $K_i$ , nel regolatore PI con struttura più intuitiva, è infatti:

$$K_i = \frac{K_p}{T_i}$$

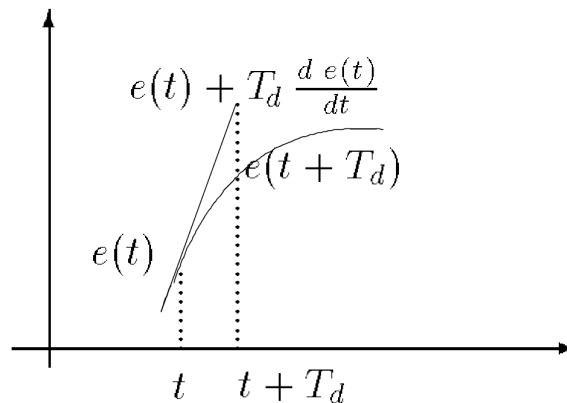
cioè tanto più elevato quanto più piccola è  $T_i$





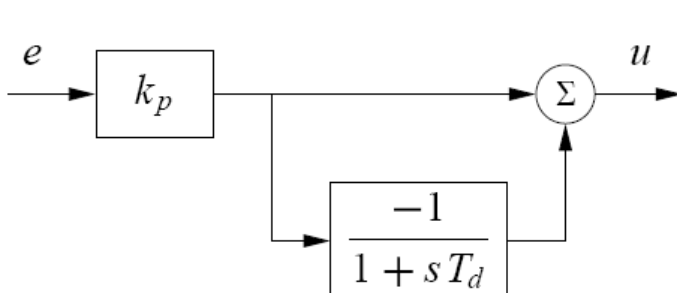
## PID: intuizioni... dalla pratica alla teoria - 9

- Il **termine derivativo** venne introdotto nei primi regolatori PID al fine di fornire un effetto anticipativo rispetto alle variazioni dell'errore
- La derivata dell'errore permette infatti di prevederne, qualitativamente, l'andamento futuro



## PID: intuizioni... dalla pratica alla teoria - 10

- La costante di tempo  $T_d$  definisce l'orizzonte temporale di previsione: se troppo piccola non fornisce un buon effetto anticipativo, se troppo grande può fornire una previsione completamente sballata
- La **realizzazione fisica** della derivata può essere ottenuta come differenza tra l'errore e l'errore filtrato con un filtro del primo ordine:



$$G_c(s) = K_p \left( 1 - \frac{1}{1 + sT_d} \right)$$

$$= K_p \frac{sT_d}{1 + sT_d}$$



## Regolatori PID FORMULAZIONE



### Formulazione del regolatore PID

- Per i motivi storici esposti in precedenza la formula *classica* (o *standard*) del controllore PID è:

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

- $K_p$  = guadagno proporzionale
  - $T_i$  = costante di tempo di integrazione (o di reset)
  - $T_d$  = costante di tempo di azione derivativa
- **Funzione di trasferimento ideale:**

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = K_p \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s}$$



## Formulazione del regolatore PID - 1

- ▶ Ipotizzando  $T_i \geq 0$ ,  $T_d \geq 0$ 
  - 1 polo nell'origine, 2 zeri a parte reale negativa
  - gli zeri sono reali se  $T_i \geq 4T_d$
  - **FdT impropria, non fisicamente realizzabile**
- ▶ Al fine di garantire la realizzabilità fisica, è ovviamente necessario modificare il termine derivativo:

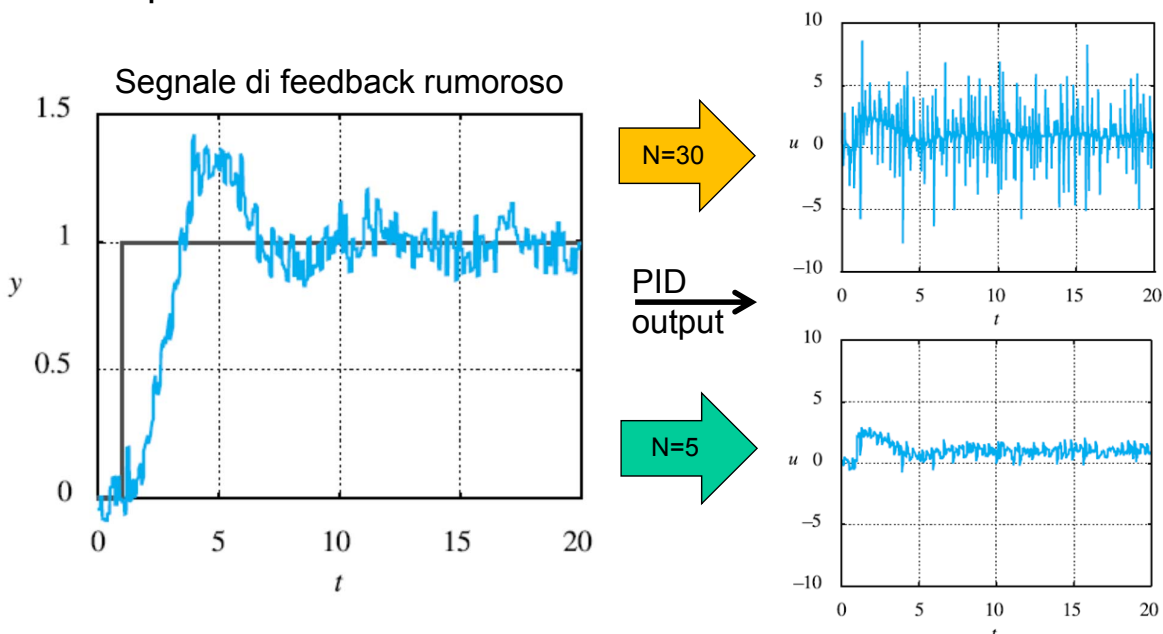
$$T_d s \quad \longrightarrow \quad \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s}$$

- ▶ Ponendo N sufficientemente grande ( $5 \div 20$ ), si può ipotizzare che il polo aggiuntivo sia posizionato ad una pulsazione molto maggiore di quelle di interesse per il controllo (banda passante del sistema in retroazione)



## Formulazione del regolatore PID - 2

- ▶ Il polo aggiuntivo in  $p_d = -N/T_d$  introduce anche una azione filtrante (regolabile) sul termine derivativo, il quale tende ad amplificare i rumori di misura nel feedback



## Formulazione del regolatore PID - 3

- **N.B.:** per la maggior parte delle considerazioni sulla taratura dei PID si può considerare il polo aggiuntivo (sempre presente nella realizzazione fisica) del termine derivativo ininfluenza, pertanto nel seguito si farà riferimento prevalentemente alla forma ideale
- I parametri della forma classica (ideale) sono interpretabili fisicamente come già descritto:
  - $T_i$  = tempo di reset automatico dell'errore
  - $T_d$  = orizzonte di tempo della previsione sull'errore
- Dal punto di vista analitico, è però più semplice ricondurre la formulazione ad una in cui sia esplicito il guadagno associato a ciascuno dei tre termini



## Formulazione del regolatore PID - 4

- Formula *parallela* (ideale):

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

- Funzione di trasferimento:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

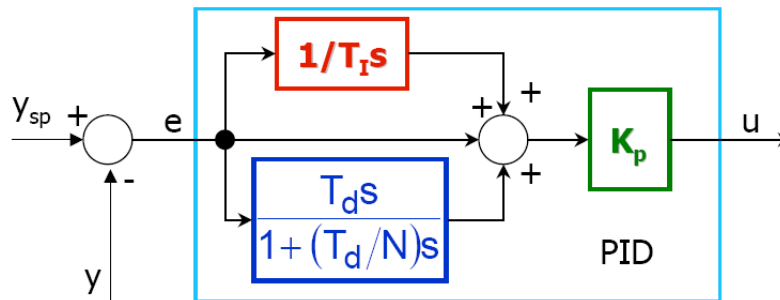
- Relazione tra guadagni e parametri della forma classica:

$$K_i = \frac{K_p}{T_i}, \quad K_d = K_p T_d$$

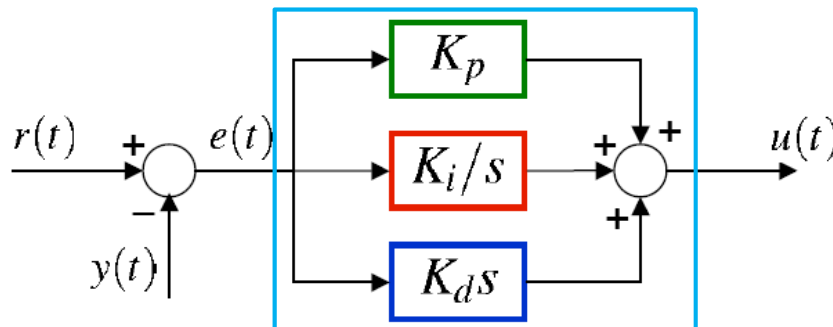


## Formulazione del regolatore PID - 5

- Diagramma a blocchi della forma *classica* (reale):

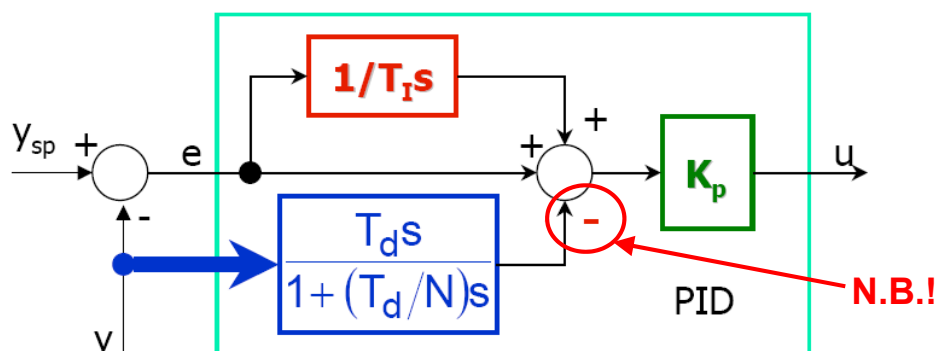


- Diagramma a blocchi della forma *parallela* (ideale):



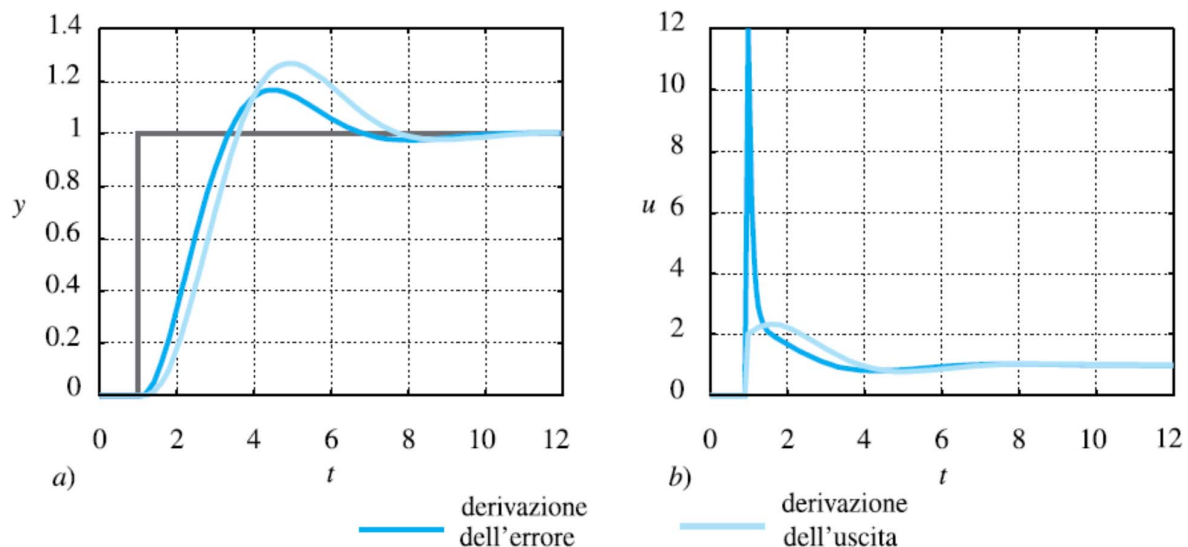
## Formulazione del regolatore PID - 6

- Nelle applicazioni pratiche in cui il set-point sia soggetto ad improvvise (discontinue) variazioni, si preferisce porre in ingresso al termine derivativo il segnale di feedback, anziché quello dell'errore
- Ipotizzando infatti che il *plant* abbia una banda passante limitata (azione filtrante), il segnale di feedback è esente da tali discontinuità:



## Formulazione del regolatore PID - 7

- ➡ Effetto della modifica sul termine derivativo:



## Formulazione del regolatore PID - 8

- ➡ In molte realizzazioni fisiche, sia basate su circuiti elettronici che su strutture pneumatiche, è più facile realizzare sistemi contenenti le sole azioni PI e PD
- ➡ Per tale motivo, è molto diffusa la formulazione PID costituita da un regolatore PI in *serie* con un PD (detta anche forma *interagente*):

$$G_c(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) (1 + \tau_d s) = K_c \frac{(1 + \tau_i s)(1 + \tau_d s)}{\tau_i s}$$

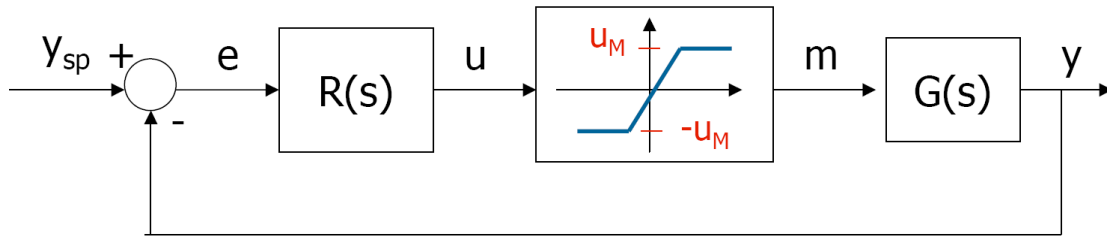
- ➡ Relazione con i parametri della forma *classica*:

$$K_p = K_c \alpha, \quad T_i = \tau_i \alpha, \quad T_d = \frac{\tau_d}{\alpha}, \quad \alpha = 1 + \frac{\tau_d}{\tau_i}$$



## Formulazione del regolatore PID - 9

- In **TUTTE** le realizzazioni fisiche, il dispositivo attuatore del segnale di controllo ha dei limiti di saturazione:

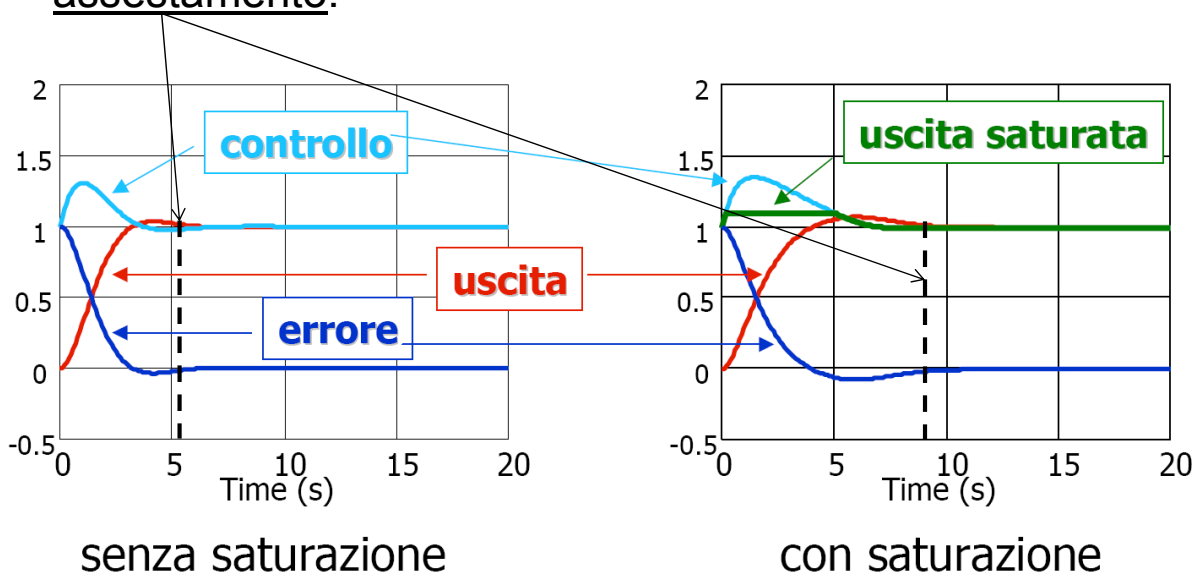


- Nella condizione di saturazione dell'attuatore l'ingresso al *plant* è inferiore al segnale di controllo ideale e la risposta effettiva del plant risulta rallentata rispetto a quella teorica
- Pertanto, l'errore di inseguimento del set-point diminuisce più lentamente e se nel regolatore è presente un **termine integrale**, questo **si carica in modo eccessivo**



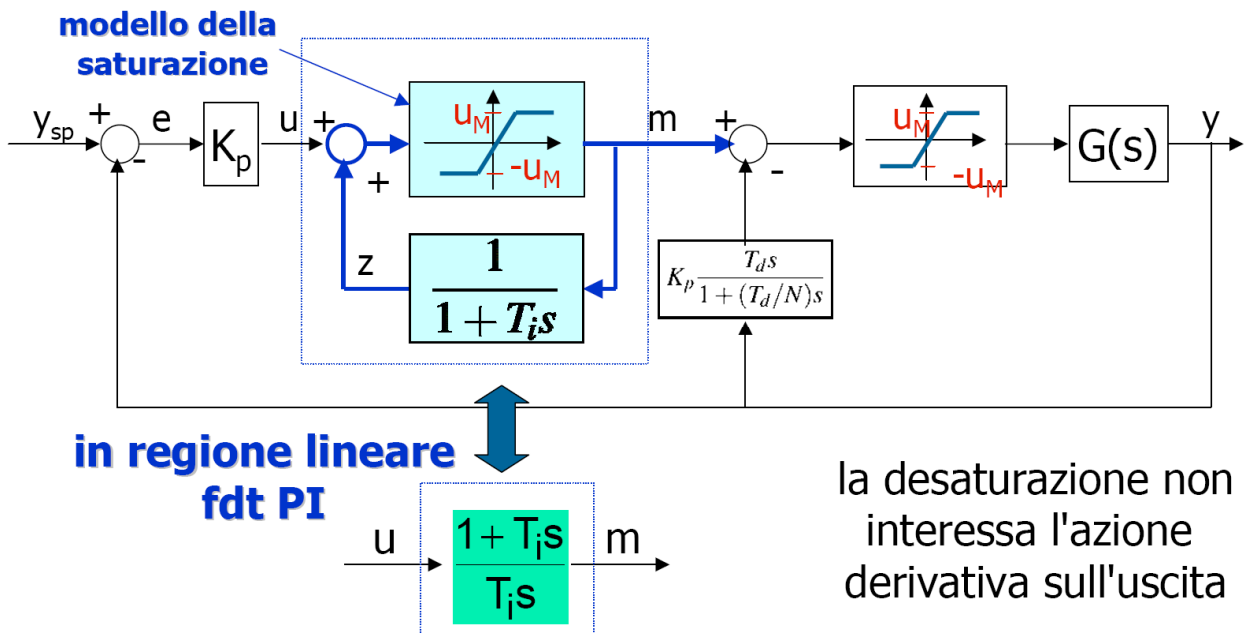
## Formulazione del regolatore PID - 10

- Gli effetti deleteri del caricamento (**wind-up**) eccessivo dell'integratore sono una sovranelongazione maggiore del previsto e un conseguente incremento del tempo di assestamento:



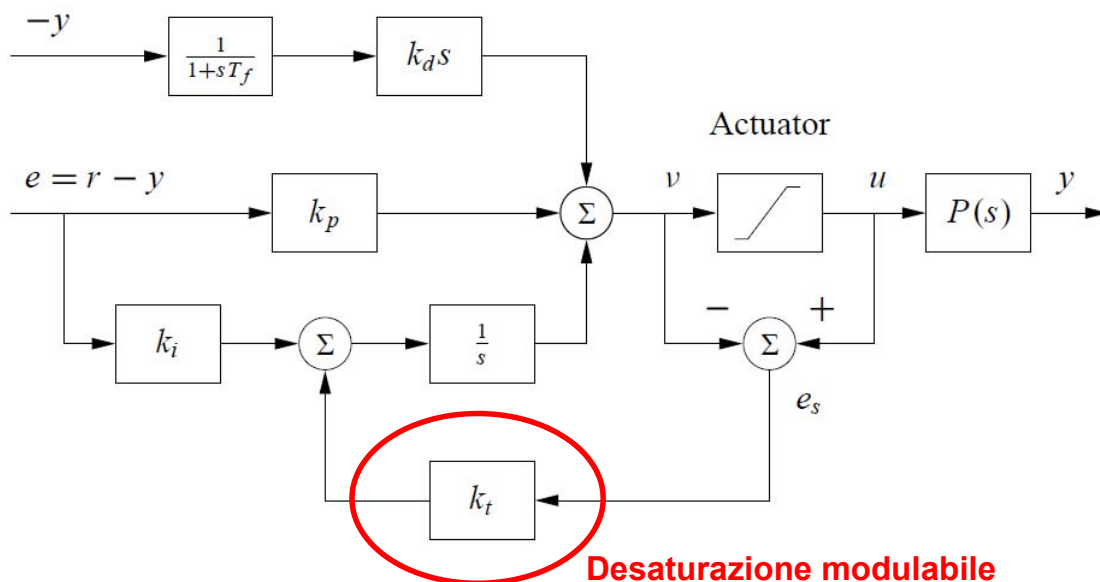
## Formulazione del regolatore PID - 11

- Possibile schema **anti wind-up** (con implementazione dell'integratore tipo *automatic reset*):



## Formulazione del regolatore PID - 11

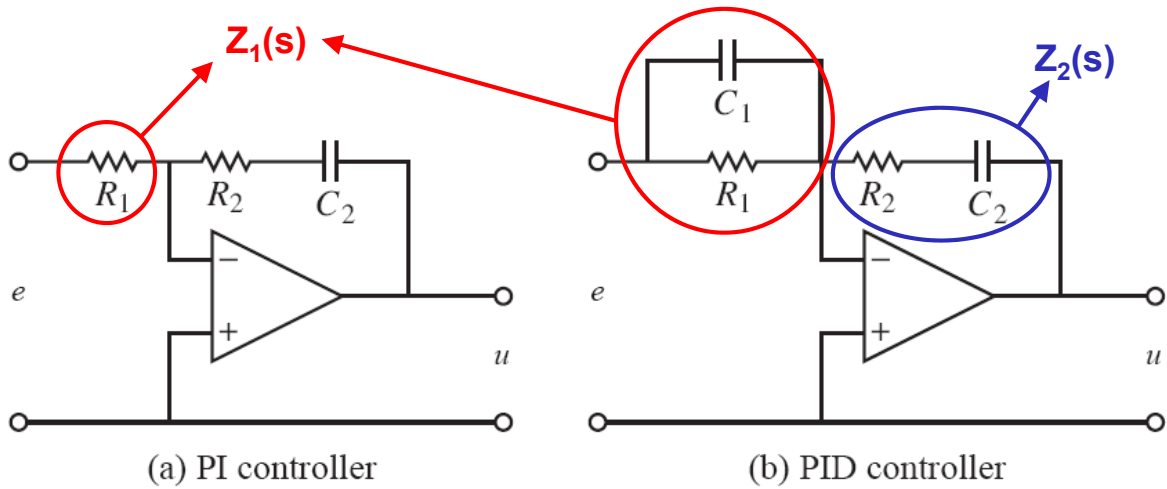
- Altro possibile schema di **anti wind-up** (con azione di desaturazione modulabile tramite il guadagno  $k_t$ ):





# Realizzazioni fisiche dei PID

► Realizzazione con circuiti elettronici analogici:

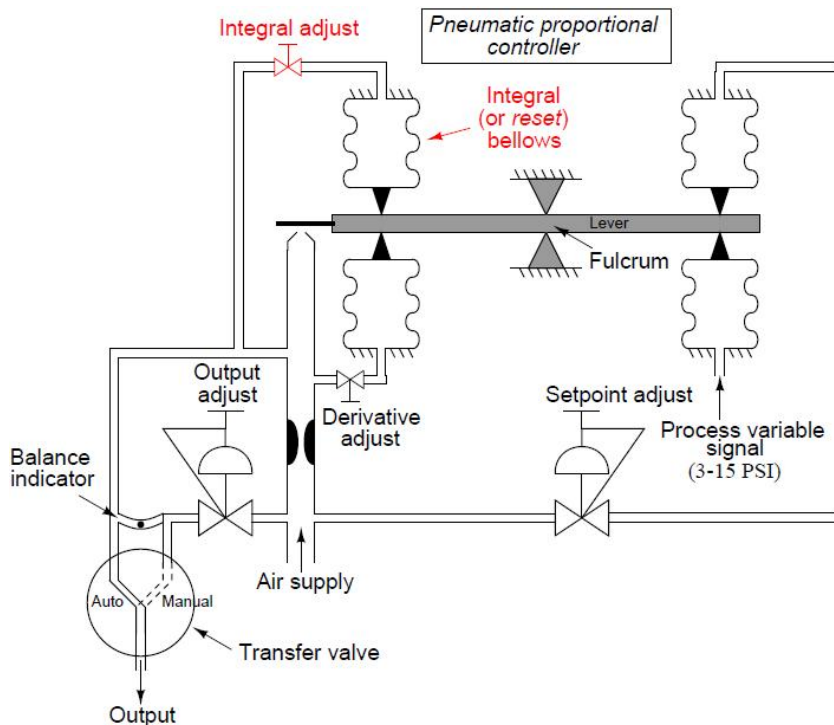


$$G_c(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -\frac{R_2 (1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s)}{R_1 R_2 C_2 s} \quad (\text{PI} \rightarrow C_1=0)$$



# Realizzazioni fisiche dei PID - 1

► Realizzazione con circuiti pneumatici:



## Realizzazioni fisiche dei PID - 2

- Realizzazione software (controllore *digitale*, tempo discreto):

```
/* PID - main loop with 'h' sampling time */
while (running) {
    r = get_in(ch1); // read setpoint from ch1
    y = get_in(ch2); // read process variable from ch2
    P = Kp*(r-y); // compute proportional part
    D = Kd*(y-yold)/h; // update derivative part
    v = P+I+D; // compute temporary output
    u = sat(v,ulow,uhigh); //simulate actuator saturation
    set_out(ch1,u); // set output ch1
    /* update integral with anti wind-up! */
    I = I+Ki*(r-y)*h+Kt*(u-v)*h; // Kt = desaturation gain
    yold = y; // update old process output
    sleep(h); // wait 'h' sec. until next update
}
```



## Regolatori PID ANALISI DELLE FDT



# Regolatori PID e progetto con diagrammi di Bode

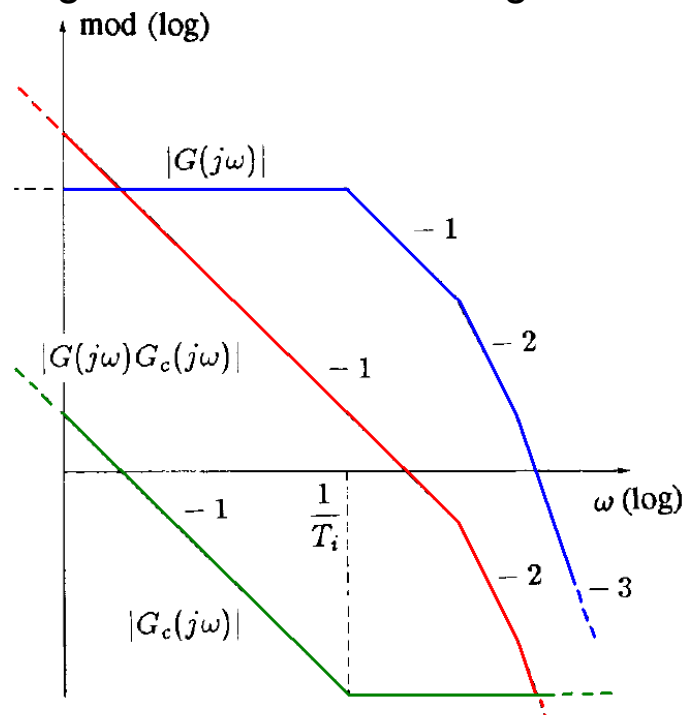
- Regolatore **P**: il contributo più semplice, l'effetto di una modifica del guadagno è una traslazione in verticale dell'intero diagramma del modulo
- Regolatore **I**: introducendo un polo nell'origine, aumenta di 20 dB/decade la pendenza su tutto il diagramma del modulo e introduce un ritardo di fase di 90° su tutto il diagramma delle fasi
- Regolatore **PI**:  $G_c(s) = K_p \frac{1 + sT_i}{sT_i}$

corrisponde in sostanza ad una rete ritardatrice con lo zero in  $z_i = -1/T_i$  e il polo nell'origine. Quest'ultimo ha ovvi benefici sull'errore a regime, ma riduce anche la banda passante



# Regolatori PID e progetto con diagrammi di Bode - 1

- Effetto sul diagramma di Bode del regolatore **PI**:



## Regolatori PID e progetto con diagrammi di Bode - 2

► Regolatore **PD**: 
$$G_c(s) = K_p \frac{1 + sT_d}{1 + s\frac{T_d}{N}}$$

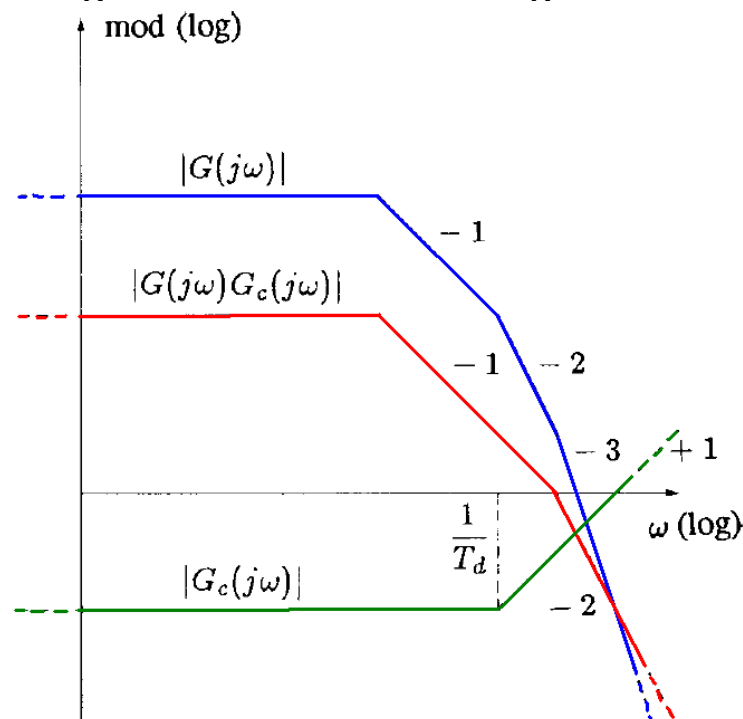
corrisponde in sostanza ad una rete anticipatrice con lo zero in  $z_i = -1/T_d$  e il polo a pulsazione molto elevata. L'effetto benefico è quindi legato all'anticipo di fase, che permette di aumentare (in generale) la banda passante

- Ovviamente è utilizzabile se il sistema da controllare è già di per sé di tipo 1 (almeno), se non si vuole avere errore a regime non nullo



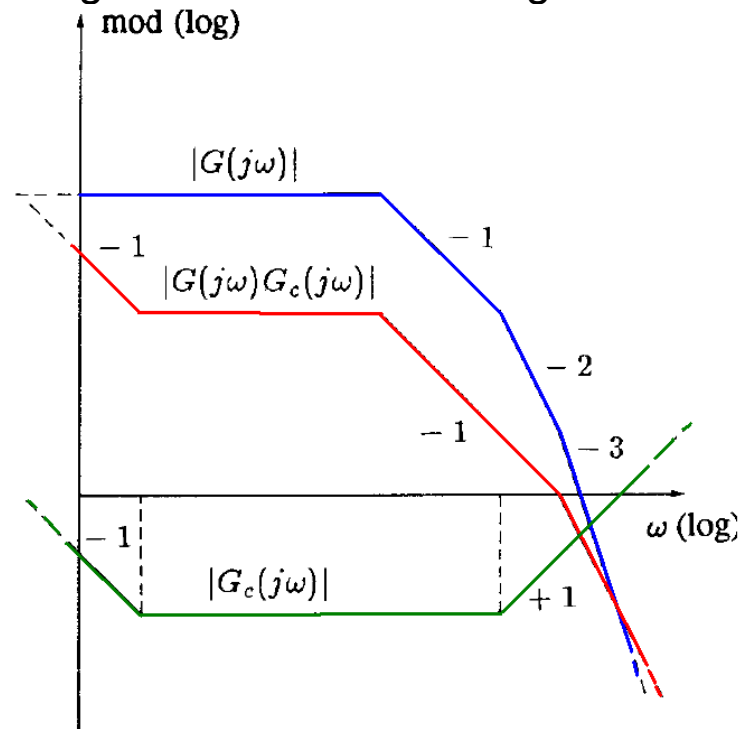
## Regolatori PID e progetto con diagrammi di Bode - 3

- Effetto sul diagramma di Bode del regolatore **PD**:

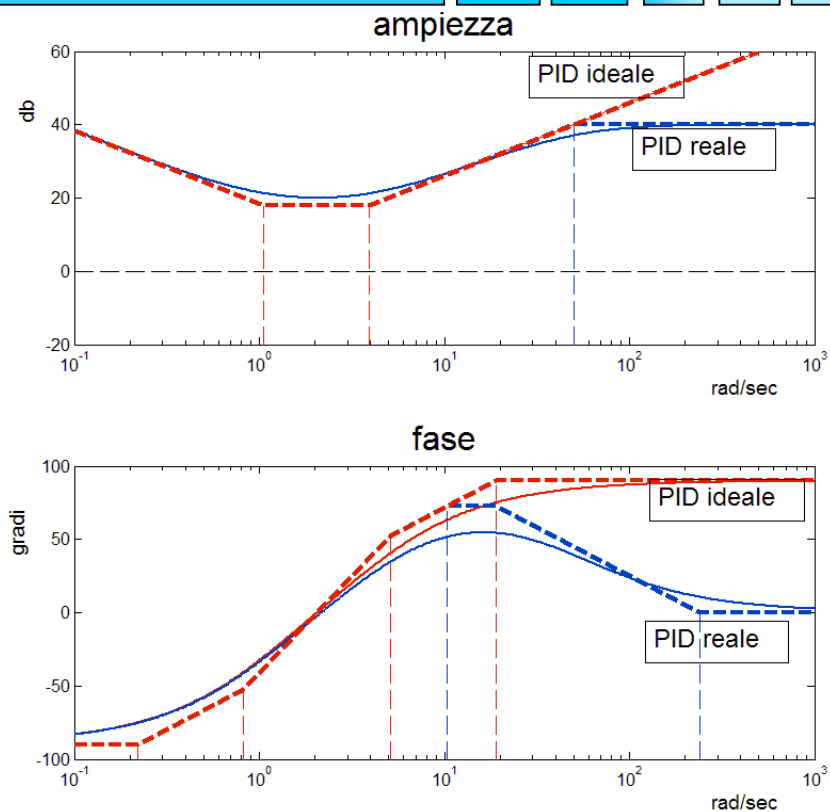


# Regolatori PID e progetto con diagrammi di Bode - 4

## Effetto sul diagramma di Bode del regolatore **PID completo**

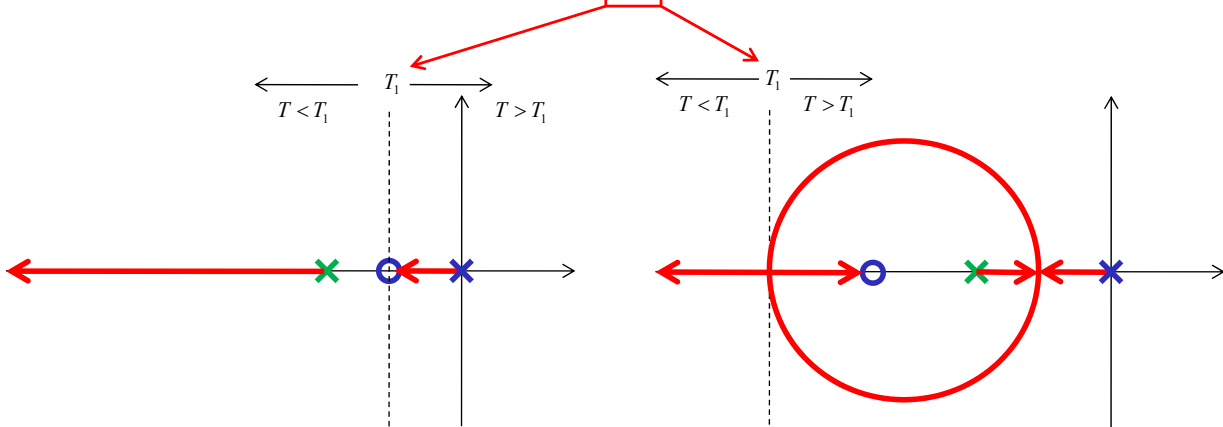


## Diagramma di Bode del PID reale (vs. ideale)



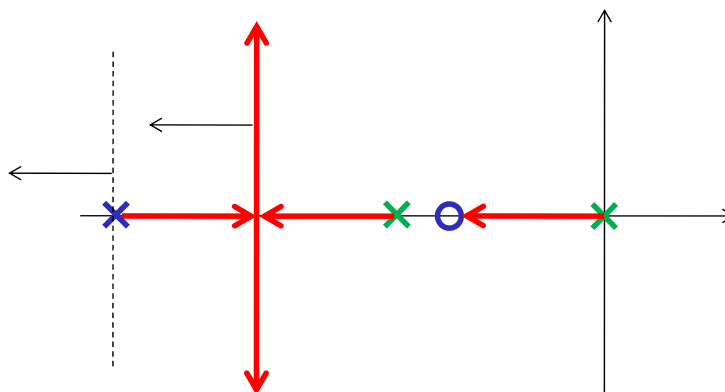
# Regolatori PID e progetto con il luogo delle radici

- Il regolatore **PI** introduce uno zero e un polo nell'origine
- Con un *plant* del primo o del secondo ordine, lo zero introdotto dal regolatore pone un limite al tempo di assestamento che può essere ottenuto dal sistema in retroazione, non inferiore a  $T_1$  (**X/O**: plant, **X/O**: PI)



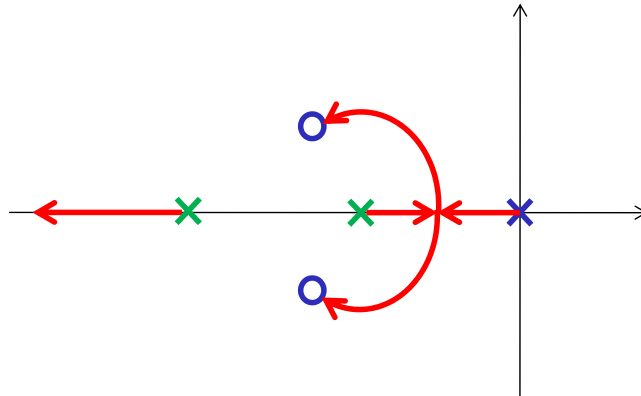
# Regolatori PID e progetto con il luogo delle radici - 1

- Il regolatore **PD** ha uno zero e un polo per *realizzabilità*
- Lo zero del regolatore fissa ancora il tempo di assestamento, se il polo del PD può essere allontanato a piacere dall'asse reale: ciò infatti allontana anche la diramazione del luogo (**X/O**: plant, **X/O**: PD)



## Regolatori PID e progetto con il luogo delle radici - 2

- Il regolatore **PID** (ideale) ha un polo nullo e due zeri:
  - zeri **reali** se  $T_i \geq 4 T_d$ , **complessi** se  $T_i < 4 T_d$
  - zeri **coincidenti** (in  $z_{1,2} = -1/2 T_d$ ) se  $T_i = 4 T_d$
- Una possibile scelta di progetto è quella di inserire zeri complessi con il PID per rispettare specifiche su tempo di assestamento e sovraelongazione (**X/O**: plant, **X/O**: PID)



## Regolatori PID METODI DI TARATURA



## Taratura con metodi empirici

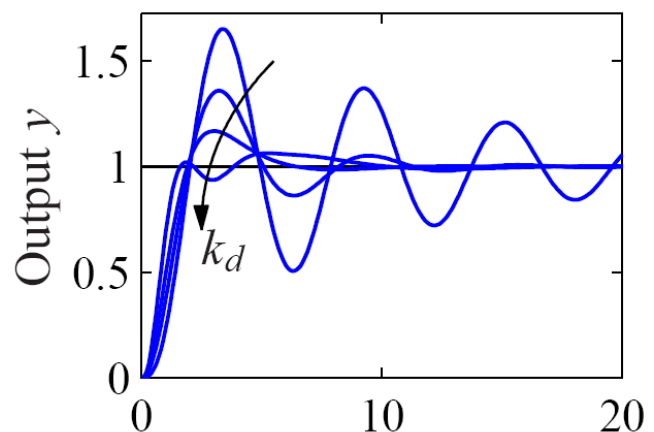
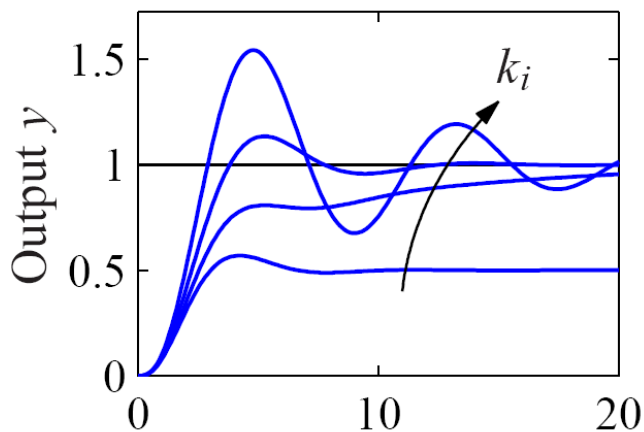
► Regole indicative per la taratura manuale del PID:

Parametro (aumenta)	Prontezza di risposta	Sovra-Elongazione	Tempo di assestamento	Errore a regime	Stabilità (margini)
$K_p$	Aumenta	Aumenta	Diminuisce (poco)	Diminuisce	Peggiora
$K_i$	Aumenta	Aumenta	Aumenta	Si annulla	Peggiora
$K_d$	Aumenta (poco)	Diminuisce	Diminuisce (poco)	Non cambia	Migliora



## Taratura con metodi empirici

► Effetto delle azioni integrale e derivativa:





## Taratura con metodi empirici - 1

- Procedura qualitativa per la taratura del PID:
  1. Impostare  $K_i$  e  $K_d$  a zero
  2. Aumentare gradualmente  $K_p$  fino a quando le oscillazioni nella risposta diventano persistenti
  3. Diminuire  $K_p$  del 40%
  4. Aumentare  $K_i$  fino ad ottenere l'annullamento dell'errore in tempi sufficientemente rapidi
  5. Aumentare  $K_d$  (se necessario) per ridurre la sovraelongazione nella risposta



## Taratura con metodi semi-empirici

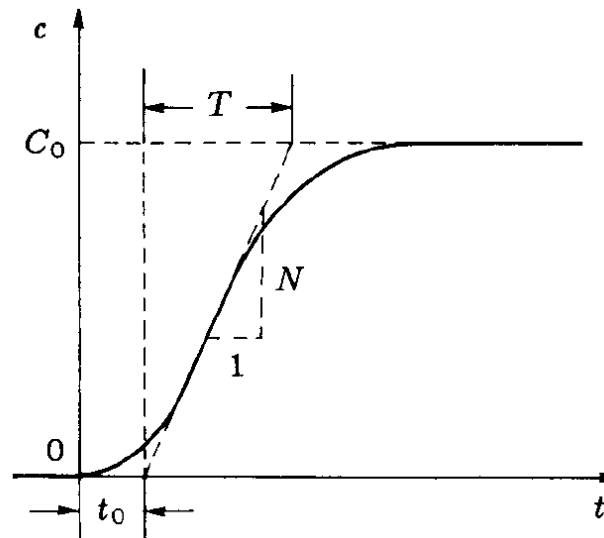
- Tra i metodi di taratura più diffusi nella pratica, soprattutto per processi industriali chimici, è d'obbligo citare quelli sviluppati da Ziegler e Nichols (Z-N) nel 1942
  - Metodo del **test ad anello aperto**
  - Metodo dell'**oscillazione critica ad anello chiuso**
- Sebbene ampiamente noti e relativamente facili da applicare, i metodi di Z-N determinano una taratura dei regolatori PID con la quale il sistema in retroazione ha una modesta prontezza di risposta, una (solo) discreta robustezza rispetto ai disturbi e una sovraelongazione di circa il 30% (smorzamento = 0.25)
- Per molte applicazioni industriali *moderne*, tali prestazioni non sono accettabili



## Taratura con metodi semi-empirici - 1

### ► Metodo di Z-N del **test ad anello aperto**:

1. Si analizza la risposta del *plant* ad un gradino del segnale di controllo:



## Taratura con metodi semi-empirici - 2

### ► Metodo di Z-N del **test ad anello aperto**:

2. Dai dati ottenuti si determina un modello equivalente del primo ordine con ritardo puro:

$$G(s) \simeq \frac{K e^{-t_0 s}}{1 + T s}$$

- $t_0$ : tempo di ritardo
- $T$ : costante di tempo
- $N = C_0 / T$ : velocità di risposta
- $K = C_0 / M_0$ : guadagno statico
- $M_0$ : ampiezza del gradino in ingresso



## Taratura con metodi semi-empirici - 3

➤ Metodo di Z-N del **test ad anello aperto**:

3. Si determinano i guadagni del regolatore in base alle tabelle (**N.B.:** per la formulazione *classica* del PID):

TIPO	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$T / (K t_0)$	-	-
PI	$0.9 T / (K t_0)$	$3 t_0$	-
PID	$1.2 T / (K t_0)$	$2 t_0$	$0.5 t_0$



## Taratura con metodi semi-empirici - 4

- Esistono molte soluzioni migliorative per il metodo di Z-N del test ad anello aperto, in particolare sulle tabelle di taratura (v. tabelle di Cohen-Coon, ...)
- Tra queste è utile citare quelle proposte da K.J.Astrom-T.Hagglund nel testo *Advanced PID Control*, qui indicate per la sola struttura PI (**N.B.:** con formula *parallela*):

TIPO	$K_p$	$K_i$
PI	$(0.15 t_0 + 0.35 T) / (K t_0)$	$(0.46 t_0 + 0.02 T) / (K t_0^2)$



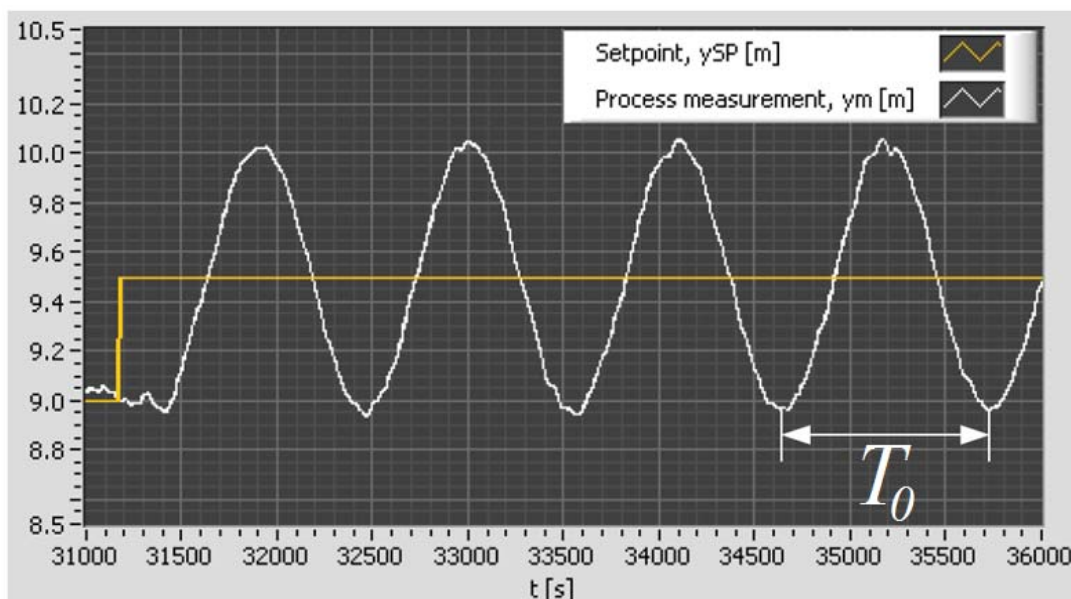
## Taratura con metodi semi-empirici - 5

- Svantaggi del primo metodo proposto da Z-N:
  - applicabile solo se il *plant* è stabile ad anello aperto
  - difficoltà pratica nel calcolo dei parametri della risposta
- Con il metodo di Z-N dell'**oscillazione critica** gli svantaggi sono eliminati modificando i passi 1 e 2 come segue:
  1. Si chiude l'anello di retroazione con un solo P, il cui guadagno è aumentato fino ad ottenere una oscillazione permanente (senza saturare l'attuatore!)
  2. Si fissa come  $K_0$  il valore del guadagno del controllore che determina tale oscillazione e si misura il periodo  $T_0$  dell'oscillazione stessa
  3. Si determinano i guadagni del regolatore in base alle tabelle descritte nel seguito



## Taratura con metodi semi-empirici - 6

- L'analisi della risposta con oscillazione critica è più facile con gli strumenti normalmente disponibili in pratica:



## Taratura con metodi semi-empirici - 7

- Tabelle per il metodo di Z-N dell'oscillazione critica ad anello chiuso:

TIPO	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5 K_0$	-	-
PI	$0.45 K_0$	$0.85 T_0$	-
PD	$0.5 K_0$	-	$0.2 T_0$
PID	$0.6 K_0$	$0.5 T_0$	$0.125 T_0$



## Taratura con metodi analitici

- Data la FdT  $G(s)$  del plant e  $G_c(s)$  quella del regolatore, nei metodi di progetto analitico si definisce una  $G_0(s)$  come FdT desiderata per il sistema in retroazione e si cerca di risolvere il problema per ricavare la  $G_c(s)$ :

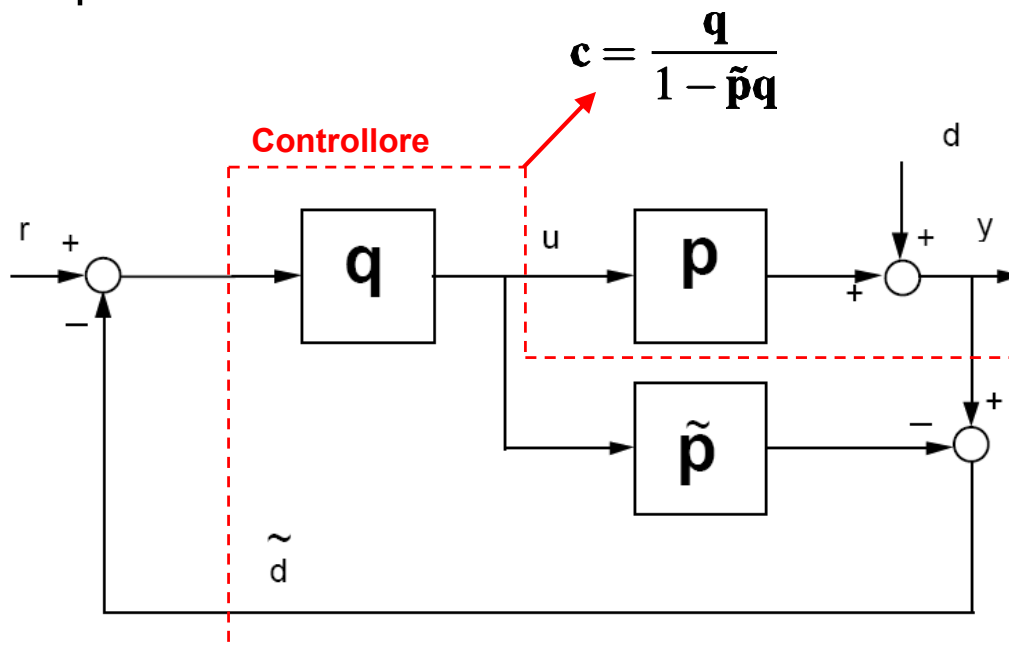
$$G_c(s) = \frac{G_0(s)}{G(s)} \frac{1}{[1 - G_0(s)]}$$

- La soluzione del problema è riconducibile al progetto di un regolatore PID a seconda dei vincoli imposti sulla  $G_0(s)$  o sulla struttura del sistema in retroazione
- Tra i metodi più moderni per ottenere la soluzione analitica è interessante citare il metodo del *modello interno* (**Internal Model Control, IMC**), con il quale è possibile ottenere la taratura del PID performante e robusta, agendo su un singolo parametro



## Internal Model Control

- ➔ Schema di riferimento, con  $q \rightarrow$  ruolo di  $G_0(s)$  e  $p \rightarrow$  plant



## Internal Model Control - 1

- ➔ Se si definisce  $q = \tilde{p}^{-1} f$ , con  $f$  FdT di un filtro del primo ordine con costante di tempo desiderata, e la funzione  $\tilde{p}^{-1}$  permette una perfetta cancellazione delle caratteristiche del plant, la FdT ad anello chiuso sarà pari a  $f$  e la FdT tra disturbo e uscita sarà  $(1 - f)$
- ➔ Se il plant contiene zeri a parte reale positiva, la  $\tilde{p}$  dovrà essere fattorizzata in modo da escluderli e così questi rimarranno nella FdT ad anello chiuso



## Internal Model Control e PID

► Ipotizzando che il plant sia un sistema del primo ordine:  $\tilde{\mathbf{p}} = \frac{K}{1 + Ts}$  e che:  $\mathbf{f} = \frac{1}{1 + \lambda s}$

allora:  $\mathbf{q} = \frac{1 + Ts}{K(1 + \lambda s)}$

e rielaborando i termini per ottenere la FdT del controllore:

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{q}}{1 - \tilde{\mathbf{p}}\mathbf{q}} = \frac{T}{K\lambda} \left( 1 + \frac{1}{Ts} \right)$$

**N.B.:** il controllore è un PI con  $K_p = \frac{T}{K\lambda}$ ,  $T_i = T$



## Internal Model Control e PID - 1

► Nel caso in cui il plant sia approssimabile come sistema del primo ordine con un ritardo:  $\tilde{\mathbf{p}} = \frac{K e^{-t_0 s}}{1 + Ts}$

e che il termine di ritardo venga ricondotto ad una FdT razionale (tramite *l'approssimazione* detta *di Padè*):

TIPO	$K_p$	$T_i$	$T_d$
PI	$\frac{T}{K(\lambda + t_0)}$	$T$	-
PID	$\frac{T + 0.5 t_0}{K(\lambda + t_0)}$	$T + 0.5 t_0$	$\frac{0.5 T t_0}{0.5 t_0 + T}$





## **REGOLATORI PID**

- **Cenni storici**
- **Formulazione**
- **Analisi delle FdT**
- **Metodi di taratura**

**FINE**

