Fondamenti di Automatica

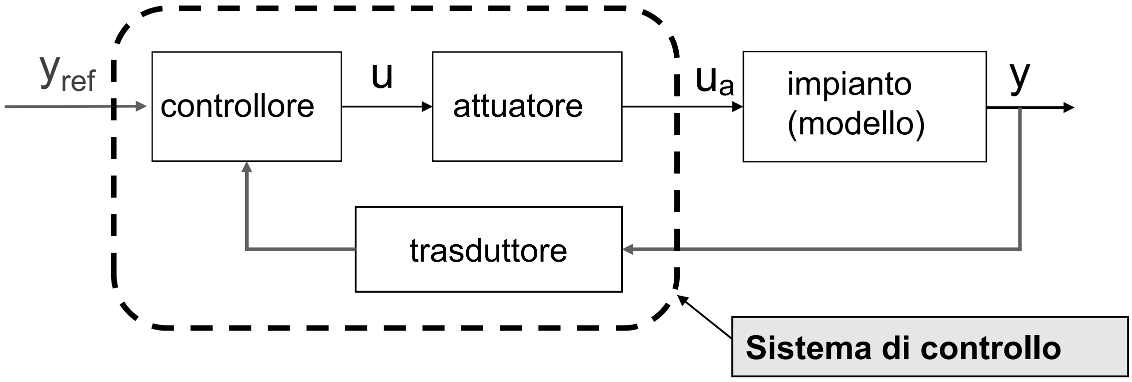
Funzioni di trasferimento: robustezza e prestazioni

Dott. Ing. Marcello Bonfè
Dipartimento di Ingegneria - Università di Ferrara
Tel. +39 0532 974839
E-mail: marcello.bonfe@unife.it

Funzioni di trasferimento SENSIBILITA'

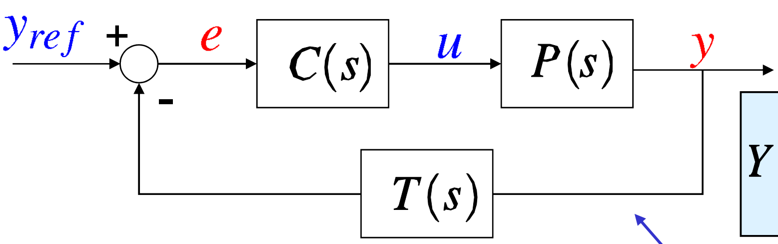
Sistemi in retroazione

- La tecnologia del sistema di controllo ad anello chiuso richiede sempre l'installazione di un trasduttore di misura, la cui influenza sulle proprietà del sistema controllato è spesso di notevole importanza (anche pratica)



Sistemi in retroazione - 1

- Tramite modelli FdT e la riduzione degli schemi a blocchi:



FdT diretta G(s)

$$Y = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)T(s)} Y_{ref}$$

FdT di anello L(s)
[anche = G(s)T(s)]

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{G(s)}{1+L(s)} = \frac{Y}{Y_{ref}}$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{s}) = \frac{C(s)}{1+L(s)} = \frac{U}{Y_{ref}}$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{s}) = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{E}{Y_{ref}}$$

Funzione di *sensitività*

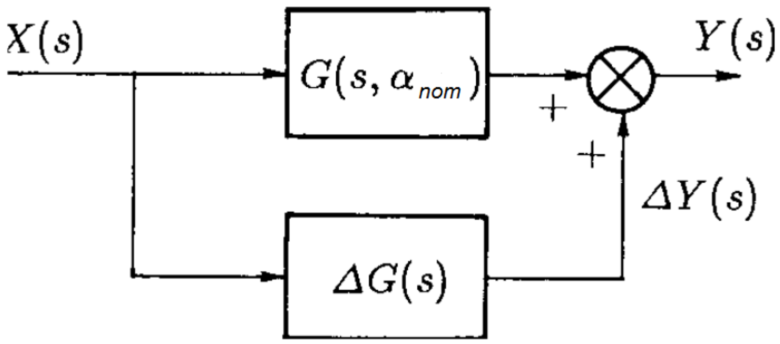
Sensibilità alle variazioni di parametri

- Se un parametro dell'impianto è difforme dal valore nominale ipotizzato in fase di progetto:

$$\alpha = \alpha_{nom} + \Delta\alpha \quad \Longrightarrow \quad G(s,\alpha) = G(s) + \Delta G(s)$$

con

$$G(s) = G(s, \alpha_{nom}); \quad \Delta G(s) = \left.\frac{\partial G}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_{nom}} \Delta\alpha$$



Sensibilità alle variazioni di parametri - 1

- Tale variazione è quindi equivalente ad un blocco indesiderato in parallelo alla FdT diretta
- La corrispondente variazione della FdT complessiva (ad anello chiuso) è:

$$\Delta F(s) = \left.\frac{\partial F}{\partial G}\frac{\partial G}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_{nom}} \Delta\alpha = \frac{\partial}{\partial G}\left(\frac{G}{1+L}\right)\Delta G(s) = \frac{1}{(1+L)^2}\Delta G(s)$$

$$\boxed{\frac{\Delta F(s)}{F(s)} = \frac{1}{1+L(s)}\frac{\Delta G(s)}{G(s)} = S(s)\frac{\Delta G(s)}{G(s)}}$$

Funzione di *sensitività*

Sensibilità alle variazioni di parametri - 2

- In relazione al modulo della risposta armonica:

$$\frac{|\Delta F(j\omega)|}{|F(j\omega)|} = \frac{1}{|1+L(j\omega)|}\frac{|\Delta G(j\omega)|}{|G(j\omega)|}$$

- Se $|L(j\omega)| \gg 1$ (perciò $|S(j\omega)| \simeq 0$) si può scrivere:

$$\frac{|\Delta F(j\omega)|}{|F(j\omega)|} \ll \frac{|\Delta G(j\omega)|}{|G(j\omega)|}$$

- **Pertanto**, l'errore relativo (dovuto alla variazione di un parametro nell'impianto) nella risposta del sistema ad anello chiuso è molto inferiore a quello del sistema in catena diretta (alle frequenze per le quali il guadagno della FdT di anello è elevato)

Sensibilità alle variazioni di parametri - 3

- Se invece è un parametro del trasduttore (o comunque del ramo di retroazione) ad essere difforme dal valore nominale:

$$\beta = \beta_{nom} + \Delta\beta \quad \Longrightarrow \quad T(s,\beta) = T(s) + \Delta T(s)$$

con

$$T(s) = T(s, \beta_{nom}); \quad \Delta T(s) = \left.\frac{\partial T}{\partial \beta}\right|_{\beta=\beta_{nom}} \Delta\beta$$

allora (ricordando che L=GT)

$$\Delta F(s) = \left.\frac{\partial F}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \beta}\right|_{\beta=\beta_{nom}} \Delta\beta = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{G}{1+L}\right)\Delta T(s) = -\frac{G^2}{(1+L)^2}\Delta T(s)$$

Sensibilità alle variazioni di parametri - 4

- La corrispondente variazione relativa della FdT complessiva (ad anello chiuso) è:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta F(s)}{F(s)} = -\frac{L(s)}{1+L(s)}\frac{\Delta T(s)}{T(s)} = -S_c(s)\frac{\Delta T(s)}{T(s)}}$$

Funzione di *sensitività complementare*

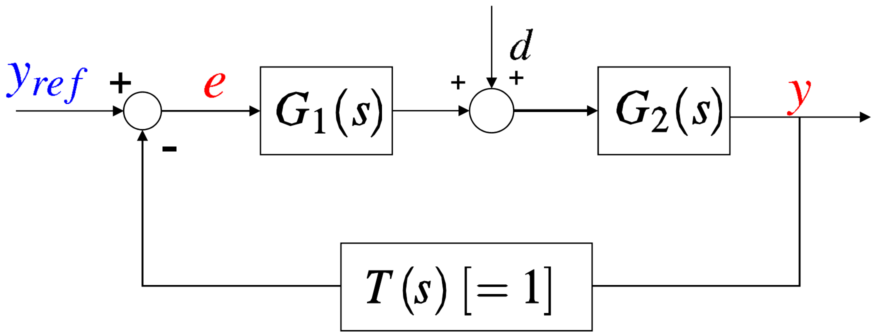
- La funzione di *sensitività complementare* qui definita è sempre tale che $S(s)+S_c(s)=1$, pertanto se si vuole che la funzione di sensitività sia $\simeq 0$, la funzione di sensitività complementare sarà $\simeq 1$

Sensibilità alle variazioni di parametri - 5

- **NON** è quindi possibile ridurre l'errore relativo introdotto nella risposta ad anello chiuso dal parametro del trasduttore, perché ciò provocherebbe un peggioramento della sensibilità rispetto a variazioni dei parametri nell'impianto (o comunque nel ramo diretto), che si vuole invece minimizzare (e quindi si vuole L $\gg$ 1!)
- Ciò dimostra l'importanza della scelta dei trasduttori (e circuiti di acquisizione) e della loro *qualità*, per l'ingegneria dei sistemi di controllo

Sensibilità ai disturbi

- Si consideri lo schema modificato:



- **N.B.:** G_1 non è necessariamente la FdT del solo controllore e G_2 non è necessariamente la FdT del solo impianto, ma ciascuna potrebbe includere l'effetto di attuatori o altri elementi di interconnessione (punto di ingresso di *d* ignoto!)

Sensibilità ai disturbi - 1

- Si ha allora che:

$$Y = \frac{L(s)}{1+L(s)}Y_{ref} + \frac{G_2(s)}{1+L(s)}D \quad \Rightarrow \quad Y = F(s)Y_{ref} + G_2(s)S(s)D$$

$$\boxed{\text{Se } |\mathbf{L}(\mathbf{j}\omega)| \gg \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |F(j\omega)| \cong 1 \\ |S(j\omega)| \ll 1 \end{cases}}$$

- **N.B.:** in questo caso ($T(s) = 1$), $F(s)$ coincide con la funzione di sensitività complementare $S_c(s)$, che come detto in precedenza è sempre t.c. la somma con la funzione di sensitività è $S(s) + S_c(s) = 1$

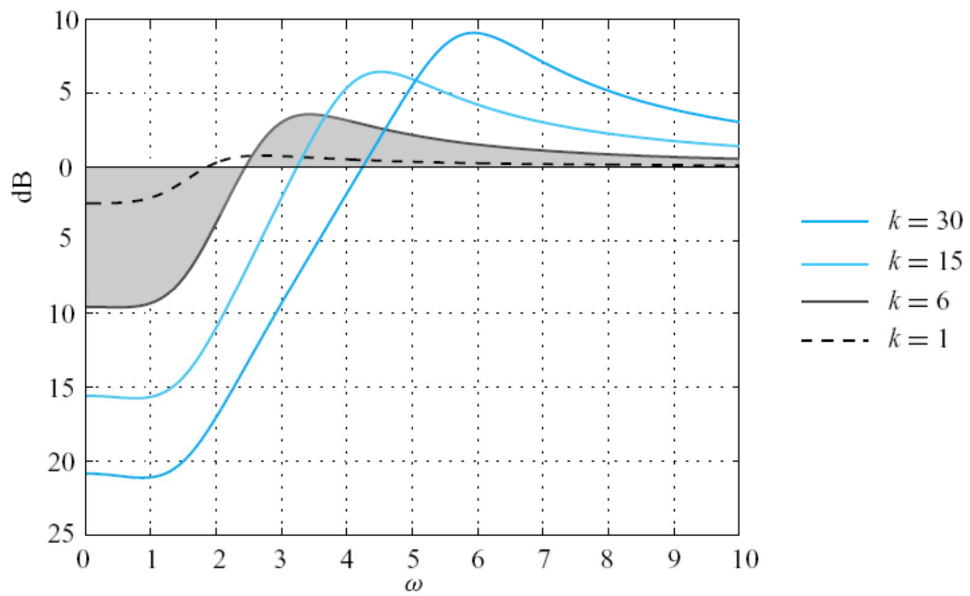
Sensibilità ai disturbi - 2

- **NOTA:** la funzione di sensitività *S(s)* influenza quindi anche l'effetto del disturbo sull'uscita
- Quest'ultimo risulta quindi tanto più attenuato quanto più è elevato il guadagno della FdT di anello (condizione che come detto riduce anche l'effetto di variazioni parametriche nel ramo diretto)
- Nella pratica, non è possibile ottenere $|L(j\omega)| \gg 1$ fino a frequenze elevate (ANZI!), per cui è necessario valutare adeguatamente entro quali frequenze è lecito ipotizzare la presenza del disturbo, per attenuarlo opportunamente

Sensibilità ai disturbi - 3

- **Esempio:** F.d.t. d'anello $L(s) = \dfrac{k}{s^2 + 2s + 3}$

Influenza di *k* sulla sensitività *S(s)*



Sensibilità ai disturbi - 4

- In sostanza il progetto di controllo richiede un compromesso sulla sensitività *S(s)* alle varie frequenze…

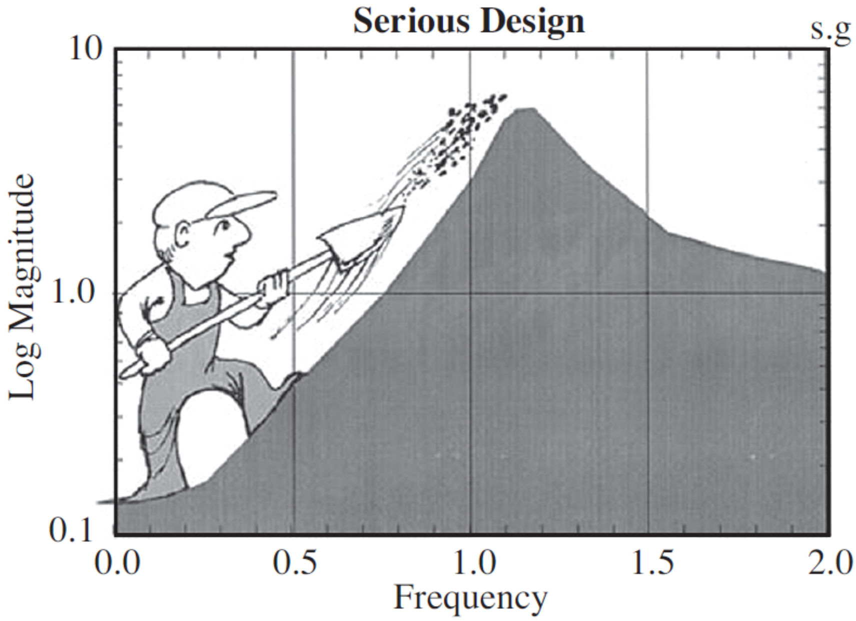
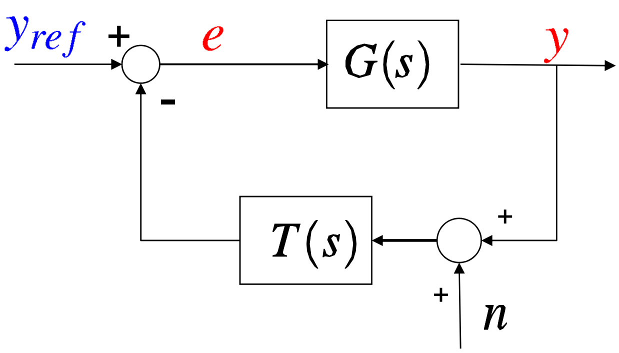


Illustrazione di Gunter Stein, *Respect the unstable* (IEEE Control Systems Magazine, Vol. 23 N. 4 2003)

Sensibilità ai disturbi - 5

- Considerazioni analoghe si possono applicare in caso di **rumori di misura** (*noise*), cioè di segnali indesiderati che entrino nell'anello come segue:



Funzioni di trasferimento
BANDA PASSANTE

Banda passante

- Si definisce **banda passante** di una FdT G(s) la pulsazione alla quale il modulo della relativa funzione di risposta armonica è inferiore di 3 dB rispetto al valore statico G(0)
- Per un sistema in retroazione, ipotizzando che il ramo di retroazione abbia FdT reale (T(s) = *h* > 0)

$$F(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + hG(j\omega)} = \frac{1}{h + \frac{1}{G(j\omega)}}$$

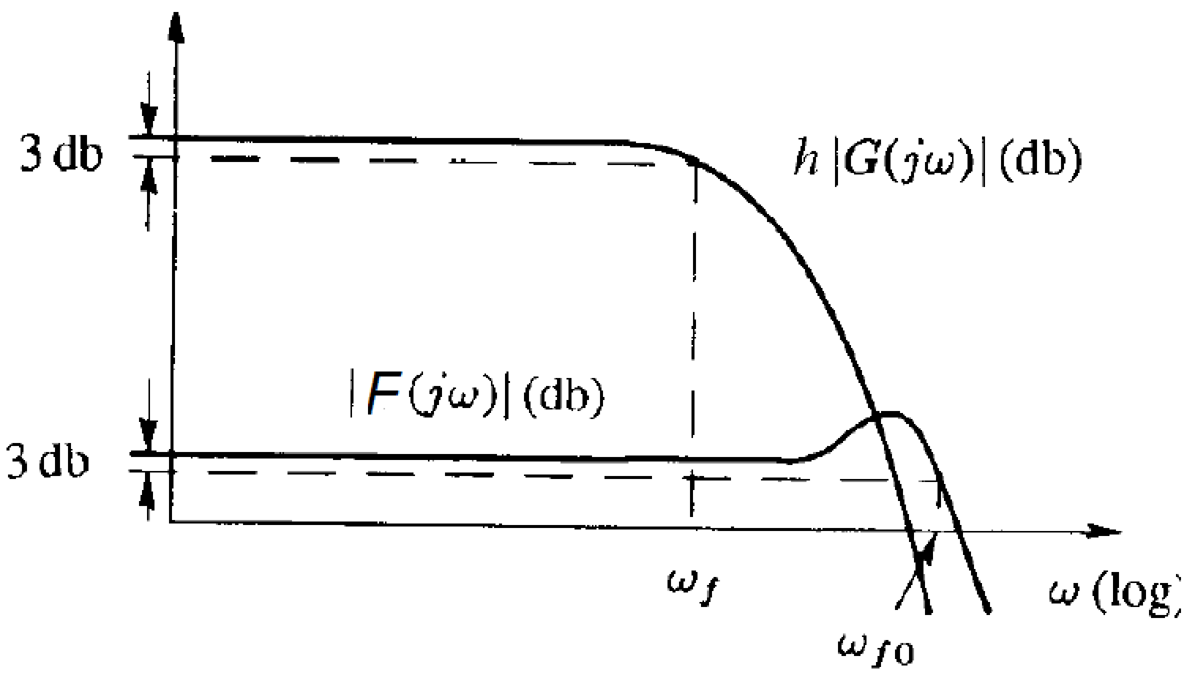
- Pertanto, per le pulsazioni alle quali $h|G(j\omega)| \gg 1$

$$\Rightarrow \quad F(j\omega) \simeq \frac{1}{h}$$

Banda passante - 1

- Anche se la FdT in catena diretta ha grandi variazioni di modulo, nella banda in cui la FdT di anello ha guadagno elevato la FdT del sistema in retroazione è quasi costante
- Si evidenzia anche che la FdT di un **trasduttore ideale** dovrebbe essere reale e con guadagno unitario (h = 1)
- Infine, il sistema in retroazione ha certamente **banda passante più ampia** di uno in catena aperta composto dagli stessi elementi sul ramo diretto, come si può evidenziare analizzando i diagrammi di Bode

Banda passante - 2



Banda passante - 3

- Esempio: $G(s)=\dfrac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad G(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega+1}$

$$|G(j\omega)|_{\omega=0}=1; \quad |G(j\omega)|_{\omega=1}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (-3\,dB)$$

Banda passante catena diretta

$$F(s)=\frac{\frac{1}{s+1}}{1+\frac{h}{s+1}}=\frac{1}{s+1+h} \quad \Rightarrow \quad F(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1+h}$$

$$|F(j\omega)|_{\omega=0}=\frac{1}{1+h}; \quad |F(j\omega)|_{\omega=1+h}=\frac{1}{\sqrt{2}(1+h)} \quad (F(0)-3\,dB)$$

Banda passante anello chiuso (> 1 se h > 0)

Banda passante - 4

- **NOTA:** in generale, la banda passante di un **sistema del primo ordine** è <u>sempre</u> legata alla sua costante di tempo ed è:

$$\boxed{\omega_f=\frac{1}{\tau}}$$

- Infatti:

$$G(s)=\frac{K}{\tau s+1} \quad \Rightarrow \quad G(j\omega)=\frac{K}{j\tau\omega+1}$$

$$|G(j\omega)|_{\omega=0}=K; \quad |G(j\omega)|_{\omega=\frac{1}{\tau}}=\frac{K}{\sqrt{2}} \quad (G(0)-3\,dB)$$

Banda passante

Banda passante e *prontezza di risposta* del sistema

- Poiché come noto la costante di tempo τ esprime direttamente anche il tempo di assestamento per la risposta al gradino ($T_a = 3\tau$), si possono fare le seguenti considerazioni:
  - La **prontezza di risposta** di un sistema è tanto maggiore (T_a piccolo) quanto più è ampia la sua banda passante ($T_a = 3/\omega_f$ nel sis. 1° ordine)
  - La chiusura in retroazione serve appunto ad aumentare la banda passante e quindi la prontezza di risposta

Banda passante e *prontezza di risposta* del sistema-1

- **NOTA:** Per i sistemi del <u>secondo ordine</u>, il tempo di assestamento è legato alla pulsazione critica in un modo analogo a quello con cui è legato alla banda passante nei sistemi del primo ordine:

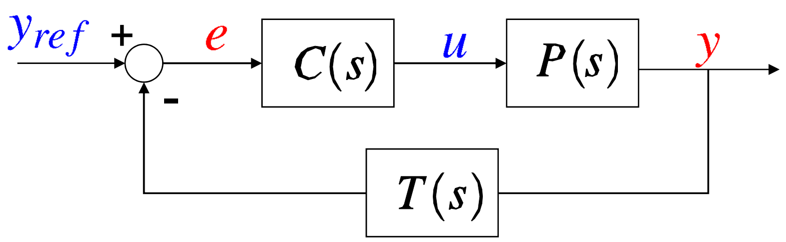
$$T_a = 3/(\delta\omega_n)$$

- In questo caso si può dire (purchè il coefficiente di smorzamento δ sia accettabile…) che:
  - La **prontezza di risposta** di un sistema del secondo ordine è tanto maggiore quanto più è elevata la sua pulsazione naturale ω_n

Funzioni di trasferimento
CRITERIO di NYQUIST / MARGINI di STABILITA'

Stabilità e FdT di anello

- La stabilità del sistema in retroazione:



si riconduce allo studio della FdT di anello (prodotto di tutte le FdT dei blocchi nel loop), in questo caso $L(s) = C(s)P(s)T(s)$

- Per lo studio dei poli, si considera l'equazione caratteristica (denominatore della FdT ad anello chiuso)

$$1 + L(s) = 0$$

Stabilità e FdT di anello - 1

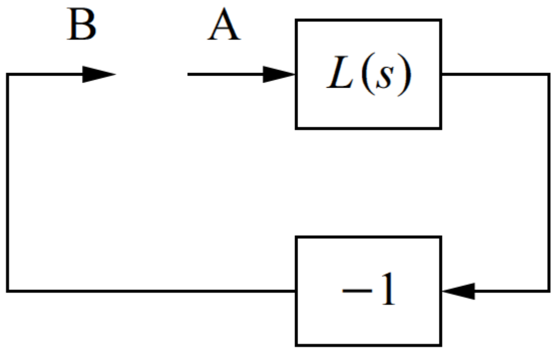
- L'equazione 1 + L(s) = 0 è peraltro una FdT razionale a sua volta, con poli e zeri
- In particolare, gli **zeri** di 1 + L(s) = 0 sono i **poli** della FdT del sistema chiuso in retroazione
- Tuttavia, la stabilità del sistema in retroazione può essere studiata anche analizzando le informazioni relative alla sola FdT di anello L(s), sfruttando opportuni risultati teorici derivanti da studi nel dominio della frequenza

Criterio di Nyquist

- Gli studi di Nyquist sui sistemi in retroazione (1932) introducono criteri grafici basati sui diagrammi polari della risposta armonica, su alcune considerazioni intuitive e su risultati teorici dell'analisi di funzioni complesse (*principio dell'argomento* o *lemma di Cauchy*)
- L'intuizione base di Nyquist è quella di determinare le condizioni limite nelle quali il sistema in retroazione ha un comportamento oscillatorio persistente, cioè *marginalmente* (o semplicemente) stabile

Criterio di Nyquist - 1

- Con riferimento allo schema ottenuto aprendo l'anello considerato in precedenza:



supponendo che nel punto A vi sia un segnale sinusoidale con pulsazione ω_0 , se nel punto B si ritrova un segnale sinusoidale con stessa pulsazione, ampiezza e fase, chiudendo l'anello l'oscillazione si autososterrebbe

Criterio di Nyquist - 2

- Affinchè ciò avvenga, occorre che $L(s)$ sia stabile e che:

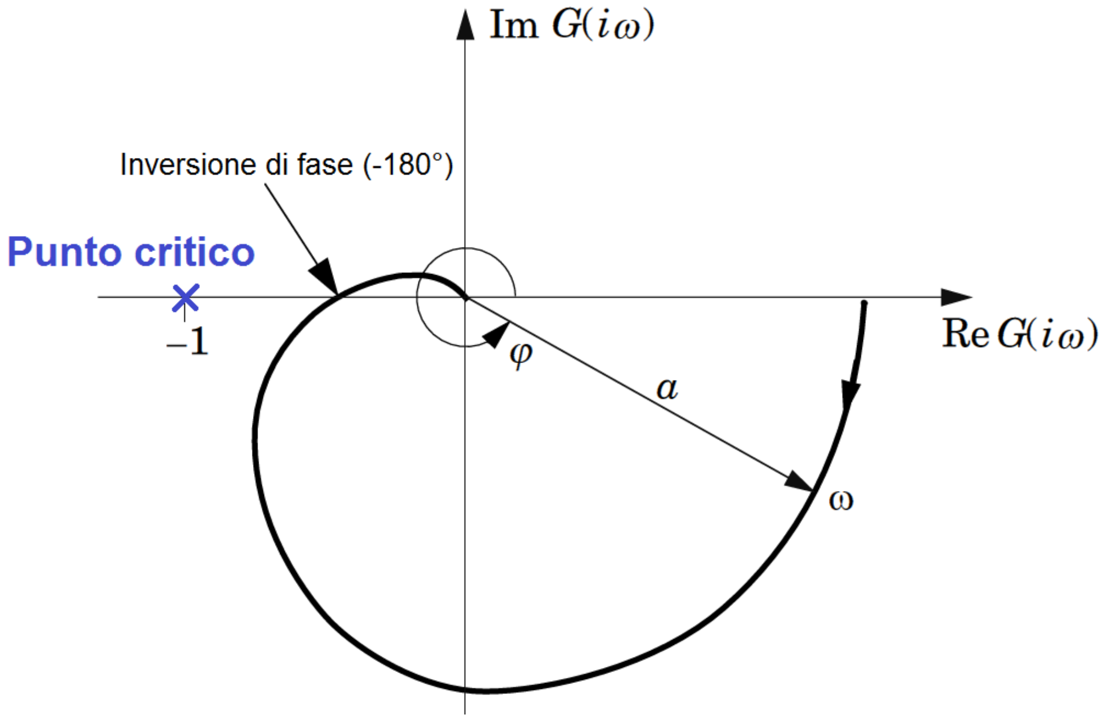
$$L(j\omega_0) = -1$$

- Ciò significa che nell'analisi del diagramma polare (o diagramma di Nyquist) di $L(j\omega)$, il punto (-1,0) del piano complesso è il **punto critico** che determina il limite di stabilità
- Se il diagramma di Nyquist della FdT di anello (**N.B:** non quella del sistema chiuso in retroazione) passa per tale punto, il sistema ad anello chiuso sarà marginalmente stabile

Criterio di Nyquist - 3

- Qualora il diagramma di Nyquist non passi per il punto critico, è necessario formalizzare i criteri per stabilire l'effettiva stabilità o instabilità
- Intuitivamente, definita ω_π la pulsazione alla quale il diagramma di Nyquist di L(s) incrocia l'asse reale negativo ($\arg[L(j\omega_\pi)] = -\pi$), è ragionevole pensare che se il guadagno di L(s) a tale pulsazione è minore di uno, nel punto B dello schema a blocchi *aperto* visto in precedenza si avrà la sinusoide entrante in A, ma attenuata in ampiezza, il che è indicativo di comportamento stabile ad anello chiuso..

Criterio di Nyquist - 4



Criterio di Nyquist - 5

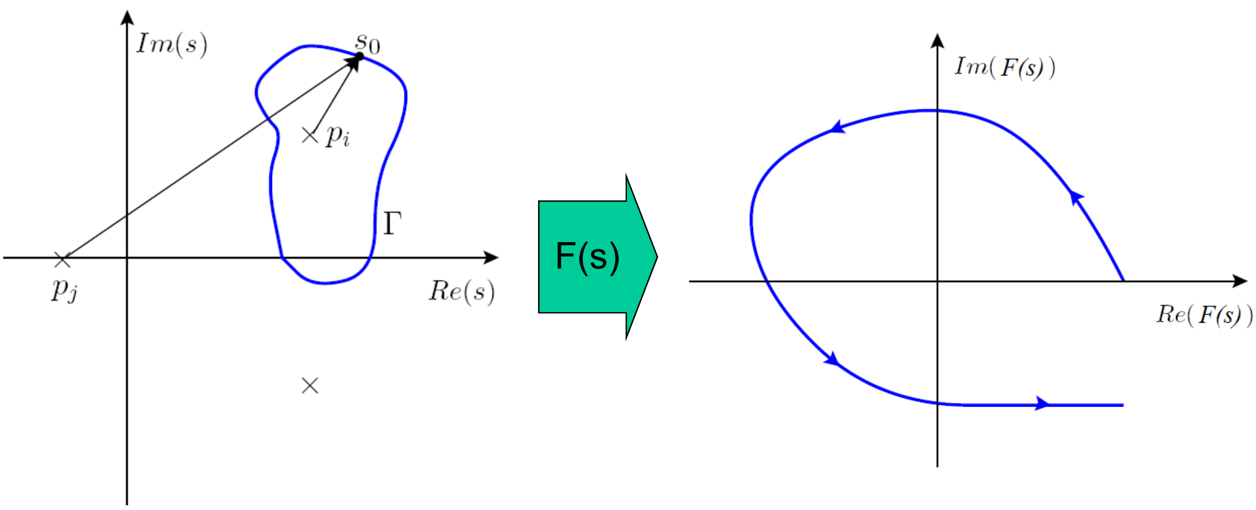
- Formalmente, il *principio dell'argomento* di funzioni complesse afferma che per ogni curva chiusa Γ nel piano complesso della variabile *s*, variando *s* in modo da percorrere tale curva per un giro completo in senso orario, l'argomento di una funzione F(s) varia come segue:

$$\Delta \arg[F(s)] = 2\pi(n_p - n_z)$$

con n_p = numero di poli di F(s) circondati da Γ e
n_z = numero di zeri di F(s) circondati da Γ

Criterio di Nyquist - 6

- Ovvero, la curva ottenuta nel piano complesso di F(s), mappando Γ tramite F, circonda l'origine un numero di volte pari alla differenza tra il numero di poli e di zeri di F(s) circondati da Γ

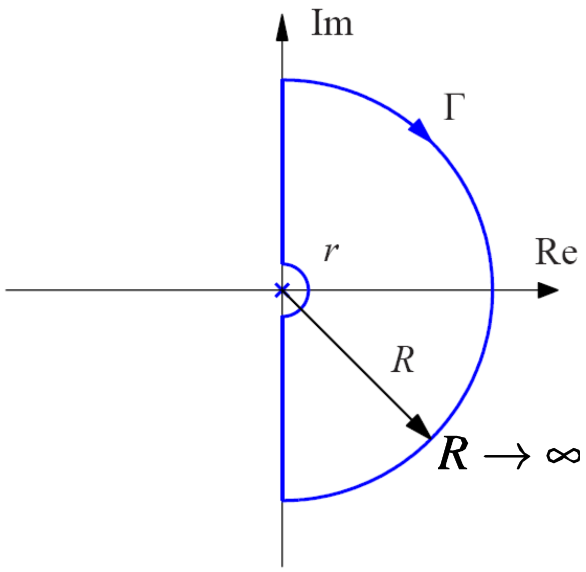


Criterio di Nyquist - 7

- Il criterio di Nyquist applica il principio dell'argomento considerando la curva Γ che racchiude il semipiano complesso a parte reale positiva (*regione di instabilità*), costituita dall'asse immaginario (a partire da $\omega = -\infty$) e da una circonferenza di raggio $R \to \infty$
- Eventuali poli puramente immaginari sono esclusi dalla curva tramite semicirconferenze di raggio infinitesimo

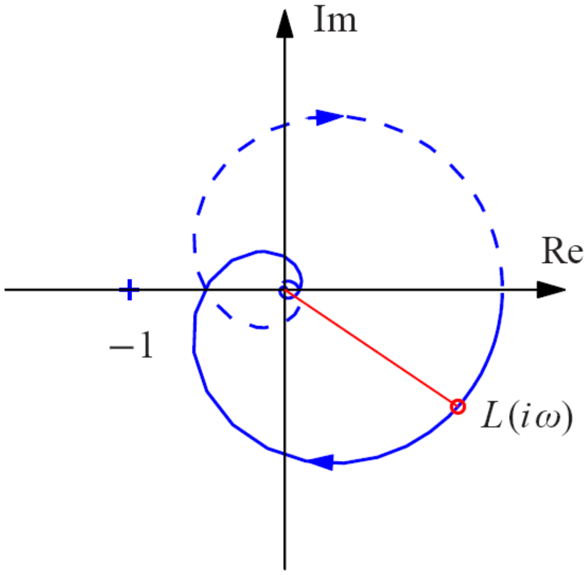
Criterio di Nyquist - 8

- Contando le rotazioni attorno all'origine della curva Γ mappata tramite $L_1(s) = 1 + L(s)$ si può determinare il numero di zeri (poli del sistema *closed-loop*) instabili



Criterio di Nyquist - 9

- Equivalentemente, si possono contare le rotazioni attorno al punto critico (-1,0) del **diagramma di Nyquist completo** della FdT di anello L(s)



Criterio di Nyquist - 10

N.B.: Il *diagramma di Nyquist completo* (cioè per $\omega \in [-\infty; +\infty]$) si ottiene ribaltando rispetto all'asse reale il diagramma di Nyquist già descritto

Teorema (criterio di Nyquist semplificato): sia L(s) una FdT di anello non avente poli a parte reale positiva (ed eventuali poli puramente immaginari siano semplici, cioè con molteplicità unitaria); allora, il corrispondente sistema chiuso in retroazione è stabile se il diagramma di Nyquist di L(s) non circonda né tocca il punto critico (-1,0)

Criterio di Nyquist - 11

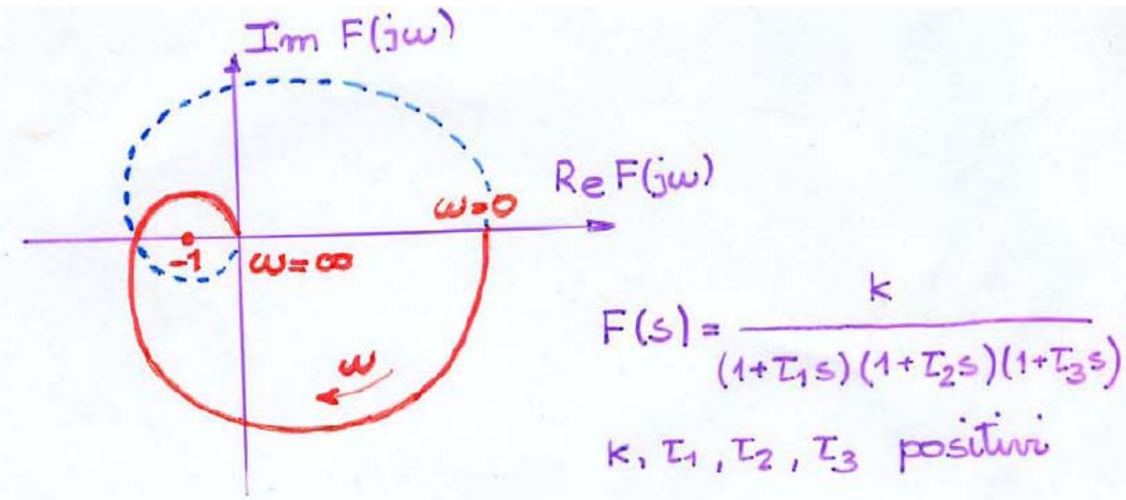
Teorema (criterio di Nyquist): sia L(s) una FdT di anello avente P poli a parte reale positiva e sia N il numero di rotazioni del diagramma di Nyquist di L(s) attorno al punto critico (-1,0), conteggiate con <u>segno positivo</u> se compiute in <u>senso orario</u>, con <u>segno negativo</u> se compiute in <u>senso antiorario</u>.

Il numero di poli a parte reale positiva del sistema chiuso in retroazione è Z = P + N

N.B.: affinchè una rotazione sia inclusa nel conteggio è necessario che il punto critico non venga toccato

Criterio di Nyquist - 12

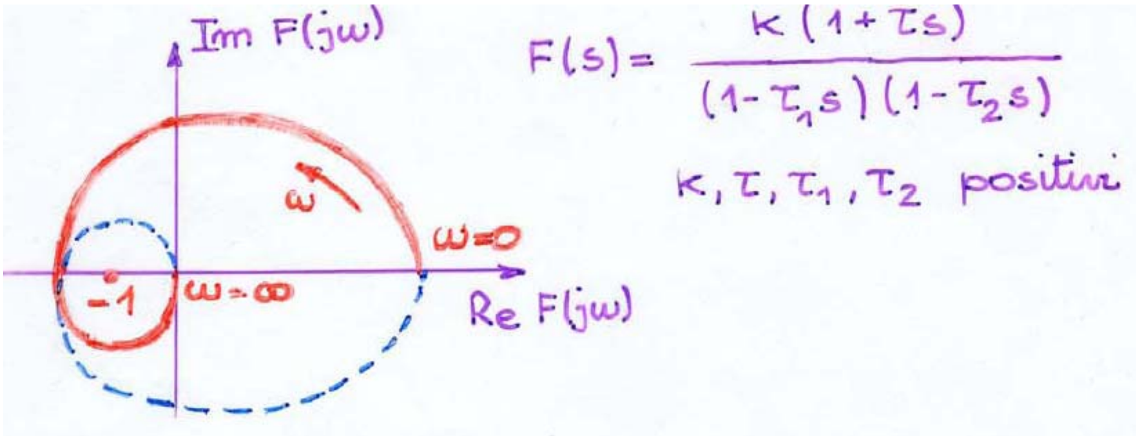
Esempio:



Due rotazioni in senso orario ➔ poli a parte reale positiva nel sistema *closed-loop* (instabile)

Criterio di Nyquist - 13

Esempio:

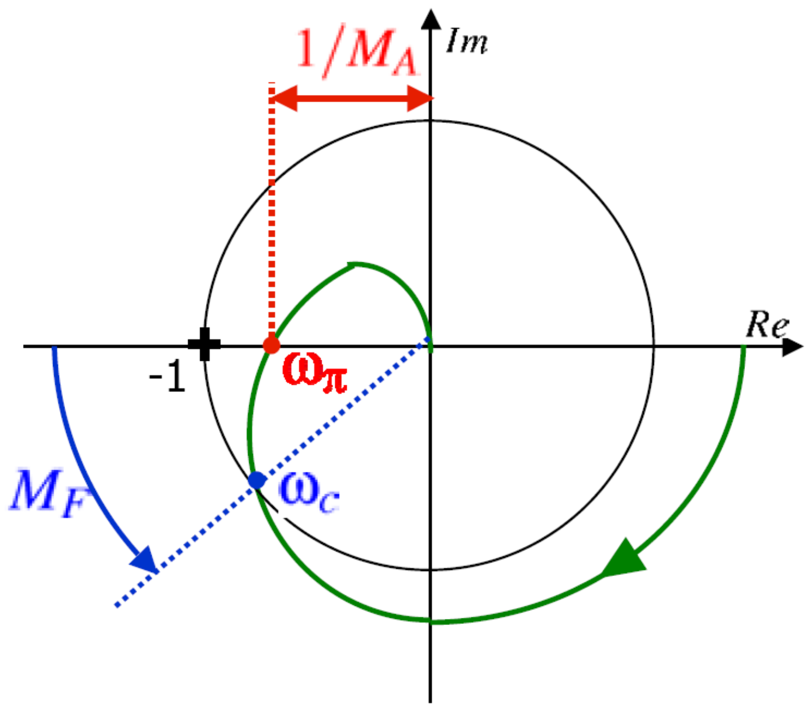


Due rotazioni in senso anti orario ➔ <u>nessun</u> polo (P = 2, N = -2 → Z = 2 – 2 = 0) a parte reale > 0 nel sistema *closed-loop* (stabile)

Margini di stabilità

- Il criterio di Nyquist è utile soprattutto come giustificazione teorica al seguente metodo per <u>quantificare la *robustezza* della stabilità</u> in un sistema ad anello chiuso
- Infatti, un sistema closed-loop è tanto più lontano dall'instabilità quanto più il diagramma di Nyquist della sua FdT di anello L(s) è lontano dal punto critico, <u>se L(s) **NON** ha poli a parte reale > 0</u>
- In tal caso, la distanza del diagramma di Nyquist dal punto critico si può valutare con i **margini di stabilità** (margine di ampiezza e margine di fase)

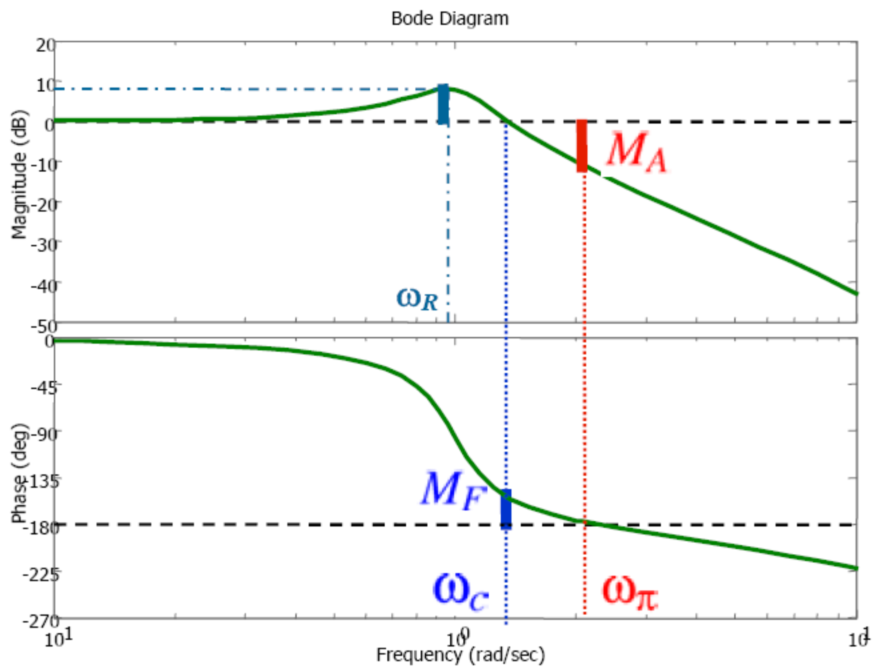
Margini di stabilità - 1



- **Margine di ampiezza:** inverso del guadagno di anello a ω_π (pulsazione di intersezione con l'asse reale negativo)
- **Margine di fase:** angolo che occorre sottrarre alla fase della FdT di anello a ω_c (pulsazione di incrocio con la circonferenza di raggio unitario) per ottenere $-\pi$

Margini di stabilità - 2

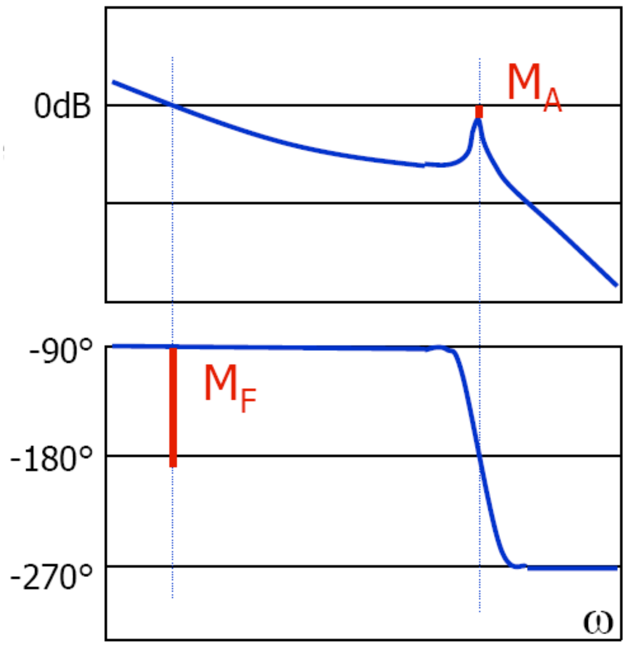
- I margini di ampiezza e fase si possono determinare anche sul diagramma di Bode, <u>sempre considerando L(s):</u>



Margini di stabilità - 3

N.B.: i margini di ampiezza e fase vanno considerati insieme per valutare la robustezza della stabilità

Esempio con margine di fase molto elevato (90°)
MA margine di ampiezza molto piccolo
→attenzione ai sistemi con coppie di poli poco smorzati
O zeri alternati a poli

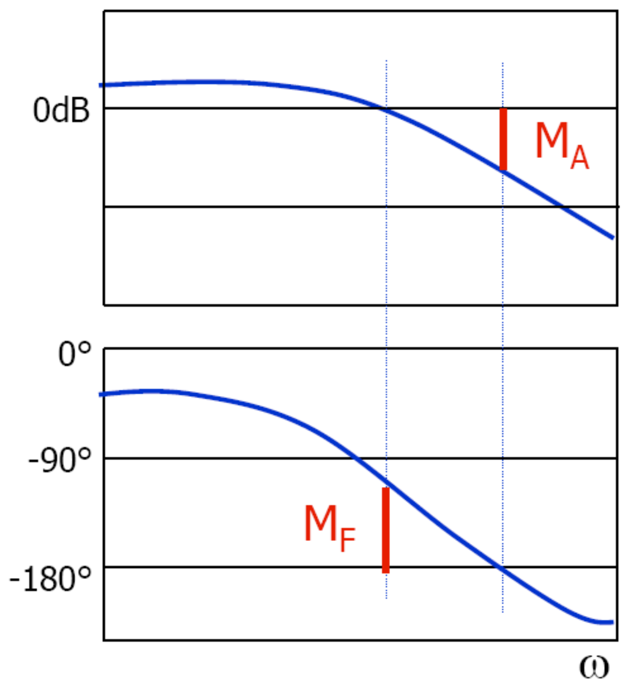


Margini di stabilità - 4

RUOLO dei margini di ampiezza e fase nel progetto robusto:

Margine di ampiezza: MAX variazione del guadagno di anello che NON pregiudica la stabilità

Margine di fase: MAX variazione dello sfasamento della FdT di anello che NON pregiudica la stabilità



Margini di stabilità - 4

VALORI TIPICI dei margini di ampiezza e fase che si desidera ottenere dal progetto di controllo:

Margine di ampiezza: 4 - 6 (12 - 16 dB)

Margine di fase: 45 - 60°

FUNZIONI DI TRASFERIMENTO
- Sensibilità
- Banda passante
- Criterio di Nyquist / Margini di stabilità

FINE