



Fondamenti di Automatica

Progetto di controllo e reti correttrici

Dott. Ing. Marcello Bonfè

Dipartimento di Ingegneria - Università di Ferrara

Tel. +39 0532 974839

E-mail: marcello.bonfe@unife.it



Progetto di controllo e reti correttrici SPECIFICHE DI PROGETTO

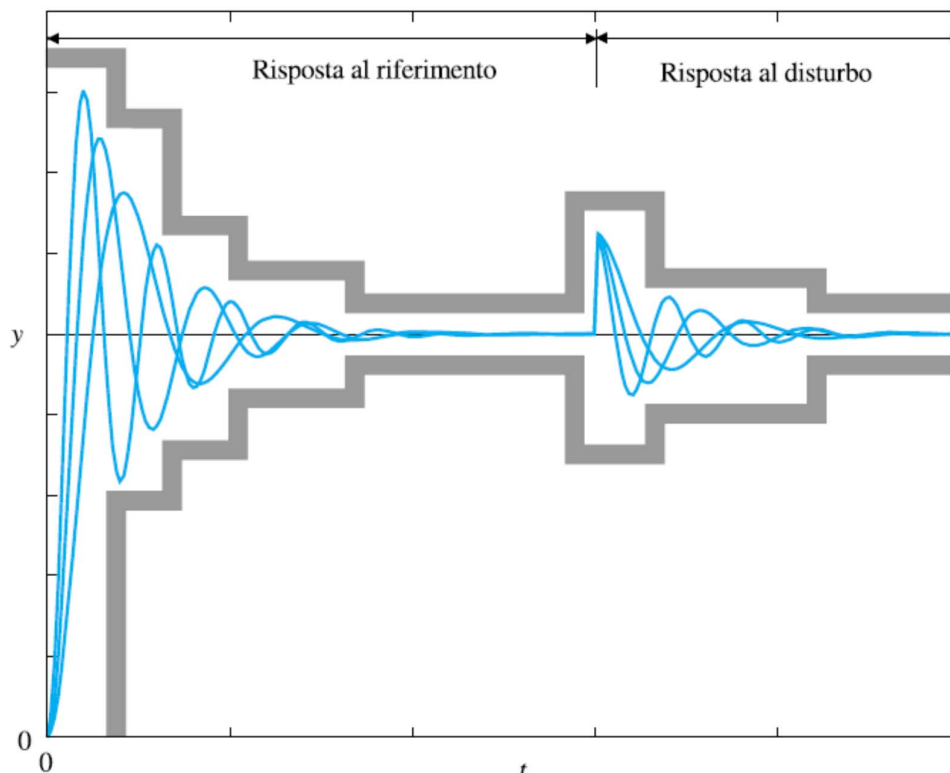


Requisiti per il sistema controllato

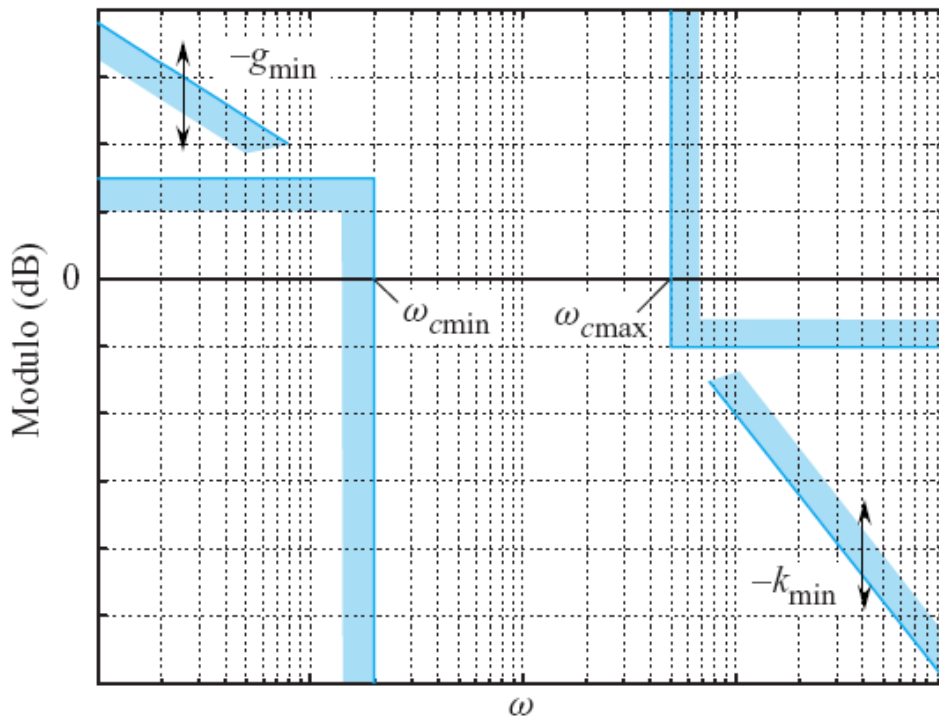
- **Stabilità** (in condizioni nominali) e **robustezza** (stabilità con incertezza di modello/parametrica)
- **Prestazioni:**
 - Precisione **statica** (errore a regime) in cond. nominali
 - Precisione **dinamica:**
 - Specifiche nel dominio del tempo (tempo di assestamento, max sovraelongazione,...)
 - Specifiche nel dominio della frequenza (banda passante, pulsazione di risonanza, picco di risonanza → smorzamento)
 - Precisione **robusta** (rispetto ad incertezze nel modello o nei suoi parametri, attenuazione dei disturbi)



Specifiche nel dominio del tempo



Specifiche nel dominio della frequenza

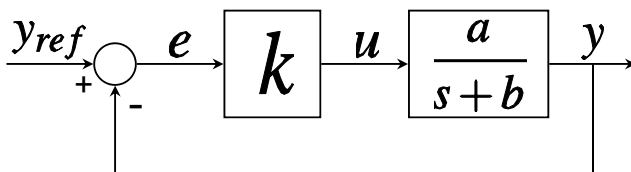


NOTA: Il diagramma indica un esempio di vincoli di progetto per $L(s)$ (FdT di anello)



Specifiche e progetto: controllo proporzionale

- ➔ Un semplice controllo proporzionale non sempre permette di rispettare **TUTTE** le specifiche
- ➔ **Esempio:** sistema da controllare del primo ordine



$$G_{cl}(s) = \frac{ka}{s + \underbrace{b + ka}_{\text{nuovo polo}}}$$

al crescere di k :

- **il guadagno statico tende ad 1**
- **il polo (reale) si sposta a sinistra**

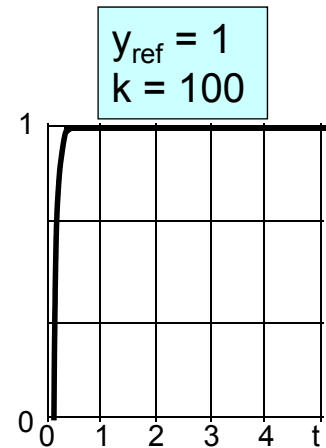
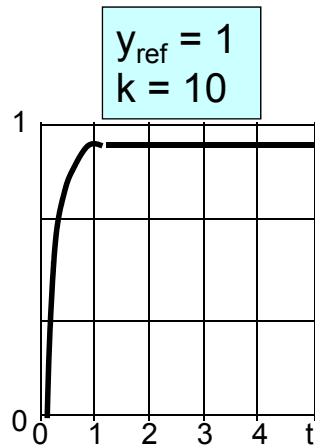
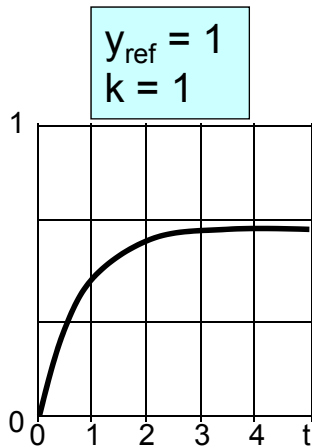
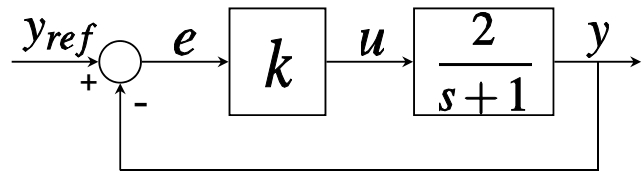
nuovo polo



Specifiche e progetto: controllo proporzionale - 1

► **Esempio:** sistema del primo ordine (continuo)

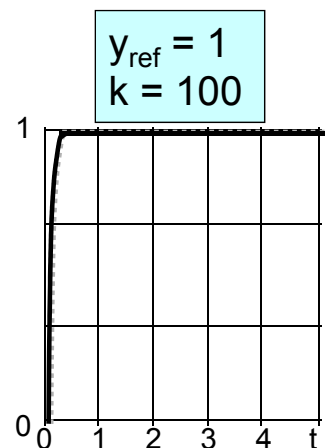
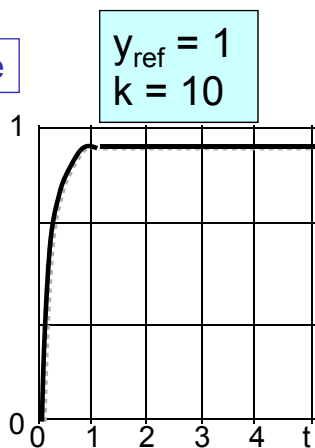
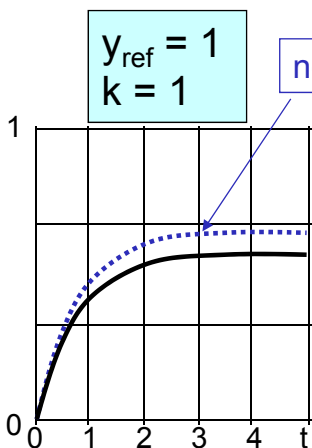
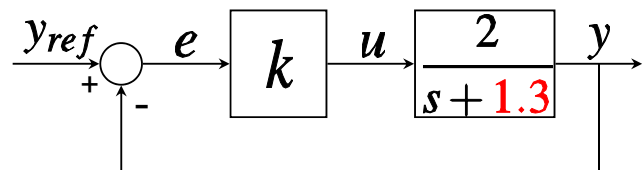
Condizioni nominali:



Specifiche e progetto: controllo proporzionale - 2

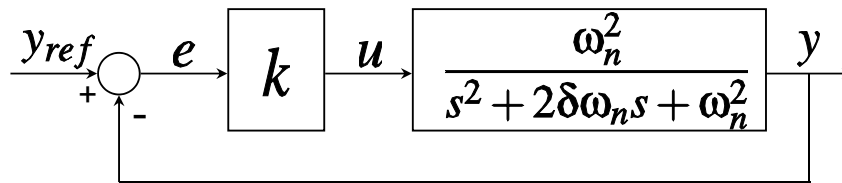
► **Esempio:** sistema del primo ordine (continuo)

Condizioni perturbate:



Specifiche e progetto: controllo proporzionale - 3

► **Esempio:** sistema del secondo ordine



$$G_{cl}(s) = \frac{k \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}}{1 + k \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 + k\omega_n^2}$$



Specifiche e progetto: controllo proporzionale - 4

► **Esempio:** sistema del secondo ordine (continuo)

$$G_{cl}(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + (1+k)\omega_n^2} = \frac{\frac{k}{(1+k)}\bar{\omega}_n^2}{s^2 + 2\bar{\delta}\bar{\omega}_n s + \bar{\omega}_n^2}$$

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{\sqrt{1+k}}$$

$$\bar{\omega}_n = \omega_n \sqrt{1+k}$$

al crescere di k:

▪ **il guadagno statico tende ad 1**

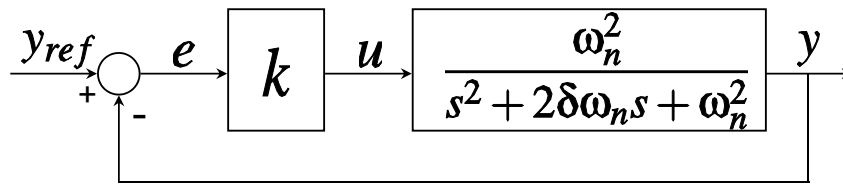
▪ $\bar{\delta} \rightarrow 0$ e $\bar{\omega}_n \rightarrow \infty$



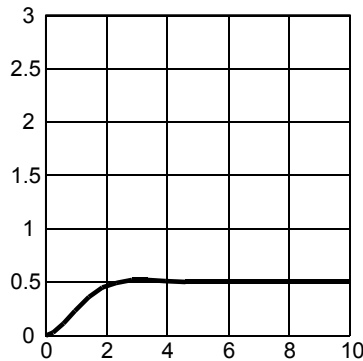
Specifiche e progetto: controllo proporzionale - 5

► **Esempio:** sistema del secondo ordine (continuo)

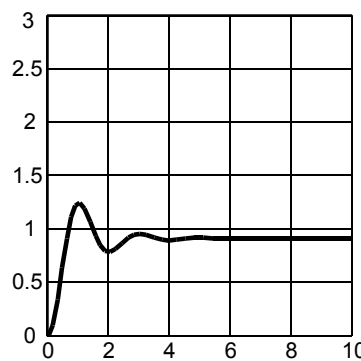
Condizioni nominali:



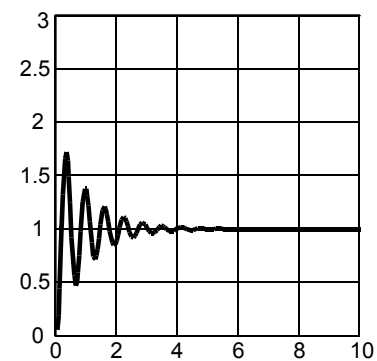
$$\delta = 1$$
$$\omega_n = 1$$



k = 1



k = 10



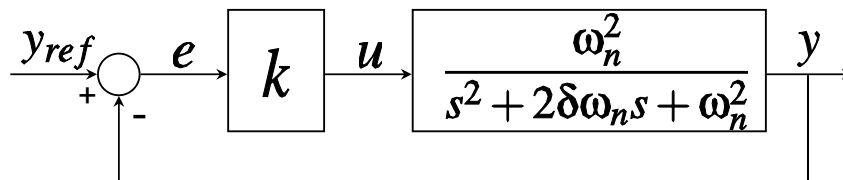
k = 100



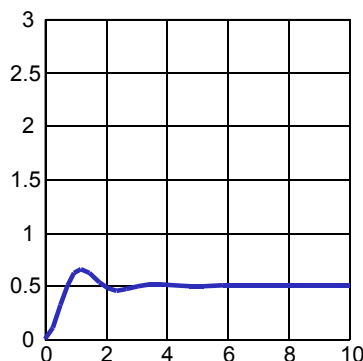
Specifiche e progetto: controllo proporzionale - 6

► **Esempio:** sistema del secondo ordine (continuo)

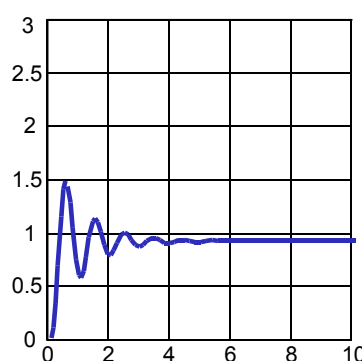
Condizioni perturbate:



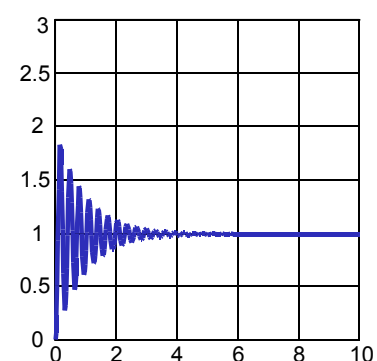
$$\delta = 1$$
$$\omega_n = 2$$



k = 1



k = 10



k = 100



Specifiche e progetto: riassumendo

- Specifiche sull'errore a regime possono richiedere il progetto di un controllo proporzionale con guadagno **troppo elevato**, che può portare il sistema in retroazione ad essere **instabile!**
- In tutti gli esempi precedenti il sistema controllato risulta di tipo 0, pertanto con errore a regime non nullo nella risposta al gradino
- Inserire un **integratore puro** nel controllore (se non presente nel sistema da controllare) annulla l'errore a regime, ma modifica drasticamente le prestazioni a frequenze anche poco superiori a 0!



Progetto di controllo e reti correttrici

RETI CORRETTRICI



Reti correttrici

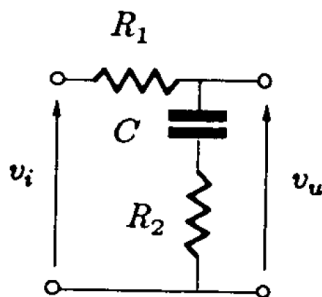
- ▶ Quando il controllo proporzionale, generalmente utile per soddisfare **solo** le specifiche di precisione statica (errore a regime), **non permette** di soddisfare le specifiche sulle prestazioni dinamiche o la stabilità, è necessario ricorrere a sistemi di controllo in grado di modificare anche le caratteristiche in frequenza della FdT d'anello
- ▶ Le strutture di controllo tipicamente impiegate allo scopo sono chiamate **reti correttrici**, in quanto analoghe a circuiti elettrici (aventi determinate FdT) effettivamente utilizzati per realizzare controllori puramente *analogici*:
 - Rete *ritardatrice (phase lag)*
 - Rete *anticipatrice (phase lead)*
 - Rete *a ritardo e anticipo (lead-lag)*



Rete ritardatrice (*phase lag*)

- ▶ Funzione di trasferimento:
$$G(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s}$$

- ▶ Possibile realizzazione:



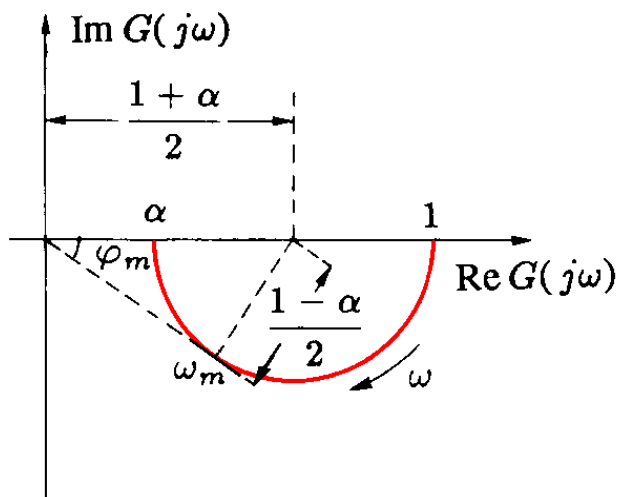
$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{1 + R_2 C s}{1 + (R_1 + R_2) C s}$$

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1; \quad \tau = (R_1 + R_2) C$$

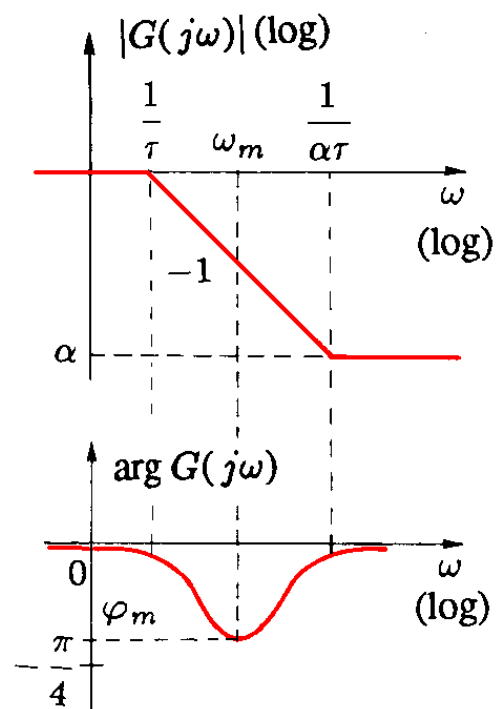


Rete ritardatrice (phase lag) - 1

► Diagrammi di Nyquist e Bode:



pag. 17



Fondamenti di Automatica – 3.2 Reti correttrici



Rete ritardatrice (phase lag) - 1a

- **NOTA 1:** il diagramma di Bode mostrato nella slide precedente è l'approssimazione asintotica del diagramma reale. In quest'ultimo, il modulo di G è sempre strettamente < 1 .
- **NOTA 2:** analogamente, la fase è sempre strettamente negativa, il che significa che la rete ritardatrice introduce un ritardo di fase per ogni pulsazione ω , tra 0 e ∞

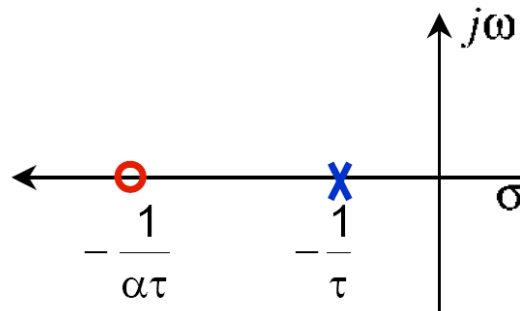
pag. 18

Fondamenti di Automatica – 3.2 Reti correttrici



Rete ritardatrice (phase lag) - 2

- Mappa poli/zeri: il **polo** è associato a pulsazione inferiore a quella dello **zero** (il polo *agisce prima* dello zero)



- Ritardo di fase: $\arg[G(j\omega)] = \arctan(\alpha\tau\omega) - \arctan(\tau\omega)$
– punto di massimo: $\left. \frac{d \arg[G(j\omega)]}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_m} = 0$



Rete ritardatrice (phase lag) - 3

- Ritardo di fase massimo:

$$\left. \frac{d \arg[G(j\omega)]}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_m} = \frac{\alpha\tau}{1 + \alpha^2\tau^2\omega_m^2} - \frac{\tau}{1 + \tau^2\omega_m^2} = 0$$

➡ $\omega_m^2 = \frac{1}{\alpha\tau^2} \Rightarrow \omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$

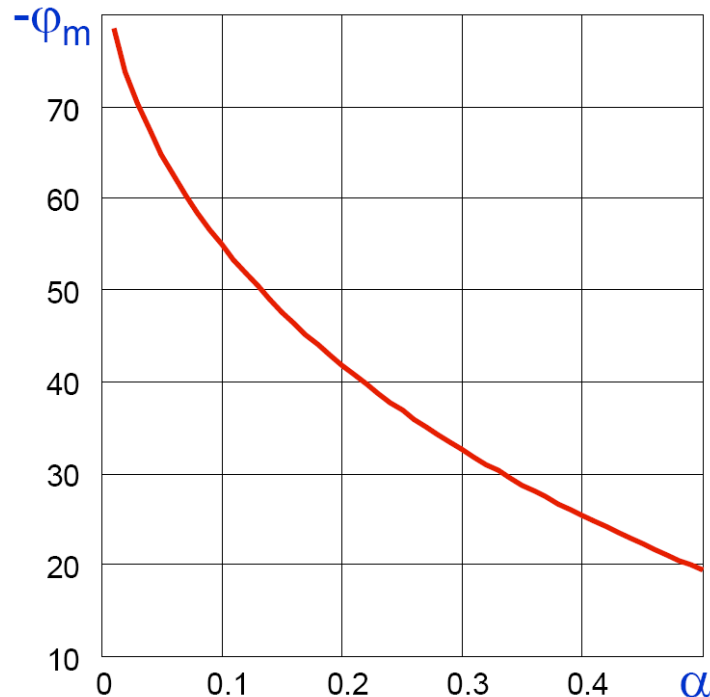
➡ $\arg[G(j\omega_m)] = \varphi_m = -\arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$

➡ $\alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m}$



Rete ritardatrice (phase lag) - 4

➡ Ritardo di fase in funzione di α :



Rete ritardatrice (phase lag) - 5

➡ Caratteristiche per il progetto di controllo:

- attenua il modulo per $\omega > 1/\tau$ (effetto utile)
- riduce il margine di fase se vicino a $\omega = \omega_m$ (effetto negativo, collaterale)

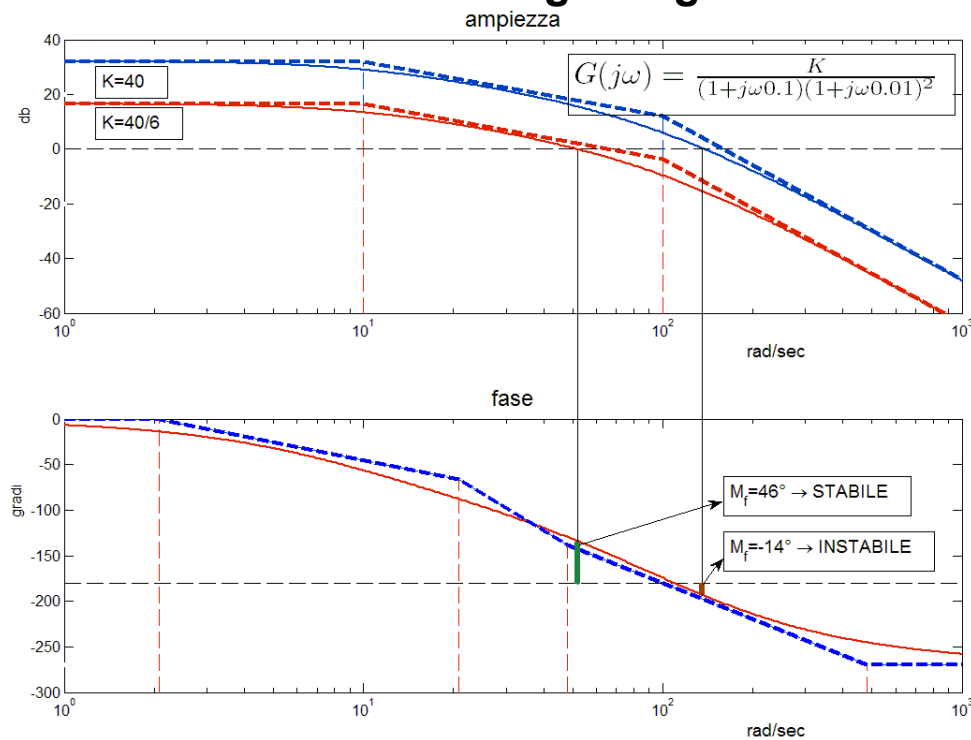
➡ L'attenuazione di modulo si può sfruttare:

1. Per poter aumentare il guadagno d'anello alle basse frequenze (e migliorare la precisione statica), senza modificare troppo il guadagno alle alte frequenze
2. Per poter ridurre il guadagno alle alte frequenze ed abbassare quindi la pulsazione di incrocio ω_c , al fine di migliorare il margine di fase (riducendo però anche la banda passante)



Rete ritardatrice: esempio di progetto

► Stabilizzazione con riduzione guadagno



pag. 23

Fondamenti di Automatica – 3.2 Reti correttrici



Rete ritardatrice: esempio di progetto - 1

► Stabilizzazione con riduzione guadagno:

- Riducendo il guadagno, tutto il diagramma di Bode delle ampiezze si sposta verso il basso
- In questo modo la pulsazione ω_c , incrocio del diagramma di Bode con la retta a guadagno unitario, diminuisce
- Pertanto, la nuova pulsazione di incrocio corrisponderà ad valore di fase maggiore (*meno negativo*) e quindi ad un migliore margine di fase
- Tuttavia, in tal modo si è diminuita non solo la banda passante, ma anche il guadagno statico, il che determina in generale peggiore precisione statica e minore prontezza di risposta del sistema controllato

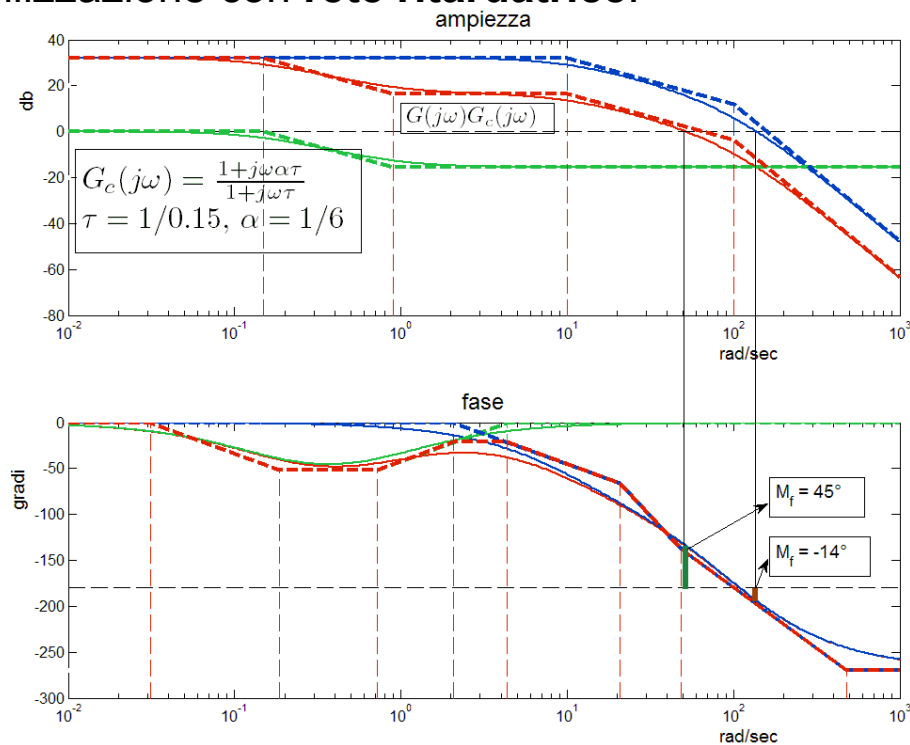
pag. 24

Fondamenti di Automatica – 3.2 Reti correttrici



Rete ritardatrice: esempio di progetto - 2

► Stabilizzazione con rete ritardatrice:



pag. 25

Fondamenti di Automatica – 3.2 Reti correttrici



Rete ritardatrice: esempio di progetto - 2a

► Tentativo di stabilizzazione con rete ritardatrice:

- L'effetto di attenuazione alle alte frequenze aiuta a migliorare il margine di fase, per effetto analogo a quella della riduzione del guadagno statico
- Il guadagno alle basse frequenze è però invariato, perciò i relativi effetti benefici sulla precisione statica sono preservati
- La banda passante è però diminuita, pertanto anche la prontezza di risposta del sistema controllato
- E' bene che il ritardo di fase introdotto dalla rete sia a pulsazioni inferiori di una decade rispetto a quella di incrocio ω_c del sistema da controllare, per evitare che esso influisca sul margine di fase $\rightarrow \alpha\tau < 10/\omega_c$

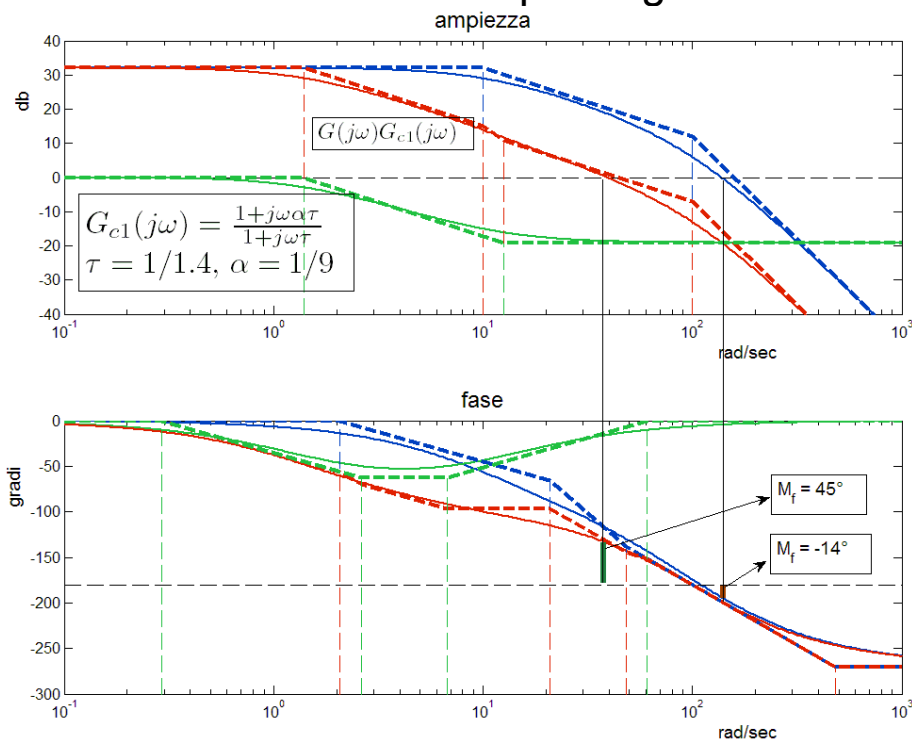
pag. 26

Fondamenti di Automatica – 3.2 Reti correttrici



Rete ritardatrice: esempio di progetto - 3

- Modifica della **rete ritardatrice** per migliorare la banda:



pag. 27

Fondamenti di Automatica – 3.2 Reti correttrici



Rete ritardatrice: esempio di progetto - 3a

- Modifica della **rete ritardatrice** per migliorare la banda:
 - Si è cercato di spostare l'inizio del benefico effetto di attenuazione della rete a pulsazioni più elevate
 - In tal modo la banda passante è aumentata, pertanto anche la prontezza di risposta del sistema controllato
 - E' necessario verificare che il ritardo di fase introdotto dalla rete non influisca sul margine di fase
 - Si tratta di un metodo di progetto per tentativi

pag. 28

Fondamenti di Automatica – 3.2 Reti correttrici



Rete ritardatrice: procedura di progetto (qualitativa)

1. Si determina sul diagramma di Bode (fase) del sistema da controllare (non compensato) la pulsazione alla quale corrisponderebbe il margine di fase M_f desiderato
2. Si considera un ulteriore margine di sicurezza su M_f di 5° oppure si sceglie una pulsazione ω^* inferiore del 20% di quella ottenuta al passo 1
3. Si determina sul diagramma di Bode (ampiezza) del sistema non compensato l'attenuazione necessaria α affinché il modulo sia unitario a ω^*
4. Si ricava la costante di tempo del polo:

$$\frac{1}{\alpha\tau} = \frac{\omega^*}{10}$$

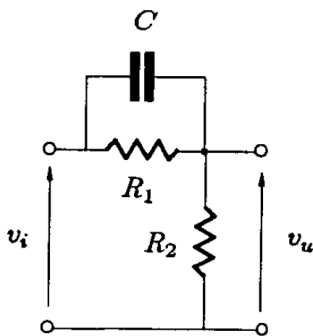
5. Si verifica M_f e se sia possibile migliorare la banda



Rete anticipatrice (phase lead)

► Funzione di trasferimento: $G(s) = \alpha \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$

► Possibile realizzazione:



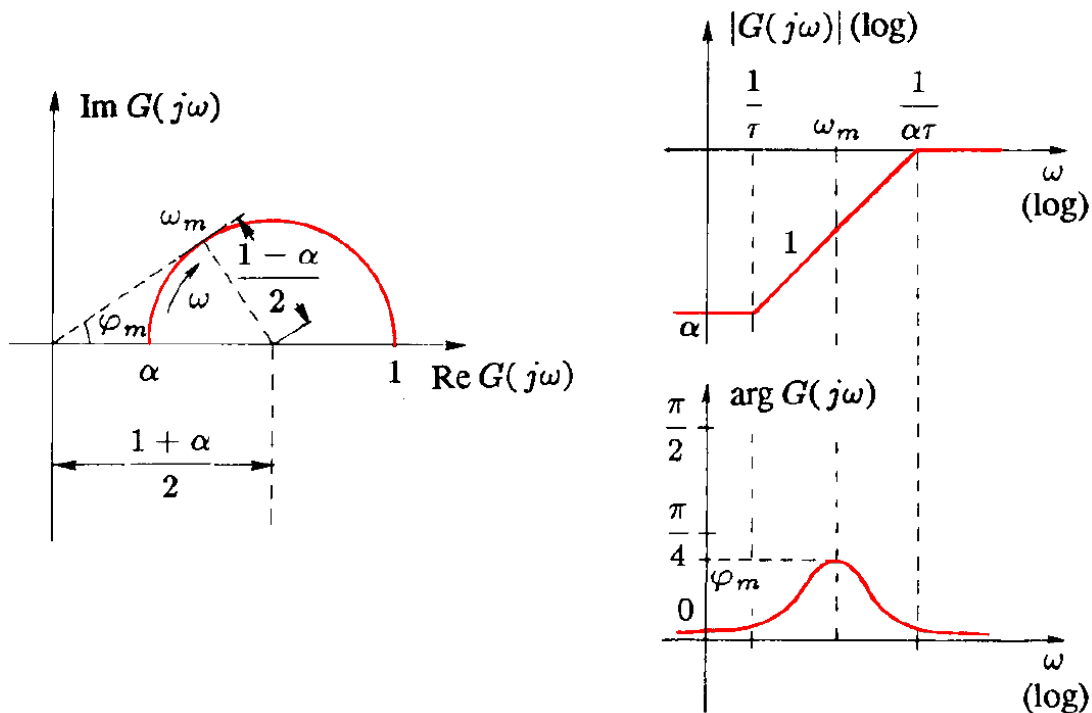
$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{R_2(1 + R_1 C s)}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 C s}$$

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1; \quad \tau = R_1 C$$



Rete anticipatrice (*phase lead*) - 1

► Diagrammi di Nyquist e Bode:



pag. 31

Fondamenti di Automatica – 3.2 Reti correttici



Rete anticipatrice (*phase lead*) - 1a

- **NOTA 1:** il diagramma di Bode mostrato nella slide precedente è l'approssimazione asintotica del diagramma reale. In quest'ultimo, il modulo di G è sempre strettamente < 1 .
- **NOTA 2:** analogamente, la fase è sempre strettamente positiva, il che significa che la rete anticipatrice introduce un anticipo di fase per ogni pulsazione ω , tra 0 e ∞

pag. 32

Fondamenti di Automatica – 3.2 Reti correttici

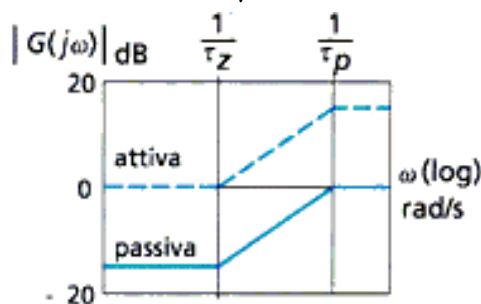


Rete anticipatrice (phase lead) - 1a

- Funzione di trasferimento alternativa (detta attiva), con guadagno statico unitario:

$$G(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$$

- L'effetto più utile della rete è l'anticipo di fase, perciò tale modifica non influenza molto il metodo di progetto
- Va considerato che tale versione ha **guadagno > 1** e fino al massimo $1/\alpha$ (il guadagno aumenta per $\omega > 1/\tau$)



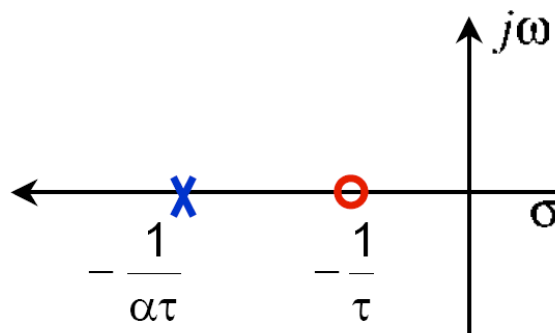
pag. 33

Fondamenti di Automatica – 3.2 Reti correttrici



Rete anticipatrice (phase lead) - 2

- Mappa poli/zeri: il **polo** è associato a pulsazione superiore a quella dello **zero** (il polo *agisce dopo* lo zero)



- Anticipo di fase massimo:

$$\varphi_m = \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

$$\omega_m = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}}$$

► **N.B.:** media geometrica tra il polo e lo zero

pag. 34

Fondamenti di Automatica – 3.2 Reti correttrici



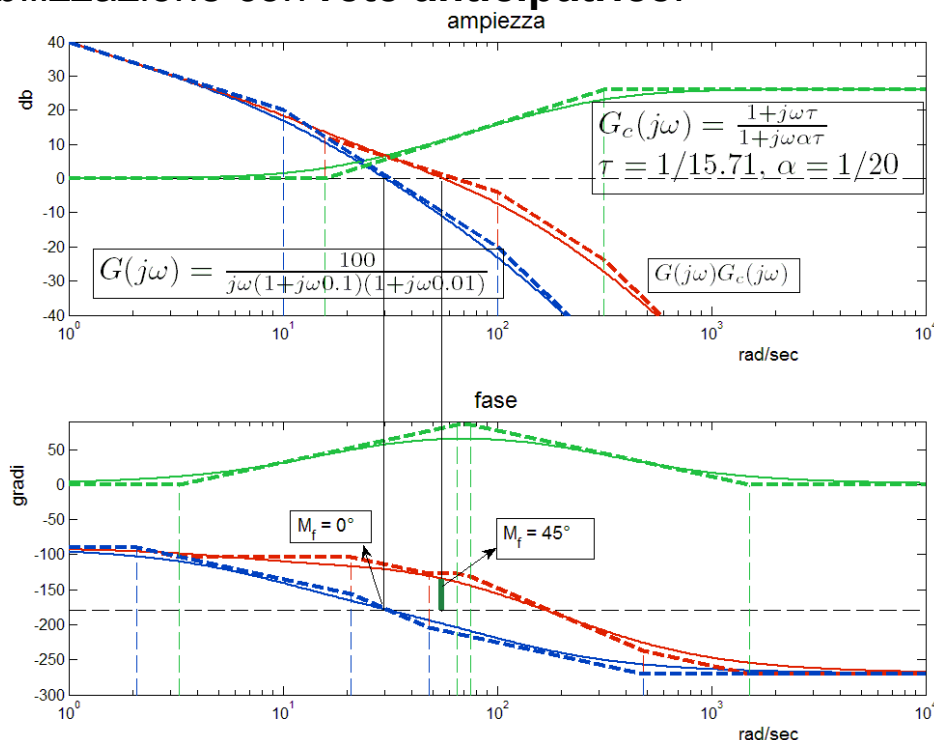
Rete anticipatrice (phase lead) - 3

- Caratteristiche per il progetto di controllo:
 - migliora il margine di fase vicino a $\omega = \omega_m$ (effetto utile)
 - aumenta il guadagno per $\omega > 1/\tau$:
 - Può aumentare la banda passante (effetto utile)
 - Può peggiorare l'effetto di disturbi ad alta frequenza (effetto collaterale)



Rete anticipatrice: esempio di progetto

- Stabilizzazione con rete anticipatrice:



Rete anticipatrice: esempio di progetto - 1

- Stabilizzazione con **rete anticipatrice**:
 - L'anticipo di fase introdotto dalla rete determina un aumento del margine di fase
 - L'aumento del guadagno alle alte frequenze aumenta anche la pulsazione di incrocio ω_c
 - Di conseguenza, migliora la banda passante e la prontezza di risposta del sistema



Rete anticipatrice: procedura di progetto (qualitativa)

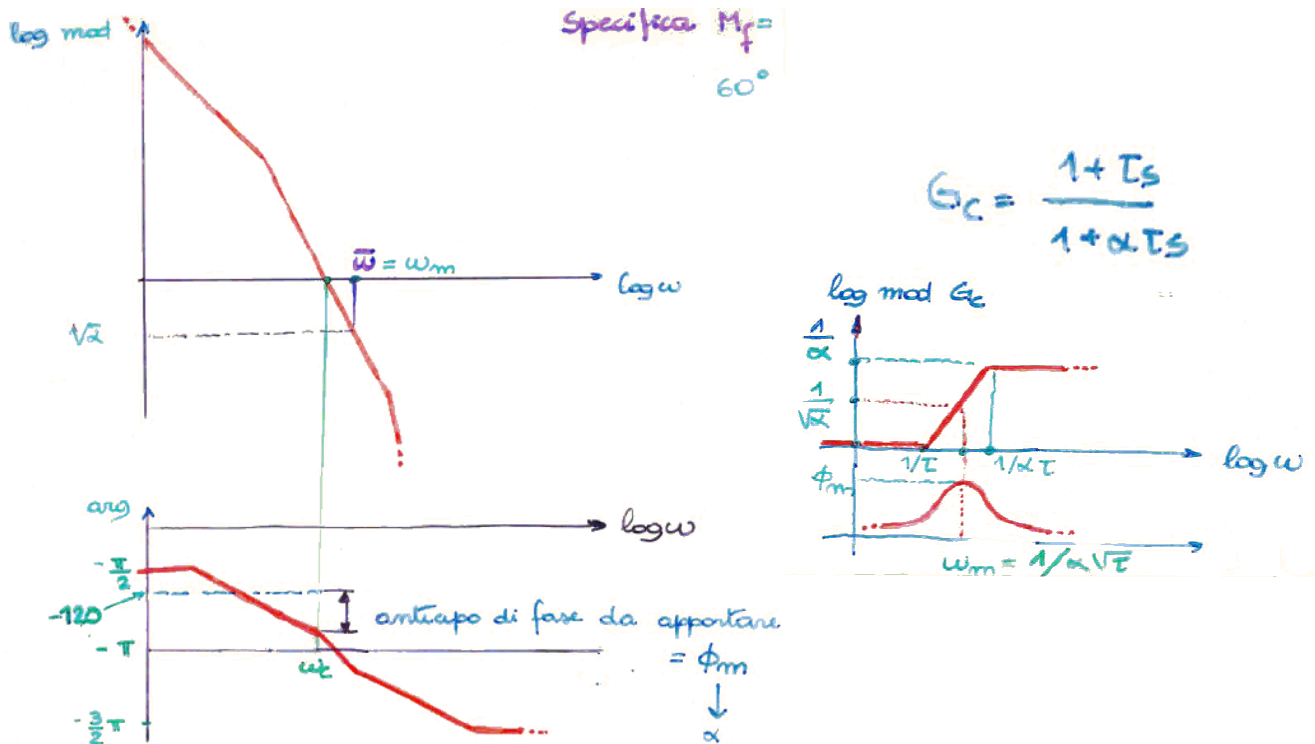
1. Si determina sul diagramma di Bode (fase) del sistema da controllare (non compensato) l'attuale margine di fase M_f e la pulsazione di incrocio ω_c
2. Si determina l'anticipo di fase necessario per ottenere un margine di fase M'_f desiderato più un ulteriore margine di sicurezza (es. 5°)
3. Si determinano i parametri della rete anticipatrice:

$$\varphi_m = \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad \alpha = \frac{1 - \sin \varphi_m}{1 + \sin \varphi_m}$$

4. Si determina la pulsazione $\bar{\omega}$ a cui il modulo del sistema non compensato vale $-20 \log(1/\sqrt{\alpha})$
5. Si ricava la costante di tempo del polo da $\bar{\omega} = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$



Rete anticipatrice: procedura di progetto (qualitativa)



Rete anticipatrice: progetto per cancellazione

- Il progetto della **rete anticipatrice** si semplifica, a scapito però della flessibilità della compensazione, nei casi in cui sia possibile posizionare lo zero della rete in corrispondenza di un polo reale del sistema non compensato → **cancellazione polo/zero**
- Infatti, essendo il polo della rete più lontano dall'asse reale rispetto allo zero, ciò equivale ad allontanare dall'asse reale il polo proprio del sistema non compensato (con un rapporto da 1 a $1/\alpha$), il cui modo diventa quindi più veloce
- **N.B.:** nella pratica le cancellazioni polo/zero non sono mai perfette, per via di inevitabili incertezze parametriche → non è possibile cancellare un polo a parte reale positiva con uno zero del controllore, oppure uno zero a parte reale positiva con un polo del controllore



Rete anticipatrice: progetto per cancellazione - 1

► **Esempio:** sistema non compensato $G(s) = \frac{K}{s(1 + \tau s)}$

Con $\tau = 1$, il sistema in retroazione ha:

$$G_{cl}(s) = \frac{K}{\tau s^2 + s + K} = \frac{1}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

Supponendo come specifiche di progetto:

- Costante di velocità $K_v = 10 \Rightarrow K = 10$
- Picco di risonanza $M_r = 1.3$

Con tale valore di K si ha: $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{\tau}} = 3.16$ $\delta = \frac{1}{2\sqrt{K\tau}} = 0.16$
cui corrisponde un picco di risonanza $M_r = 3.2$



Rete anticipatrice: progetto per cancellazione - 2

Per avere il picco di risonanza desiderato è necessario imporre un coefficiente di smorzamento $\delta' = 0.45$

Si può ottenere tale risultato con una rete anticipatrice che cancelli il polo del sistema non compensato:

$$G'(s) = G(s)G_c(s) = \frac{K(1 + \tau s)}{s(1 + \tau s)(1 + \alpha \tau s)}$$

Nella nuova FdT del sistema in retroazione si ha quindi:

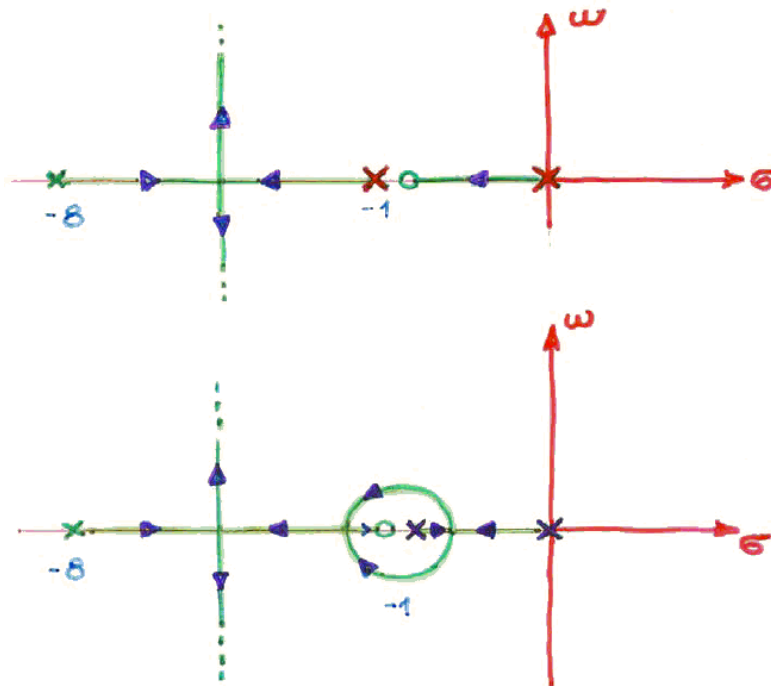
$$\omega'_n = \sqrt{\frac{K}{\alpha \tau}} \quad \delta' = \frac{1}{2\sqrt{K\alpha \tau}}$$

Essendo $\tau = 1$ fissato dalla cancellazione, il valore di progetto per avere lo smorzamento richiesto è $\alpha = 0.125$



Rete anticipatrice: progetto per cancellazione - 3

N.B.: effetti della non perfetta cancellazione polo/zero



pag. 43

Fondamenti di Automatica – 3.2 Reti correttrici

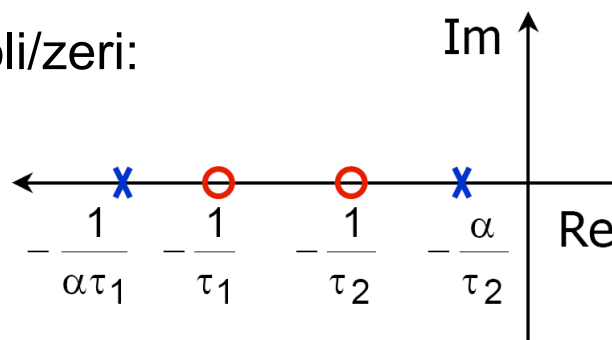


Rete a ritardo e anticipo (*lead-lag*)

► Funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_1 s)+\tau_{12} s} \\
 &= \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\tau_a s)(1+\tau_b s)} \\
 &= \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\alpha\tau_1 s)(1+\frac{\tau_2}{\alpha} s)}
 \end{aligned}$$

► Mappa poli/zeri:



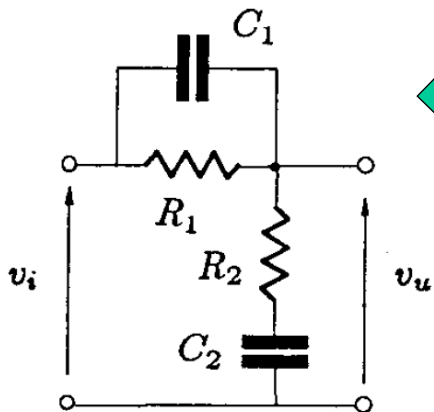
pag. 44

Fondamenti di Automatica – 3.2 Reti correttrici



Rete a ritardo e anticipo (lead-lag) - 1

► Possibile realizzazione:



$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R_2 + \frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{(1/R_1) + C_1 s}}$$

$$= \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + \tau_{12} s}$$

con: $\tau_1 = R_1 C_1, \quad \tau_2 = R_2 C_2, \quad \tau_{12} = R_1 C_2$

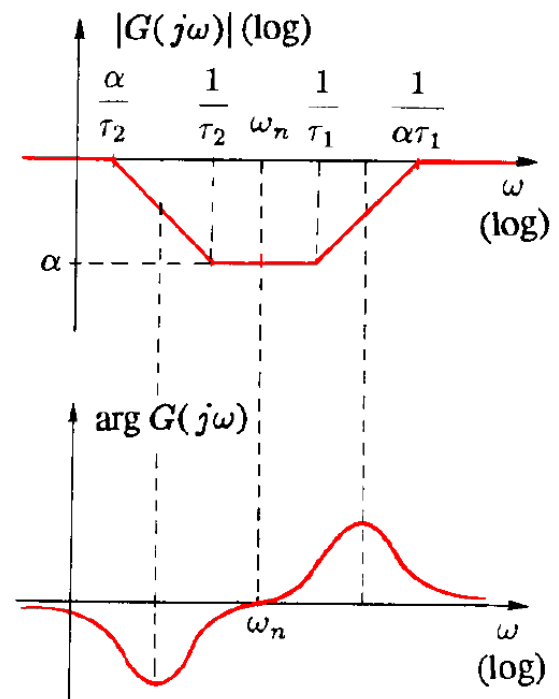
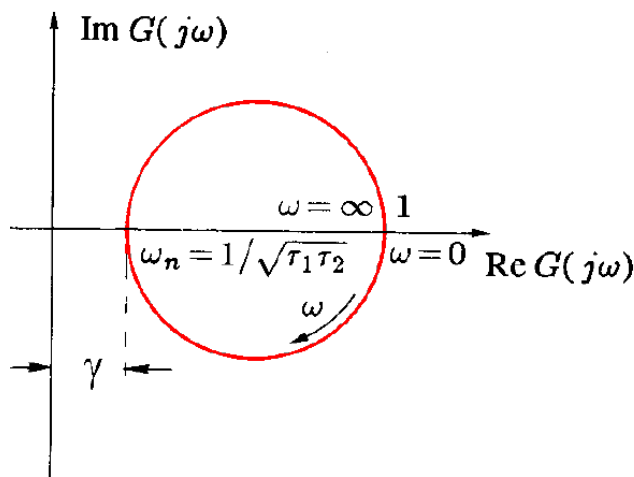
oppure: $\tau_1 \tau_2 = \tau_a \tau_b, \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_{12} = \tau_a + \tau_b$

e con: $\tau_1 < \tau_2, \quad \tau_a < \tau_b, \quad \frac{\tau_a}{\tau_1} = \frac{\tau_2}{\tau_b} = \alpha < 1$



Rete a ritardo e anticipo (lead-lag) - 2

► Diagrammi di Nyquist e Bode:



Rete a ritardo e anticipo (*lead-lag*) - 4

- Caratteristiche per il progetto di controllo:
 - consente di aumentare il guadagno statico senza pregiudicare la banda passante e il margine di fase (effetto utile)
 - attenua il modulo a $\omega = \omega_n = 1/\sqrt{\tau_1\tau_2}$, ma senza introdurre né anticipo né ritardo di fase a tale pulsazione (effetto utile)
- In sostanza, elimina gli effetti collaterali unendo i benefici delle reti ritardatrice e anticipatrice



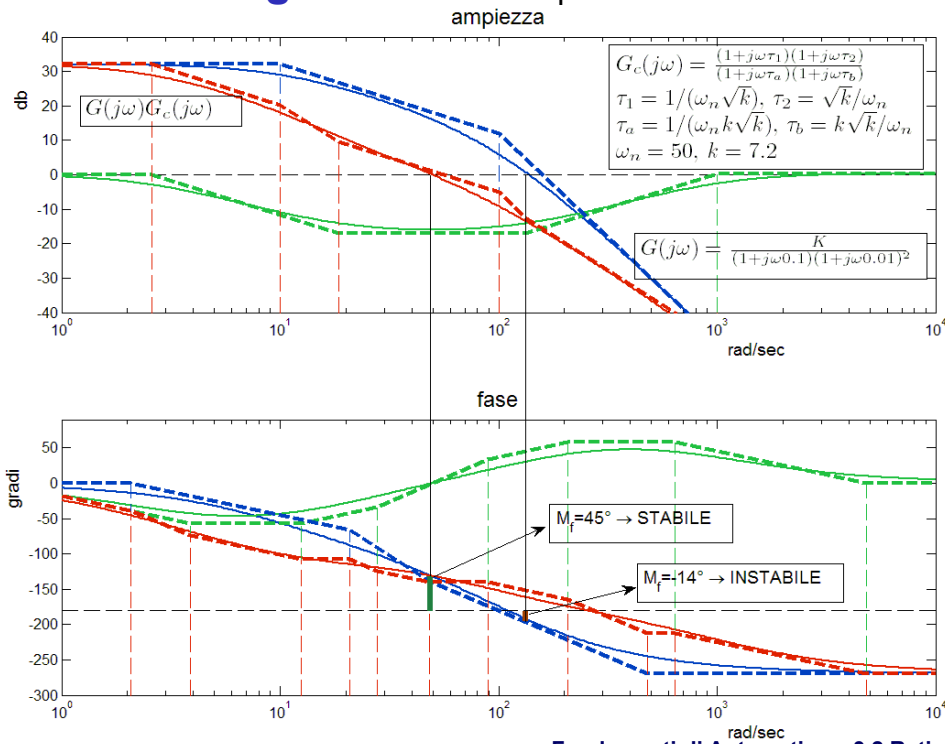
Rete a ritardo e anticipo: procedure di progetto

- Specifica sul **margine di fase** M_F :
 - Si determina sui diagrammi di Bode del sistema non compensato la pulsazione ω_n alla quale la fase vale $-180^\circ + M_f$ e l'attenuazione α da introdurre per avere modulo 0 dB a ω_n
- Specifica sul **margine di ampiezza** M_A :
 - Si determina sui diagrammi di Bode del sistema non compensato la pulsazione ω_n alla quale la fase vale -180° e l'attenuazione α da introdurre per avere il margine M_A voluto per l'ampiezza alla pulsazione ω_n



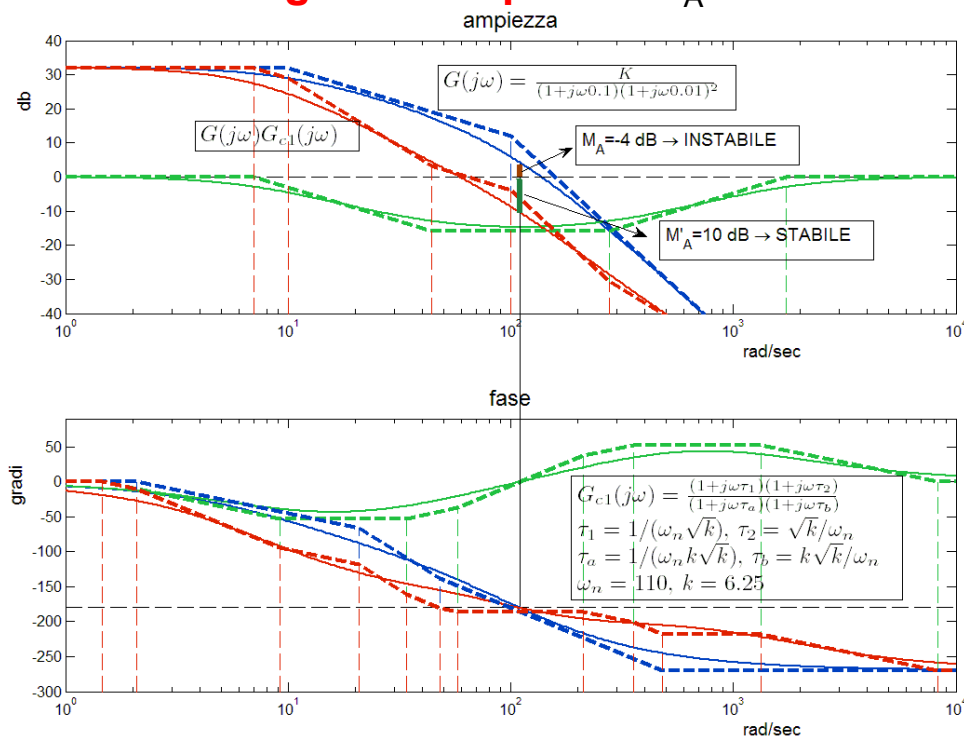
Rete a ritardo e anticipo: esempi di progetto

Specifica sul margine di fase M_F :



Rete a ritardo e anticipo: esempi di progetto - 1

Specifica sul margine di ampiezza M_A :





PROGETTO di CONTROLLO e RETI CORRETTTRICI

- Specifiche di progetto**
- Reti correttrici**
- Esempi di progetto**

FINE

