



Fondamenti di Automatica

Controllo con retroazione dello stato

Dott. Ing. Marcello Bonfè

Dipartimento di Ingegneria - Università di Ferrara

Tel. +39 0532 974839

E-mail: marcello.bonfe@unife.it



Controllo con retroazione dello stato RETROAZIONE STATO-INGRESSO



Controllo di un sistema LTI

- Come visto nell'introduzione, la strategia di controllo più efficace e robusta, nella maggior parte delle applicazioni pratiche, è quella in **retroazione**
- Nel controllo in retroazione, il segnale di controllo che viene applicato all'ingresso del sistema da controllare (*plant*) è calcolato sulla base dello stato o dell'uscita del *plant* stesso, tramite una delle due possibili alternative:
 - a) **Retroazione algebrica (o statica)**: il segnale di controllo è funzione solo del valore corrente dello stato (o dell'uscita)
 - b) **Retroazione dinamica**: il controllore è a sua volta un sistema dinamico, avente un proprio vettore di stato distinto da quelle del *plant*



Controllo di un sistema LTI - 1

- L'obiettivo del **progetto di una retroazione (algebrica o dinamica)**, per un sistema LTI, è quello di rendere il sistema in catena chiusa stabile rispetto all'origine ($x = 0$)
- Fare riferimento solo allo stato $x = 0$ non significa perdere generalità, in quanto qualsiasi altro stato x_1 diverso da 0 può essere ricondotto all'origine tramite la semplice traslazione $x' = x - x_1$
- Inoltre, lo stato $x = 0$ può anche essere rappresentativo delle piccole variazioni rispetto ad un moto o a un punto di equilibrio per un sistema nonlineare, per il quale si considera il modello linearizzato per approssimazione (sviluppo in serie di Taylor, vedi pag. 128-130 - Analisi)



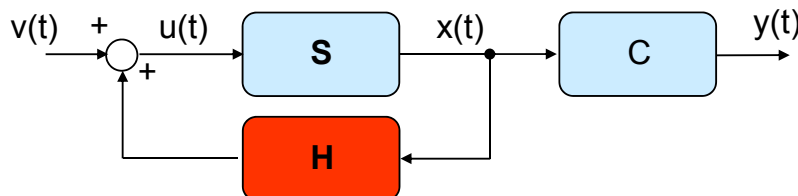
Retroazione algebrica stato-ingresso

➔ Dato il sistema da controllare:

$$S = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

con $x \in \mathbf{R}^n$ e $u \in \mathbf{R}^r$ e per il quale si suppone che lo stato sia interamente accessibile, si realizzi la **retroazione algebrica stato-ingresso**:

$$u(t) = Hx(t) + v(t)$$



Retroazione algebrica stato-ingresso - 1

➔ Il sistema in catena chiusa (*closed-loop*), o sistema controllato, ha nuova matrice di sistema **A+BH**:

$$S_{c.l.} = \begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BH)x(t) + Bv(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

➔ **Teorema:** gli autovalori di **(A+BH)** sono assegnabili arbitrariamente in funzione della matrice H ($r \times n$) se e solo se il sistema da controllare (A, B, C) è **completamente raggiungibile e controllabile**



Retroazione algebrica stato-ingresso - 2

- ➔ Ciò significa che dati gli n autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ che si vogliono assegnare con la retroazione, il sistema di n equazioni:
$$\det(\lambda I - A - BH) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$
ammette soluzione negli $(n \times r)$ parametri della matrice H se e solo se il sistema (A, B, C) è completamente raggiungibile e controllabile
- ➔ Se $r = 1$ (sistema a singolo ingresso) la soluzione è unica [n incognite con $(n \times 1)$ parametri]



Retroazione algebrica stato-ingresso - 2

- ➔ Gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ devono essere scelti in modo che se complessi, siano presenti in coppia con il relativo complesso coniugato
- ➔ Ovviamente, l'obiettivo di stabilizzazione del sistema controllato richiede che tutti gli autovalori assegnati abbiano **parte reale negativa** (o **modulo inferiore a uno**, per sistemi discreti)



Retroazione algebrica stato-ingresso - 3

- ➔ Se il sistema da controllare non è completamente raggiungibile e controllabile, scomponendolo:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{A}_{c1} & \hat{A}_{c2} \\ 0 & \hat{A}_{c3} \end{bmatrix}}_{\hat{A}_c} z(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{B}_{c1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{B}_c} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{C}_{c1} & \hat{C}_{c2} \end{bmatrix}}_{\hat{C}_c} z(t) \end{cases}$$

ed effettuando la retroazione stato-ingresso:

$$u(t) = \underbrace{[H_1 \ H_2]}_H z(t) + v(t)$$



Retroazione algebrica stato-ingresso - 4

- ➔ Si ottiene che la retroazione **NON** modifica gli autovalori della parte **non raggiungibile-controllabile**:

$$\hat{A}_c + \hat{B}_c H = \begin{bmatrix} \hat{A}_{c1} + \hat{B}_{c1} H_1 & \hat{A}_{c2} + \hat{B}_{c2} H_2 \\ 0 & \hat{A}_{c3} \end{bmatrix}$$

NOTA: questa matrice NON contribuisce agli autovalori...

- ➔ Se quest'ultima è asintoticamente stabile, allora il sistema è **stabilizzabile** tramite la retroazione
- ➔ Altrimenti, il problema di stabilizzazione del sistema controllato **NON** è risolvibile



Osservazioni

- ➔ La retroazione algebrica stato-ingresso può stabilizzare il sistema da controllare (*plant*), ma **NON** può modificarne la raggiungibilità e controllabilità, che dipendono essenzialmente dal modo in cui si combinano A e B (che rimarrà analogo passando ad A+BH e B)
- ➔ Le proprietà di osservabilità e ricostruibilità **possono** invece essere influenzate dalla retroazione, in base alla scelta degli autovalori assegnati per progetto (es. autovalori uguali possono dare luogo a modi non distinguibili)



Osservazioni (sull'osservabilità..)

- ➔ **Esempio:** si consideri un sistema con matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 1 \quad 1]$$

- ➔ Il sistema ha autovalori -1,-2 e -3 ed è sia raggiungibile-controllabile che osservabile-ricostruibile

$$P = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$Q^T = [C^T \ A^T C^T \ (A^T)^2 C^T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$



Osservazioni (sull'osservabilità..) - 1

- Per rendere più rapida la dinamica del secondo e terzo stato, viene progettata una retroazione stato-ingresso tale da posizionare entrambi gli autovalori corrispondenti in -5

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad A + BH = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

- Così facendo però, la matrice di osservabilità risulta di rango 2, quindi il sistema chiuso in retroazione non è più completamente osservabile

$$Q_{c.l.}^T = [C^T (A + BH)^T C^T ((A + BH)^T)^2 C^T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 25 \\ 1 & -4 & 19 \end{bmatrix}$$

\downarrow q_1 \downarrow q_2 \downarrow $-5q_1 - 6q_2$



Osservazioni (sull'osservabilità..) - 2

- In generale, possono anche esistere sistemi non osservabili in catena aperta che, tramite opportuno controllo in retroazione, diventino osservabili in catena chiusa. Es:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [c_1 \quad c_2] x(t) \end{cases}$$

risulta essere:

- NON osservabile in catena aperta, ma osservabile in catena chiusa, **SE** $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ e $H = [1 \quad 1]$
- Osservabile in catena aperta, ma NON osservabile in catena chiusa, **SE** $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ e $H = [2 \quad 1]$
- Osservabile sia in catena aperta che chiusa, **SE** $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ e $H = [1 \quad 1]$



Osservazioni pratiche

- ➔ Esistono diversi metodi numerici per risolvere il problema dell'assegnazione degli autovalori
- ➔ Il programma di calcolo Matlab® di Mathworks supporta il progetto di controllo con le funzioni:

$$K = \text{place}(A, B, p)$$

che assegna al sistema caratterizzato da (A, B) gli autovalori contenuti nel vettore p , e

$$k = \text{acker}(A, b, p)$$

applicabile ai sistemi ad ingresso singolo, che implementa una formula detta *di Ackermann*



Controllo con retroazione dello stato RETROAZIONE USCITA-INGRESSO



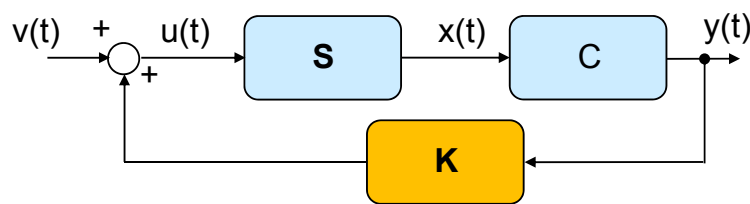
Retroazione algebrica uscita-ingresso

► Dato il sistema da controllare:

$$S = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

si realizzi la **retroazione algebrica uscita-ingresso**:

$$u(t) = Ky(t) + v(t)$$



Retroazione algebrica uscita-ingresso - 1

► Il sistema in catena chiusa (*closed-loop*), o sistema controllato, ha nuova matrice di sistema **A+BKC**:

$$S_{cl} = \begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BKC)x(t) + Bv(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

► **Teorema:** la retroazione algebrica dell'uscita sull'ingresso modifica gli autovalori della sola parte **osservabile-ricostruibile e raggiungibile-controllabile** del sistema da controllare (autovalori della matrice \hat{A}_{ocl})

► **NON** è detto che tali autovalori siano assegnabili arbitrariamente



Retroazione algebrica uscita-ingresso - 2

- Infatti, partendo dalla forma minima del sistema da controllare e scomponendo ulteriormente le parti raggiungibile-controllabile e non:

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{oc1} & \hat{A}_{oc2} \\ 0 & \hat{A}_{oc3} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} \hat{B}_{oc1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [\hat{C}_{oc1} \quad \hat{C}_{oc2}] w(t) \end{cases}$$

dalla retroazione uscita-ingresso risulta:

$$\hat{A}_{oc} + \hat{B}_{oc} K \hat{C}_{oc} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{oc1} + \hat{B}_{oc1} K \hat{C}_{oc1} & \hat{A}_{oc2} + \hat{B}_{oc1} K \hat{C}_{oc2} \\ 0 & \hat{A}_{oc3} \end{bmatrix}$$

NOTA: questa matrice NON contribuisce agli autovalori...



Retroazione algebrica uscita-ingresso - 3

- La retroazione **NON** modifica gli autovalori della parte non raggiungibile-controllabile (\hat{A}_{oc3})
- La parte non osservabile-ricostruibile non influenza l'uscita, pertanto non è interessata da tale retroazione
- L'assegnazione degli autovalori **non** è comunque arbitraria, in quanto i gradi di libertà nel progetto sono fissati dal prodotto tra numero di ingressi e numero di uscite ($m \times r$), il quale può essere inferiore al numero di autovalori da modificare





Controllo con retroazione dello stato OSSERVATORI DELLO STATO



Il problema della stima asintotica



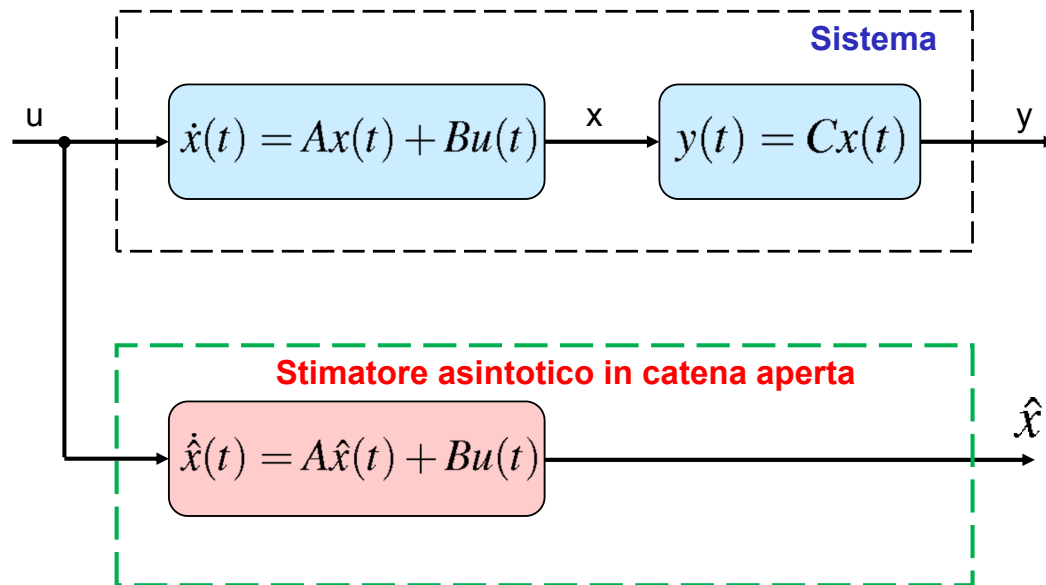
- **Problema della stima asintotica dello stato:** Dato un sistema S LTI (A,B,C), costruire un sistema dinamico, detto *osservatore (o stimatore) asintotico dello stato*, che, disponendo solamente di misure dell'ingresso $u(\cdot)$ e dell'uscita $y(\cdot)$, fornisca una stima dello \hat{x} stato x del sistema S. L'errore di stima deve annullarsi asintoticamente, cioè deve essere:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0$$



Osservatore asintotico in catena aperta

➔ Detto anche **osservatore modello**:



Osservatore asintotico in catena aperta - 1

➔ L'errore di stima risulta:

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$

➔ La convergenza a 0 dell'errore dipende da:

$$\dot{e}(t) = Ae(t)$$

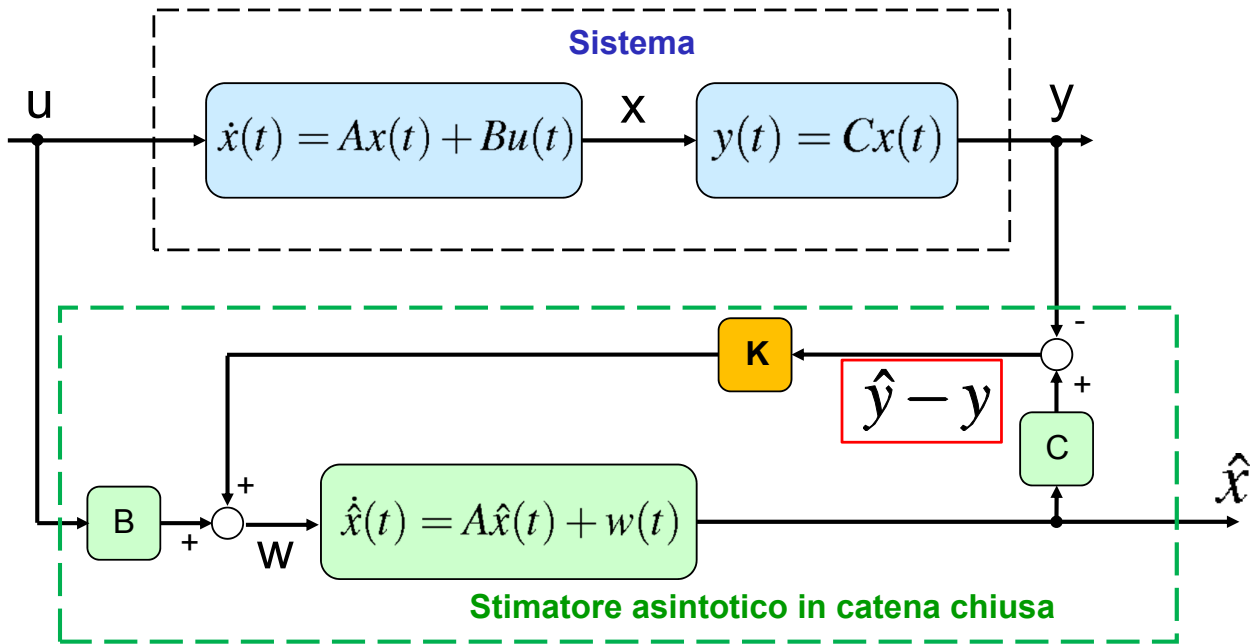
$$e(t) = e^{At}e(0)$$

➔ Pertanto l'errore di stima tende a zero quando il tempo tende all'infinito solo se il **sistema sotto osservazione** è **asintoticamente stabile**



Osservatore asintotico in catena chiusa

► Detto anche **osservatore identità**:



Osservatore asintotico in catena chiusa - 1

► L'**osservatore identità** è un sistema dinamico avente il seguente modello differenziale:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + \boxed{K(C\hat{x}(t) - y(t))} = \text{controllore dell'osservatore: } K(\hat{y} - y) \\ &= (A + KC)\hat{x}(t) - Ky(t) + Bu(t) \end{aligned}$$

► Definendo ancora l'errore di stima: $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$

$$\dot{e}(t) = A\hat{x}(t) + \cancel{Bu(t)} + KC\hat{x}(t) - KCx(t) - Ax(t) - \cancel{Bu(t)} =$$

$$\dot{e}(t) = (A + KC)e(t)$$

$$e(t) = e^{(A+KC)t} e(0)$$



Osservatore asintotico in catena chiusa - 2

- ➔ **Teorema:** gli autovalori di $(A+KC)$ (**matrice dell'osservatore**) sono assegnabili arbitrariamente in funzione di K ($m \times n$) se il sistema sotto osservazione è **completamente osservabile e ricostruibile** (è in forma minima)
- ➔ L'obiettivo di progetto dell'osservatore richiede che questo sia **asintoticamente stabile**, cioè che l'errore di stima tenda a zero
- ➔ Pertanto, gli autovalori da assegnare devono essere a **parte reale negativa**



Osservatore asintotico in catena chiusa - 3

- ➔ Se il sistema sotto osservazione non è in forma minima, si può scomporre:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{o1} & 0 \\ \hat{A}_{o3} & \hat{A}_{o2} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} \hat{B}_{o1} \\ \hat{B}_{o2} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [\hat{C}_{o1} \quad 0] z(t) \end{cases}$$

e nel progetto dell'osservatore risulta:

$$\hat{A}_o + K\hat{C}_o = \hat{A}_o + \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} [\hat{C}_{o1} \quad 0] = \begin{bmatrix} \hat{A}_{o1} + K_1\hat{C}_{o1} & 0 \\ \hat{A}_{o3} + K_2\hat{C}_{o1} & \hat{A}_{o2} \end{bmatrix}$$

NOTA: questa matrice NON contribuisce agli autovalori...



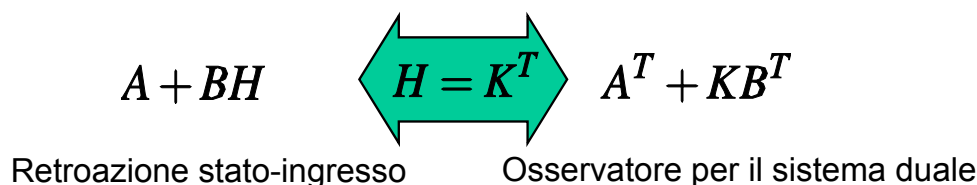
Osservatore asintotico in catena chiusa - 4

- Pertanto, non vengono modificati gli autovalori della parte non osservabile-ricostruibile
- Per sistemi **NON** in forma minima, l'errore di stima tende a zero (per $t \rightarrow \infty$) quando gli autovalori di \hat{A}_{o2} sono già a parte reale negativa e K_1 è progettata in modo da rendere tali anche quelli di $(\hat{A}_{o1} + K_1\hat{C}_{o1})$



Richiamo sulla dualità

- Per il principio di dualità, le proprietà di **raggiungibilità e controllabilità** di un **sistema** corrispondono a quelle di **osservabilità e ricostruibilità** di un **sistema duale** (e viceversa)
- Pertanto, le tecniche di progetto sviluppate per risolvere il problema di assegnazione degli autovalori di un sistema controllato (stabilizzazione) si applicano direttamente anche al progetto degli osservatori asintotici in catena chiusa (osservatori identità):





Controllo con retroazione dello stato

RETROAZIONE STATO STIMATO-INGRESSO



Utilizzo pratico degli osservatori asintotici



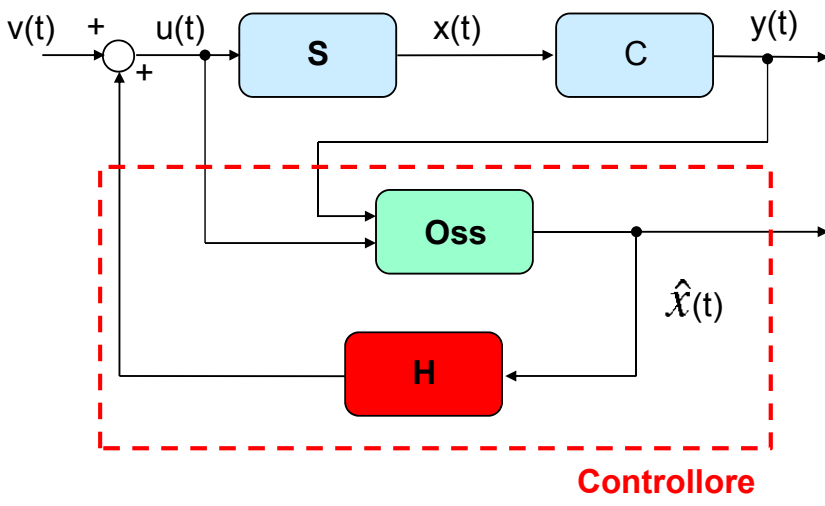
- Nelle applicazioni ingegneristiche, il vettore di stato non è sempre accessibile tramite misure dirette (C non ha rango = n)
- La retroazione stato-ingresso è però più potente di quella uscita-ingresso
- Il progetto di osservatori dello stato, con prestazioni dinamiche adeguate (errore di stima ridotto in tempi brevi), si integra con quello di una retroazione stato-ingresso, che diventa quindi una **retroazione (stato stimato)-ingresso**



Retroazione stato stimato-ingresso

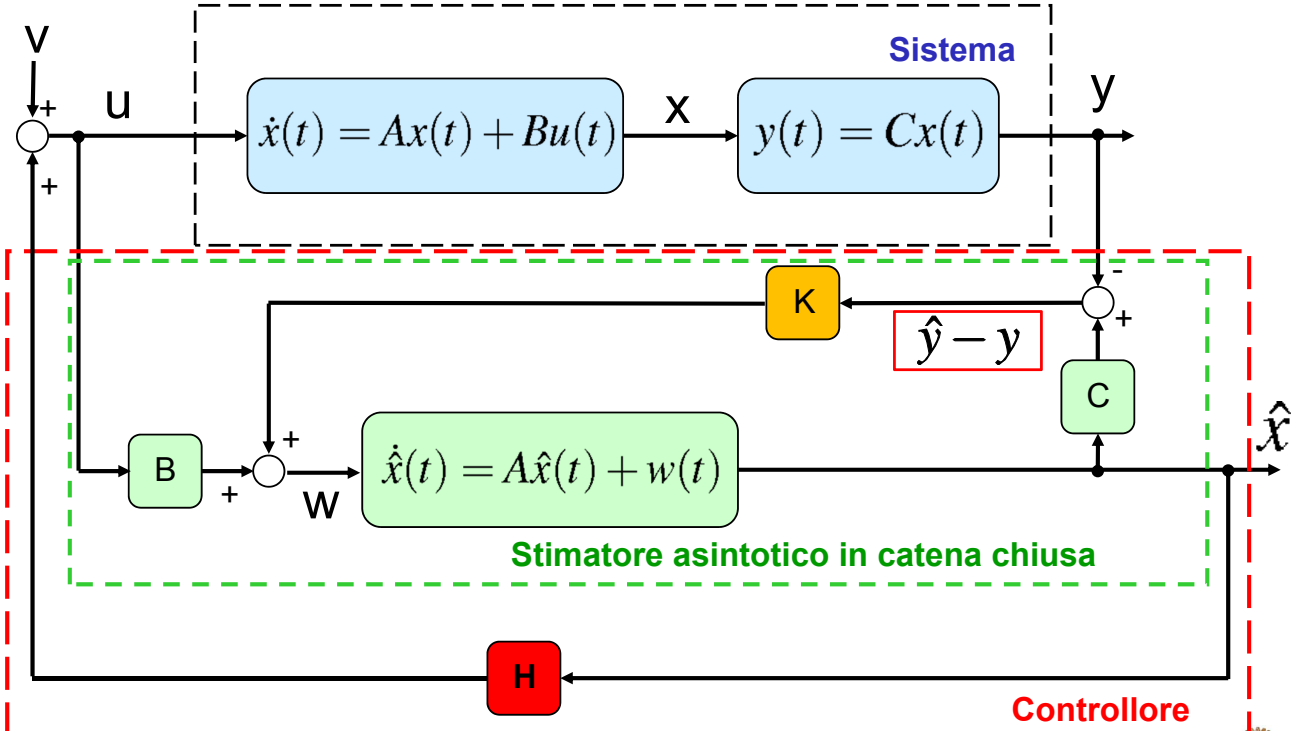
► Stato stimato tramite osservatore e retroazionato:

$$u(t) = H\hat{x}(t) + v(t)$$



Retroazione stato stimato-ingresso (dettaglio)

► Stato stimato tramite osservatore e retroazionato:



Retroazione stato stimato-ingresso - 1

➔ Il sistema complessivo risulta:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ u(t) = H\hat{x}(t) + v(t) \quad (\text{controllore}) \\ \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (\text{osservatore}) \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax + BH\hat{x}(t) + Bv(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) = (A + KC)\hat{x}(t) - KCx(t) + BH\hat{x}(t) + Bv \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BH)x(t) + BHe(t) + Bv(t) \\ \dot{e}(t) = (A + KC)e(t) \end{cases}$$



Retroazione stato stimato-ingresso - 2

➔ In forma diagonale a blocchi:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A + BH & BH \\ 0 & A + KC \end{bmatrix}}_{A_{c.l.}} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v(t) \end{cases}$$

➔ Gli autovalori del sistema in catena chiusa sono l'unione di quelli di **A+BH** (assegnabili arbitrariamente se il sistema è completamente **raggiungibile-controllabile**) con quelli di **A+KC** (assegnabili arbitrariamente se il sistema è completamente **osservabile-ricostruibile**).

➔ Il progetto del controllo è **indipendente** dal progetto dell'osservatore (**principio di separazione**)



Osservazioni finali

- Il controllore è realizzabile nella pratica, in quanto utilizza una stima dello stato che ottiene dal modello del sistema e dai segnali di ingresso e uscita (osservatore asintotico)
- Perché il controllore risolva il problema di regolazione a zero dello stato, con una velocità arbitraria, il sistema da controllare **deve essere completamente raggiungibile e completamente osservabile**
- Le prestazioni del sistema controllato sono più vicine al caso ideale (retroazione statica dello stato “vero” del sistema) quanto più velocemente va a 0 l'errore di stima.
- E' bene che gli autovalori della matrice $A+KC$ siano *più negativi* dell'autovalore *più negativo* della matrice $A+BH$
- E' però bene NON esagerare nel progetto dello stimatore. Se $A+KC$ ha autovalori *molto* negativi c'è il rischio di amplificare eventuali rumori di misura sull'uscita (che nella pratica saranno sempre presenti, grandi o piccoli che siano..)



Osservazioni finali - 1

- ➔ **TUTTI** i risultati visti in precedenza si applicano anche ai sistemi discreti
- ➔ Ovviamente, per tali sistemi le considerazioni fatte sulla **parte reale** degli autovalori (che deve essere **negativa**) vanno riviste in termini di **modulo degli autovalori** (che deve essere **inferiore a uno**)





CONTROLLO con RETROAZIONE dello STATO

- **Retroazione stato-ingresso**
- **Retroazione uscita-ingresso**
- **Osservatori dello stato**
- **Retroazione stato stimato-ingresso**

FINE

