Fondamenti di Automatica

Proprietà strutturali dei sistemi LTI

Dott. Ing. Marcello Bonfè
Dipartimento di Ingegneria - Università di Ferrara
Tel. +39 0532 974839
E-mail: marcello.bonfe@unife.it

Proprietà strutturali dei sistemi LTI
RAGGIUNGIBILITA' E CONTROLLABILITA'

Raggiungibilità e controllabilità

- Sono proprietà di un sistema che descrivono la possibilità di influire sul suo moto ***x(.)*** agendo opportunamente sulla funzione di ingresso ***u(.)***
- Tali proprietà sono **strutturali**, cioè **NON** dipendono dalla rappresentazione (scelta delle variabili di stato)
- Inoltre, **NON** sono modificabili tramite il controllo
- **Analisi** di Raggiungibilità / controllabilità:
  - Applicazione diretta: pianificazione dell'azione di controllo in catena aperta
  - Conseguenze: proprietà in catena chiusa

Raggiungibilità (partendo da $x(t_0)=x_0$, arrivare a… ??)

[Def.] Lo stato x_1 di un sistema dinamico è **raggiungibile** da x_0 nell'intervallo di tempo $[t_0,t_1]$ (con $t_0 < t_1$) se esiste una funzione di ingresso $u(.) \in \boldsymbol{U_f}$ tale che:

$$x_1 = x(t_1) = \phi(t_1, t_0, \underbrace{x(t_0)}_{x_0}, u(\cdot))$$

L'insieme degli stati raggiungibili all'istante t_1 a partire dall'evento (t_0,x_0) è indicato con

$$\mathcal{R}^+(t_0, t_1, x_0)$$

Controllabilità (arrivare a $x(t_1)=x_1$, partendo da… ??)

[Def.] Lo stato x_0 di un sistema dinamico è **controllabile** a x_1 nell'intervallo di tempo $[t_0,t_1]$ (con $t_0 < t_1$) se esiste una funzione di ingresso ammissibile $u(.) \in \boldsymbol{U_f}$ tale che:

$$x_1 = x(t_1) = \phi(t_1, t_0, \underbrace{x(t_0)}_{x_0}, u(\cdot))$$

L'insieme degli stati controllabili all'evento (t_1,x_1) a partire dall'istante t_0 è indicato con

$$\mathcal{R}^-(t_0, t_1, x_1)$$

Raggiungibilità e controllabilità

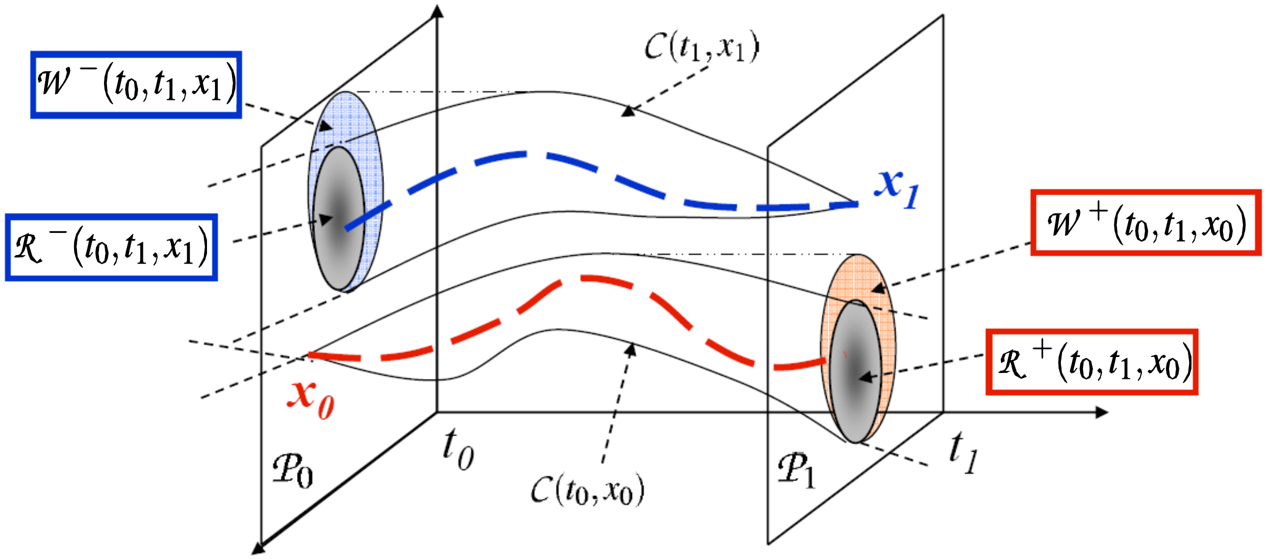
Per estensione:

L'insieme degli stati raggiungibili in un istante t qualunque dell'intervallo $[t_0,t_1]$ a partire dall'evento (t_0,x_0) è indicato con $\mathcal{W}^+(t_0, t_1, x_0)$

L'insieme degli stati controllabili all'evento (t_1,x_1) a partire da un istante t qualunque dell'intervallo $[t_0,t_1]$ è indicato con $\mathcal{W}^-(t_0, t_1, x_1)$

Interpretazione geometrica

C(t₁,x₁) e *C(t₀,x₀)*: insieme dei moti cui appartengono *(t₁,x₁)* e *(t₀,x₀)*



Relazioni tra gli insiemi

- Per ogni $x \in \boldsymbol{X}$ vale:

$$\mathcal{R}^-(t_0,t_1,x) \subseteq \mathcal{W}^-(t_0,t_1,x)$$

$$\mathcal{R}^+(t_0,t_1,x) \subseteq \mathcal{W}^+(t_0,t_1,x)$$

$$\mathcal{W}^+(t_0,t_1,x) \subseteq \mathcal{W}^+(t_0,t_1',x) \quad \text{se } t_1' \geq t_1$$

Raggiungibilità e controllabilità completa

- Un sistema si dice **completamente raggiungibile** dall'evento *(t_0,x)* nell'intervallo di tempo [t_0,t_1] se

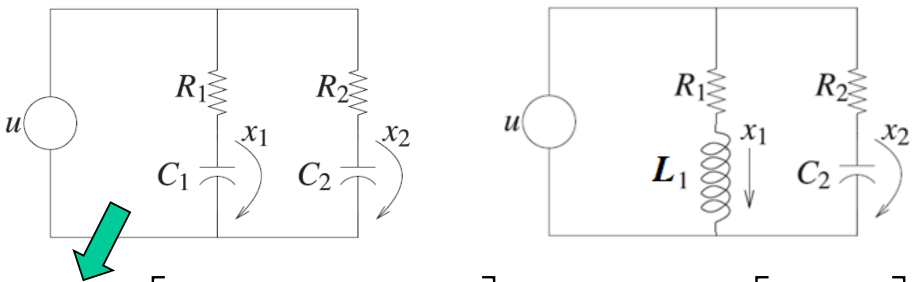
$$\mathcal{W}^+(t_0,t_1,x)=X$$

- Un sistema si dice **completamente controllabile** all'evento *(t_0,x)* nell'intervallo di tempo [t_0,t_1] se

$$\mathcal{W}^-(t_0,t_1,x)=X$$

Esempi: sistemi non completamente raggiungibili

1) Circuiti elettrici con rami in parallelo, per i quali sia $R_1*C_1 = R_2*C_2$ oppure $L_1/R_1 = R_2*C_2$

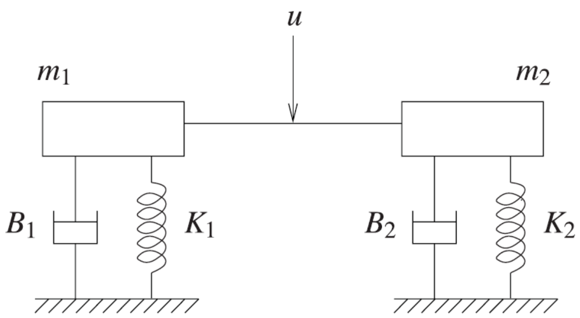


$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} u(t)$$

E' impossibile portare l'origine verso qualunque condizione in cui sia $x_1(t) \neq x_2(t)$

Esempi: sistemi non completamente raggiungibili - 1

2) Sistemi meccanici con strutture in parallelo, per i quali i parametri siano perfettamente bilanciati:



E' impossibile portare l'origine verso qualunque condizione in cui le posizioni dei due blocchi siano diverse!

N.B.: si vedrà nel seguito la formalizzazione di questa condizione

Raggiungibilità e controllabilità nei sistemi LTI

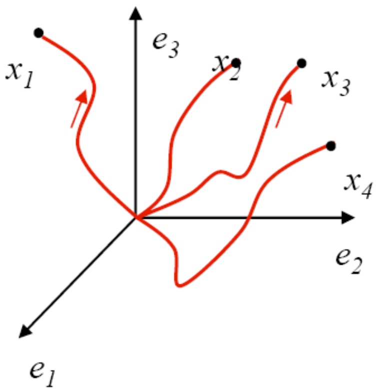
- Tali proprietà sono, come detto in precedenza, **strutturali** (**NON** dipendono dalla scelta delle variabili di stato) e **NON** sono modificabili tramite il controllo
- Per i sistemi LTI, si assume $\mathbf{t_0 = 0}$
- Per i sistemi LTI, si può considerare x = 0 come unico punto di interesse dell'analisi
- Si parla quindi di **raggiungibilità DALL'origine** e **controllabilità ALL'origine**

Raggiungibilità e controllabilità complete

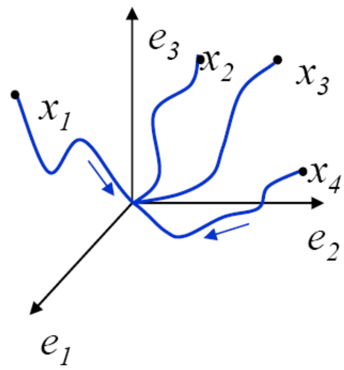
- Il sistema MIMO LTI t.continuo [t.discreto]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \left[x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)\right]$$

È completamente raggiungibile se qualunque stato può essere raggiunto da x=0 in un tempo finito



È completamente controllabile se x=0 può essere raggiunto da qualunque stato in t finito



Raggiungibilità e movimento forzato

- La possibilità di considerare x = 0 come unico punto di interesse nei sistemi LTI lega la raggiungibilità unicamente al **moto forzato**:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Tempo continuo

$$x(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i)$$

Tempo discreto

Raggiungibilità dei sistemi LTI discreti

- Insieme di stati **raggiungibili** in *k* passi per:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad x(0) = 0$$

$$\begin{aligned} x(1) &= Bu(0) \\ x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = ABu(0) + Bu(1) \\ x(3) &= Ax(2) + Bu(2) = A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2) \\ &\dots \\ x(k) &= \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}Bu(i) = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{k-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Perciò: $\mathcal{R}_k^+(0) = im\{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{k-1}B \end{bmatrix}\}$

  = ***sottospazio*** **stati raggiungibili** in *k* passi

Esempi

1) $$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$\mathcal{R}_k^+(0) = im\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_3 & \dots & a_3^{k-1} \end{bmatrix}\} = span\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$$

2) Idem, ma con $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\mathcal{R}_2^+(0) = im\{\begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}\} = \mathbb{R}^2$$

Raggiungibilità dei sistemi LTI discreti - 1

- L'insieme (o *sottospazio*) degli stati raggiungibili in *n* passi è anche l'insieme degli stati raggiungibili **dal sistema**
- Infatti, oltre gli *n* passi non è utile proseguire per via del teorema di Cayley-Hamilton, dal quale:

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \cdots - a_1 A - a_0 I$$

- Si definisce ***sottospazio* raggiungibile**

$$\mathcal{R}^+(0) = im\{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{n-1}B \end{bmatrix}\}$$

Controllabilità dei sistemi LTI t.discreti

- Si consideri ancora $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ con l'obiettivo di controllare (a 0) un certo x(0)≠0, in k passi:

$$0 = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i) \quad \Rightarrow \quad -A^k x(0) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i)$$

➔ x(0)≠0 è controllabile in k passi se $-A^k x(0)$ è raggiungibile in k passi

$$A^k x(0) \in im\{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{k-1}B \end{bmatrix}\} = \mathcal{R}_k^+(0)$$

Raggiungibilità dei sistemi LTI continui

- Analogamente, per determinare gli stati **raggiungibili** di $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, si fa riferimento al moto forzato:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)d\tau = \int_0^t e^{A\tau} Bu(t-\tau)d\tau$$

- Dal teorema di Cayley-Hamilton si può esprimere:

$$e^{A\tau} = I\gamma_0(\tau) + A\gamma_1(\tau) + \cdots + A^{n-1}\gamma_{n-1}(\tau)$$

con $\gamma_i(\tau)$ opportune funzioni scalari

Raggiungibilità dei sistemi LTI continui - 1

- Si può quindi espandere l'espressione del moto forzato, ottenendo una combinazione lineare di termini (integrali di convoluzione tra ingresso e $\gamma_i(\tau)$) con coefficienti ***B***, ***AB***, ***A²B***, ecc.:

$$x(t) = B\int_0^t \gamma_0(\tau)u(t-\tau)d\tau + AB\int_0^t \gamma_1(\tau)u(t-\tau)d\tau + \cdots + \\ + A^{n-1}B\int_0^t \gamma_{n-1}(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

- Pertanto, gli stati raggiungibili sono ancora un sottospazio generato da $\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$

Controllabilità dei sistemi LTI continui

- Per $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ uno stato x(0) $\neq$ 0 è **controllabile** (a 0) al tempo *t* se esiste una funzione di ingresso ammissibile u(.) tale che:

$$0 = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

ovvero $-x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$

perciò si possono applicare considerazioni analoghe a quelle viste in precedenza

Matrice di raggiungibilità

- **[Def.]** Si definisce **matrice di raggiungibilità** di un sistema LTI la matrice di dimensione [n x (n r)]

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

- **Teorema:** Il sistema è **completamente raggiungibile e completamente controllabile** se e solo se:

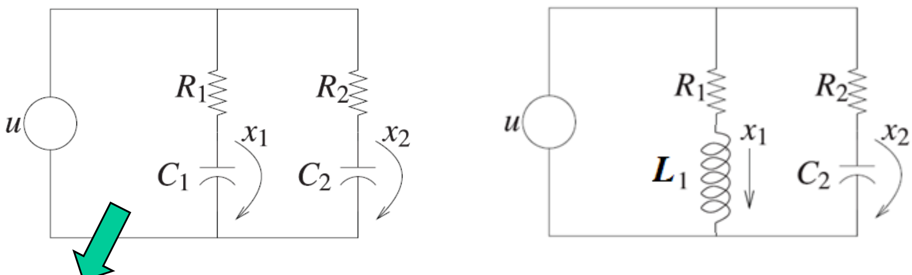
$$rango(P) = n$$

Matrice di raggiungibilità

- **Osservazioni**:
  - Le proprietà di raggiungibilità e controllabilità coincidono per sistemi LTI tempo continui, ma **NON** coincidono in generale per tutte le classi di sistemi dinamici
  - In alcuni testi, soprattutto in lingua inglese, per via del fatto che per sistemi LTI continui vale tale coincidenza, la matrice di raggiungibilità è chiamata (impropriamente) matrice di controllabilità
  - Per tale motivo, in molti programmi di calcolo numerico (es. Matlab® di Mathworks Inc.), che supportino il progetto di controlli automatici, la funzione per calcolare tale matrice è chiamata: `P=ctrb(A,B)`

Esempi: sistemi non completamente raggiungibili

1) Circuiti elettrici con rami in parallelo, per i quali sia $R_1 * C_1 = R_2 * C_2$ oppure $L_1/R_1 = R_2 * C_2$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} u(t)$$

E' impossibile portare l'origine verso qualunque condizione in cui sia $x_1(t) \neq x_2(t)$

Esempi: sistemi non completamente raggiungibili - 1

1) **PROVA**: ponendo $R_1*C_1 = R_2*C_2 = 1$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Il rango di P è 1 < 2 (la seconda colonna $AB = -B$, quindi lin. dipendente dalla prima colonna), pertanto il sistema **NON** è completamente raggiungibile e controllabile

Esempi: sistemi non completamente raggiungibili - 2

1) **NOTA**: scegliendo come variabili di stato (sempre con $R_1*C_1 = R_2*C_2 = 1$):

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

Le equazioni dinamiche diventano:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_1 + 2u \\ \dot{z}_2 &= -z_2 \end{aligned}}$$

dalle quali si può facilmente capire che la variabile z_2 dipende solo da sé stessa e quindi non c'è alcuna possibilità di influenzarla tramite l'ingresso!

N.B.: si può anche dire (in generale) che una parte dei *modi* del sistema non sono controllabili (in questo caso quello di z_2)

Esempi: sistemi non completamente raggiungibili - 3

1) **NOTA1**: se invece fosse $R_1{*}C_1 = 1$ e $R_2{*}C_2 = 2$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La matrice di raggiungibilità diventerebbe:

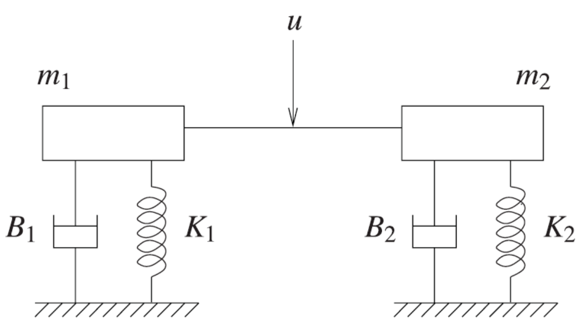
$$P = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

che è di rango = 2 (è impossibile ottenere la seconda colonna dalla prima moltiplicata per un coefficiente..)

Il sistema sarebbe quindi completamente raggiungibile e controllabile!

Esempi: sistemi non completamente raggiungibili - 4

2) Sistemi meccanici con strutture in parallelo, per i quali i parametri siano perfettamente bilanciati:



E' impossibile portare l'origine verso qualunque condizione in cui le posizioni dei due blocchi siano diverse!

Esempi: sistemi non completamente raggiungibili - 5

2) **PROVA**: normalizzando a 1 tutti i parametri del modello:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{b_1}{m_1} & -\frac{k_1}{m_1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{2m_1} \\ 0 \\ \frac{1}{2m_2} \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$x := \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & x_1 & \dot{x}_2 & x_2 \end{bmatrix}^T,$$

Si ottiene che il rango di P è $2 < 4$

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Esempi: sistemi non completamente raggiungibili - 6

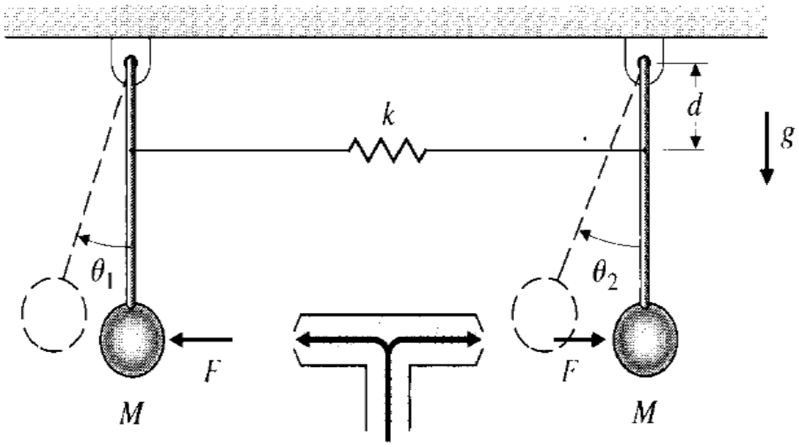
2) **NOTA**: la matrice P ha rango 2 perché:

- le prime due colonne sono indipendenti
- la terza colonna corrisponde alla somma delle prime due moltiplicate entrambe per -1
- la quarta colonna è uguale alla prima!!

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & -p_1-p_2 & \boxed{p_4=p_1} \end{array} \end{array}$$

Esempi: sistemi non completamente raggiungibili - 7

3) Esempio simile ai precedenti (con dimostrazione lasciata per esercizio…): masse oscillanti azionate da getto d'aria



Gas jet

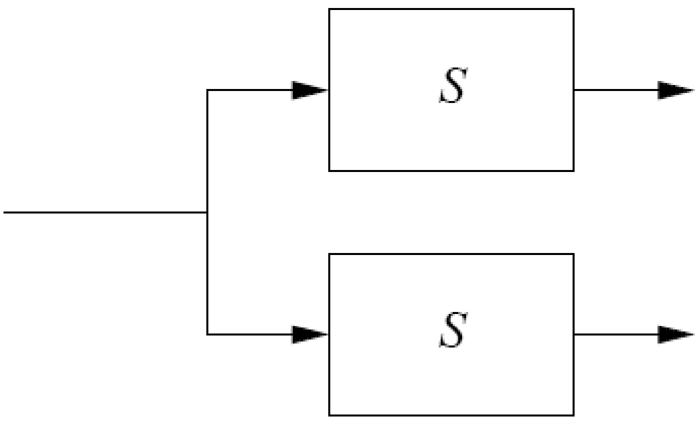
$K = kd$

$\ddot{\theta}_1 = -\omega^2\theta_1 - K(\theta_1 - \theta_2) + F/\text{ml}$

$\ddot{\theta}_2 = -\omega^2\theta_2 + K(\theta_1 - \theta_2) - F/\text{ml}$

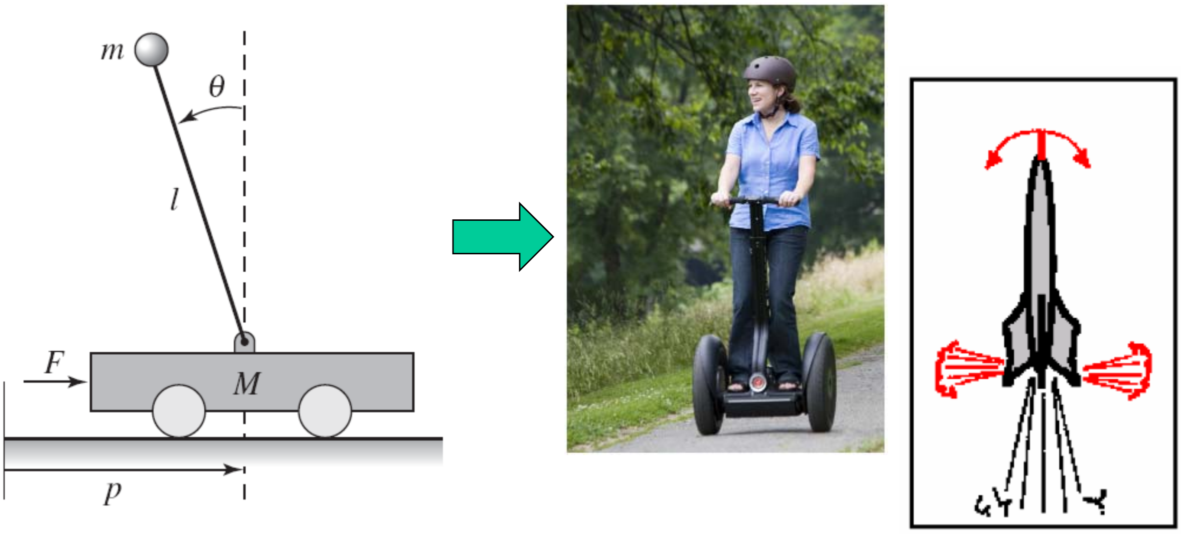
Esempi: sistemi non completamente raggiungibili - 8

IN GENERALE, sistemi nei quali vi siano parti aventi una dinamica identica (stessi modi), in parallelo e sulle quali agisce lo stesso ingresso, risultano non completamente raggiungibili



Raggiungibilità e controllabilità: un caso pratico

ESEMPIO 1: il pendolo su carrello (*cart-pole*) è un sistema nonlineare (e instabile se *upright*) completamente raggiungibile, di interesse per le analogie con molti sistemi ingegneristici (veicoli tipo Segway®, missili, ecc.)



Raggiungibilità e controllabilità: un caso pratico - 1

MODELLO: linearizzando le equazioni dinamiche nonlineari (qui non considerate) nella posizione *upright*, si ottengono le matrici di stato e di distribuzione dell'ingresso (ponendo $[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T = [p \quad \dot{p} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^T$):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{lM} & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{lM} \end{bmatrix}$$

Raggiungibilità e controllabilità: un caso pratico - 2

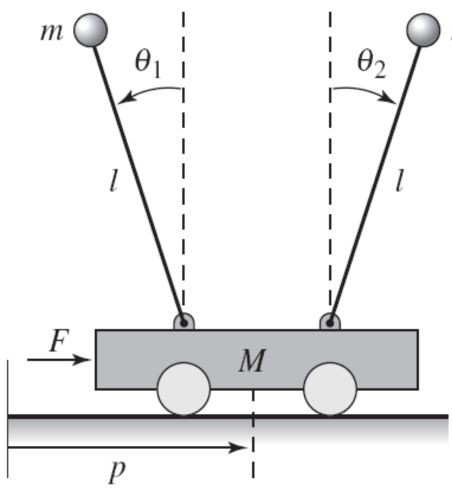
Matrice di raggiungibilità: $P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix}$

sempre a rango = 4 per ogni valore dei parametri

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M} & 0 & \frac{mg}{lM^2} \\ \frac{1}{M} & 0 & \frac{mg}{lM^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{lM} & 0 & -\frac{(M+m)g}{l^2M^2} \\ -\frac{1}{lM} & 0 & -\frac{(M+m)g}{l^2M^2} & 0 \end{bmatrix}$$

Raggiungibilità e controllabilità: un caso pratico - 3

ESEMPIO 2: il sistema avente invece due pendoli (con identica massa e lunghezza dell'asta) installati sullo stesso carrello non è completamente raggiungibile (è costituito appunto da due parti con la stessa dinamica e controllate tramite lo stesso ingresso, la forza F agente sul carrello)



Raggiungibilità e controllabilità: un caso pratico - 4

MODELLO: linearizzando le equazioni nonlineari nella posizione *upright* per entrambi i pendoli, si ottengono le matrici di stato e di distribuzione dell'ingresso (con $[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6]^T = [p \quad \dot{p} \quad \theta_1 \quad \dot{\theta}_1 \quad \theta_2 \quad \dot{\theta}_2]^T$):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_1 g}{M} & 0 & -\frac{m_2 g}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m_1)g}{l_1 M} & 0 & \frac{m_2 g}{l_1 M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 g}{l_2 M} & 0 & \frac{(M+m_2)g}{l_2 M} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{l_1 M} \\ 0 \\ -\frac{1}{l_2 M} \end{bmatrix}$$

Raggiungibilità e controllabilità: un caso pratico - 5

Matrice di raggiungibilità: $P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B & A^4B & A^5B \end{bmatrix}$

a rango = 6 solo se $m_1 \neq m_2$ e $l_1 \neq l_2$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M} & 0 & \frac{m_1 g}{l_1 M^2} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{M} & 0 & \frac{m_1 g}{l_1 M^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l_1 M} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ -\frac{1}{l_1 M} & 0 & -\frac{g(l_1(M+m_1)+l_1 l_2 m_2)}{l_2 l_1^2 M^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l_2 M} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ -\frac{1}{l_2 M} & 0 & -\frac{g(l_2(M+m_2)+l_1 l_2 m_1)}{l_1 l_2^2 M^2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Raggiungibilità come proprietà strutturale

- Come detto, rappresentazioni equivalenti, per le quali cioè sia $x = Tz \iff z = T^{-1}x$:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= T^{-1}AT \\ \hat{B} &= T^{-1}B\end{aligned}$$

hanno le stesse proprietà di raggiungibilità:

$$\begin{aligned}\hat{P} &= \left[\hat{B} \quad \hat{A}\hat{B} \quad \hat{A}^2\hat{B} \ldots \hat{A}^{n-1}\hat{B}\right] \\ &= T^{-1}\left[B \quad AB \quad A^2B \ldots A^{n-1}B\right] \\ &= T^{-1}P\end{aligned}$$

in quanto la trasformazione non influisce sul rango della matrice di raggiungibilità

Scomposizione di sistemi non compl. raggiungibili

- Se un sistema **NON** è completamente raggiungibile e ricostruibile, esiste un **cambio di variabili** $z = T^{-1}x$ opportuno tale che nel nuovo vettore di stato sia evidenziata la **parte raggiungibile-controllabile** da quella **NON** raggiungibile-controllabile
- In particolare, dato: $\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t)\end{cases}$ $x \in \mathbb{R}^n$

con

$rango(P) = n_c < n$

è possibile ricavare dalla matrice *P* una matrice T_1 con n_c colonne linearmente indipendenti

Scomposizione di sistemi non compl. raggiungibili-1

- Per ottenere la matrice di trasformazione dello stato è necessario trovare una qualunque matrice T_2 di dimensione $[n \times (n-n_c)]$ e tale che $T = [T_1 \ \ T_2]$ sia non singolare
- Definendo T in tal modo (i.e. con le prime n_c colonne ricavate dalla matrice di raggiungibilità P), si ottiene:

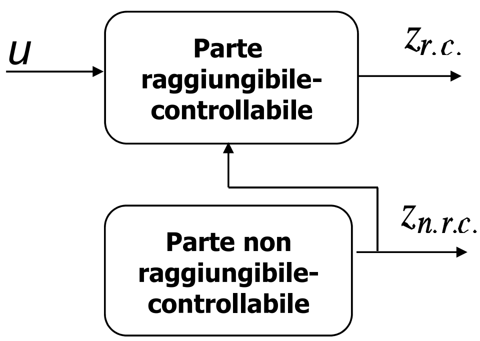
$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \hat{A}_c z(t) + \hat{B}_c u(t) \\ y(t) = \hat{C}_c z(t) \end{cases} \qquad \begin{matrix} \hat{A}_c = T^{-1}AT & \hat{B}_c = T^{-1}B \\ \hat{C}_c = CT & \end{matrix}$$

$$\hat{A}_c = \begin{bmatrix} \hat{A}_{c1} & \hat{A}_{c2} \\ 0 & \hat{A}_{c3} \end{bmatrix} \qquad \hat{B}_c = \begin{bmatrix} \hat{B}_{c1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_c = \begin{bmatrix} \hat{C}_{c1} & \hat{C}_{c2} \end{bmatrix}$$

Scomposizione di sistemi non compl. raggiungibili-2

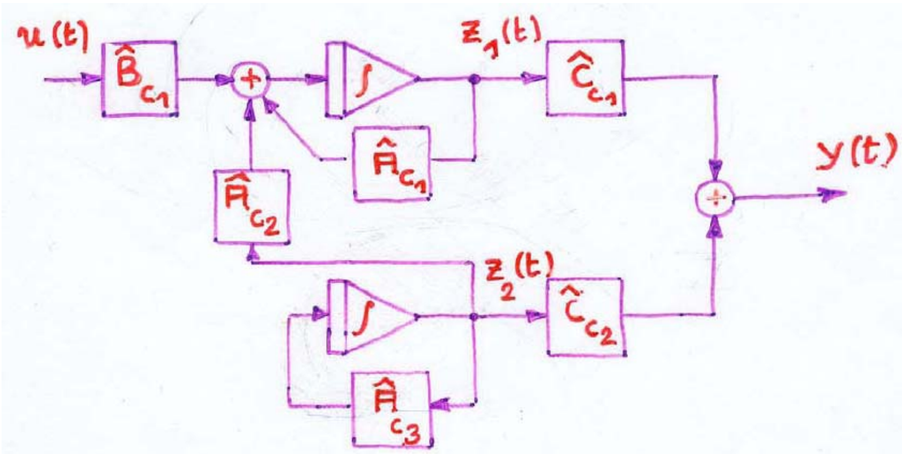
- Il sottosistema $\Sigma_c = \left(\hat{A}_{c1}, \hat{B}_{c1}, \hat{C}_{c1}\right)$ è la **parte raggiungibile e controllabile** del sistema $\Sigma = (A, B, C)$ (**N.B**. l'eventuale matrice *D* non cambia in *z*)
- La matrice $\hat{A}_{c1}$ ha dimensione ($n_c \times n_c$)
- La matrice $\hat{B}_{c1}$ ha dimensione ($n_c \times r$)
- La matrice $\hat{C}_{c1}$ ha dimensione ($m \times n_c$)



Scomposizione di sistemi non compl. raggiungibili-3

- Più precisamente ($z_1 = z_{r.c.}$; $z_2 = z_{n.r.c.}$):

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) &= \hat{A}_{c1} z_1(t) + \hat{A}_{c2} z_2(t) + \hat{B}_{c1} u(t) \\ \dot{z}_2(t) &= \hat{A}_{c3} z_2(t) \\ y(t) &= \hat{C}_{c1} z_1(t) + \hat{C}_{c2} z_2(t) \end{cases}$$



Scomposizione di sistemi non compl. raggiungibili-4

- Osservazioni *controllistiche*:
  - Le variabili di stato z_2 **NON** sono influenzate dall'ingresso e quindi da qualunque controllore si possa progettare
  - Se $z_2(0) = 0$, sarà $z_2(t) = 0$ per ogni $t > 0$
  - Se gli autovalori della matrice $\hat{A}_{c3}$ non sono a parte reale negativa o nulla, il sistema risulta <u>instabile</u> **per qualunque** progetto di **controllo**

Esempio: scomposizione parte ragg.-contr.

- Sistema di ordine 3:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} q_1 & q_2 & -2q_1+3q_2 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \text{rango}(P) = 2$$

2 colonne lin.indipendenti = T_1

Esempio: scomposizione parte ragg.-contr. - 1

- Per ottenere una matrice $T = [T_1 \;\; T_2]$ invertibile, si può notare che una scelta relativamente facile da determinare è T_2=[0 0 1]^T:

$$T = [T_1 \,\vdots\, T_2] = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Tale matrice risulta anche essere ortogonale (colonne costituite da una base ortonormale), cioè tale che $T^{-1} = T^T$
- INFINE:

$$\hat{A}_c = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \hat{B}_c = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_c = CT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Sigma_c = \left(\hat{A}_{c1}, \hat{B}_{c1}, \hat{C}_{c1}\right)$$

Proprietà strutturali dei sistemi LTI
OSSERVABILITA' E RICOSTRUIBILITA'

Osservabilità e ricostruibilità

- Sono proprietà di un sistema che descrivono la possibilità di determinare lo stato iniziale $x(t_0)$ o finale $x(t_1)$ di un sistema dalla conoscenza del comportamento ingresso-uscita $u[t_0,t_1]$, $y[t_0,t_1]$
- Anche tali proprietà sono **strutturali**, cioè **NON** dipendono dalla rappresentazione (scelta dello stato), **ma** possono essere influenzate dal controllo
- **Analisi** di osservabilità / ricostruibilità:
  - Applicazione: progetto di algoritmi di stima e ricostruzione dello stato

Osservabilità (relazione tra stato iniziale $x(t_0)=x_0$ e u(.)/y(.))

[Def.] Lo stato x_0 di un sistema dinamico è **compatibile** con le funzioni di ingresso *u(.)* e uscita *y(.)* nell'intervallo di tempo $[t_0,t_1]$ ($t_0<t_1$) se:

$$y(\tau) = \gamma(\tau, t_0, \underbrace{x(t_0)}_{x_0}, u(\cdot)) \qquad \forall \tau \in [t_0, t_1]$$

L'insieme degli stati iniziali compatibili con u(.) e *y(.)* nell'intervallo $[t_0,t_1]$ è indicato con

$$\mathcal{E}^-(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$$

Ricostruibilità (relazione tra stato finale $x(t_1)=x_1$ e u(.)/y(.))

[Def.] Lo stato x_1 di un sistema dinamico è **compatibile** con le funzioni di ingresso *u(.)* e uscita *y(.)* nell'intervallo di tempo $[t_0,t_1]$ ($t_0<t_1$) se:

$$x(t_1) = x_1 = \phi(t_1, t_0, x(t_0), u(\cdot)) \quad x(t_0) \in \mathcal{E}^-(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$$

L'insieme degli stati finali compatibili con *u(.)* e *y(.)* nell'intervallo $[t_0,t_1]$ è indicato con

$$\mathcal{E}^+(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$$

Osservabilità e ricostruibilità complete

- Se l'insieme $\mathcal{E}^{-}(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$ comprende un unico elemento, per qualunque funzione di ingresso $u(.) \in \boldsymbol{U_f}$ e di uscita $y(.) \in \boldsymbol{Y_f}$, il sistema è **completamente osservabile**
- Analogamente, se $\mathcal{E}^{+}(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$ comprende un unico elemento, per qualunque funzione di ingresso $u(.) \in \boldsymbol{U_f}$ e di uscita $y(.) \in \boldsymbol{Y_f}$, il sistema è **completamente ricostruibile**

Osservabilità e ricostruibilità complete - 1

Formalmente, si possono dare le **[Definizioni]:**

- Un sistema si dice **completamente osservabile** in $[t_0,t_1]$ se la conoscenza del comportamento ingresso-uscita $u[t_0,t_1]$, $y[t_0,t_1]$ consente di determinare <u>univocamente</u> lo stato iniziale $\boldsymbol{x(t_0)}$ per ogni $u[t_0,t_1]$
- Un sistema si dice **completamente ricostruibile** in $[t_0,t_1]$ se la conoscenza del comportamento ingresso-uscita $u[t_0,t_1]$, $y[t_0,t_1]$ consente di determinare <u>univocamente</u> lo stato finale $\boldsymbol{x(t_1)}$ per ogni $u[t_0,t_1]$

Osservabilità e ricostruibilità nei sistemi LTI

- Per i sistemi LTI, si può considerare solo $t = t_1 - t_0$
- Per i sistemi LTI, si possono considerare solo le proprietà della **risposta libera** per capire se il sistema sia osservabile (è possibile determinare lo stato iniziale) e ricostruibile (è possibile determinare lo stato finale)
- Poiché noto lo stato iniziale è possibile calcolare il corrispondente stato finale, la completa osservabilità **implica** la completa ricostruibilità

Osservabilità e ricostruibilità nei sistemi LTI - 1

- Per risolvere il problema di osservabilità, si può considerare il sistema libero:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

- L'obiettivo è calcolare lo stato conoscendo l'uscita, operazione immediata se C è invertibile:

$$x(t) = C^{-1}y(t)$$

- Se C non è invertibile, si può tentare di ricavare una relazione invertibile derivando l'uscita:

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = CAx(t)$$

Osservabilità e ricostruibilità nei sistemi LTI - 2

- L'operazione di derivata sull'uscita si può ripetere fino all'ordine *n*-1, sempre con l'obiettivo di ricavare una relazione invertibile uscita-stato:

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(t)$$

- Ovviamente, per il teorema di Cayley-Hamilton **NON** è utile proseguire oltre l'ordine *n*-1

Osservabilità e ricostruibilità nei sistemi LTI - 3

- In modo analogo, per sistemi discreti si può esprimere la possibilità di osservazione dello stato iniziale analizzando le uscite dei primi *n*-1 passi:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0)$$

- Ovviamente, per il teorema di Cayley-Hamilton **NON** è utile proseguire oltre il passo *n*-1

Osservabilità e ricostruibilità nei sistemi LTI - 3a

NOTA: le considerazioni precedenti giustificano le definizioni e i risultati formali presentati nel seguito, **MA** non descrivono un metodo pratico per l'osservazione (o ricostruzione) dello stato tramite le derivate dell'uscita (fino all'ordine *n*-1), per sistemi continui, o una sequenza di *n*-1 valori dell'uscita, per sistemi discreti.

L'esecuzione pratica di tali operazioni, infatti, potrebbe:

- essere computazionalmente onerosa
- amplificare eccessivamente il *rumore* del segnale
- ritardare eccessivamente l'osservazione stessa

L'effettiva realizzazione di osservatori dello stato si deve basare sul modello completo ingresso/stato/uscita, secondo metodi che verranno presentati nella sezione successiva.

Matrice di osservabilità

- **[Def.]** Si definisce **matrice di osservabilità** di un sistema LTI la matrice di dimensione [n x (n m)]

$$Q = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T$$

o equivalentemente:

$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}$$

- **Teorema:** Il sistema è **completamente osservabile e completamente ricostruibile** se e solo se:

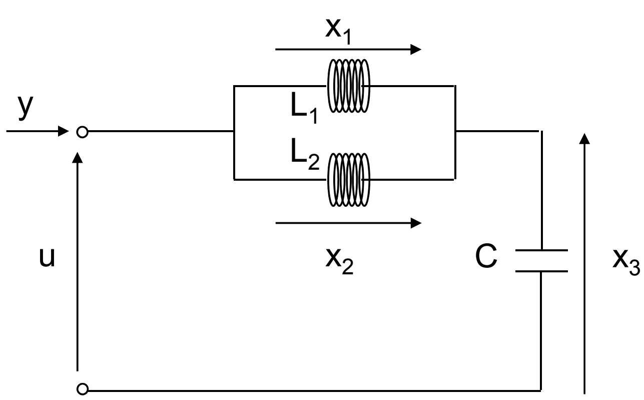
$$rango(Q^T) = n$$

Matrice di osservabilità

- **Osservazioni**:
  - Anche le proprietà di osservabilità e ricostruibilità coincidono per i sistemi LTI, in base alle proprietà della matrice di osservabilità (che nessun testo chiama matrice di ricostruibilità)
  - Nella maggior parte dei programmi di calcolo numerico (es. Matlab® di Mathworks Inc.), che supportino il progetto di controlli automatici, la funzione per calcolare tale matrice è chiamata: `Q=obsv(A,C)`
  - Nella slide precedente la matrice è introdotto in forma trasposta per renderne l'analisi del rango analoga a quella della matrice di raggiungibilità (i.e. costruzione e relativa verifica di lineare indipendenza *per colonne*!)

Esempio: sistema non completamente osservabile

- Nel circuito elettrico mostrato, dal comportamento **ingresso-uscita** non è possibile distinguere stati per i quali valga inizialmente $x_1 + x_2 = 0$ (corrente che ricircola nella maglia delle due induttanze)



Esempio: sistema non completamente osservabile-1

- Il modello matematico è infatti:

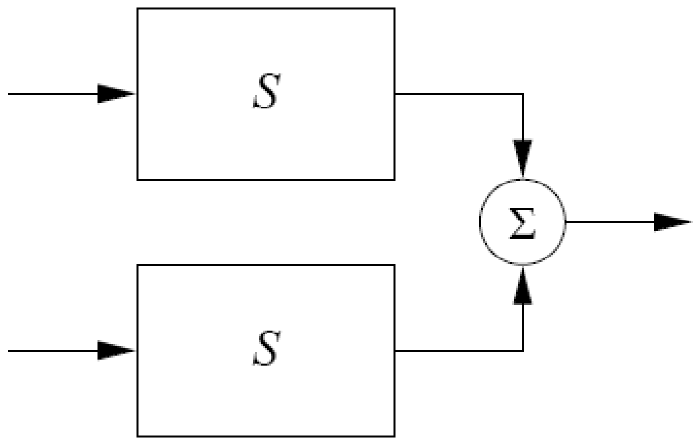
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t) \end{cases}$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) \\ 1 & 0 & -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) \\ 0 & -\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

- Il rango di Q^T è 2 < 3

Esempio: sistema non completamente osservabile-2

NOTA: in generale, sistemi nei quali vi siano parti <u>in parallelo</u>, caratterizzate dagli <u>stessi modi</u> e i cui stati si sommino nell'uscita, risultano <u>non completamente osservabili</u>



Osservabilità come proprietà strutturale

- Come detto, rappresentazioni equivalenti, per le quali cioè sia $x = Tz \iff z = T^{-1}x$:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= T^{-1}AT \\ \hat{C} &= CT \end{aligned}$$

hanno le stesse proprietà di osservabilità:

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{C}\hat{A} & \hat{C}\hat{A}^2 \dots \hat{C}\hat{A}^{n-1} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 \dots CA^{n-1} \end{bmatrix}^T T \\ &= QT \end{aligned}$$

in quanto la trasformazione non influisce sul rango della matrice di osservabilità

Forma minima

- Un sistema **completamente osservabile e ricostruibile** si definisce anche **<u>in</u> forma minima**
- Più in generale, un sistema **<u>in</u> forma minima** è un sistema per il quale <u>è sempre possibile determinare lo stato tramite l'analisi dei segnali di ingresso e uscita</u>
- Se il sistema **NON** è completamente osservabile e ricostruibile, esiste un **cambio di variabili** $z = T^{-1}x$ tale che nel nuovo vettore di stato sia evidenziata (e separata) la **parte osservabile-ricostruibile** da quella **NON** osservabile-ricostruibile
- La **parte osservabile-ricostruibile** si definisce **<u>la</u> forma minima** del sistema originario

Scomposizione di sistemi non compl. osservabili

- In particolare, dato: $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$ $\quad x \in \mathbb{R}^n$

  con $rango(Q^T) = n_o < n$

  è possibile ricavare dalla matrice Q^T una matrice T_1 con n_o colonne linearmente indipendenti
- Per ottenere la matrice di trasformazione dello stato è necessario trovare una qualunque altra matrice T_2 di dimensione $[n \times (n - n_o)]$ e tale che $T = [\ T_1 \ \ T_2]$ sia non singolare

Scomposizione di sistemi non compl. osservabili - 1

- Definendo T in tal modo (i.e. con le <u>prime n_o colonne ricavate dalla matrice di osservabilità Q^T</u>), si ottiene:

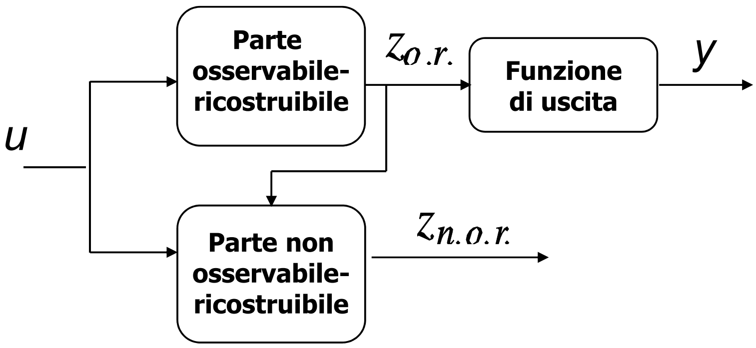
$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \hat{A}_o z(t) + \hat{B}_o u(t) \\ y(t) = \hat{C}_o z(t) \end{cases} \qquad \hat{A}_o = T^{-1}AT \quad \hat{B}_o = T^{-1}B \qquad \hat{C}_o = CT$$

$$\hat{A}_o = \begin{bmatrix} \hat{A}_{o1} & 0 \\ \hat{A}_{o3} & \hat{A}_{o2} \end{bmatrix} \qquad \hat{B}_o = \begin{bmatrix} \hat{B}_{o1} \\ \hat{B}_{o2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_o = \begin{bmatrix} \hat{C}_{o1} & 0 \end{bmatrix}$$

Scomposizione di sistemi non compl. osservabili - 2

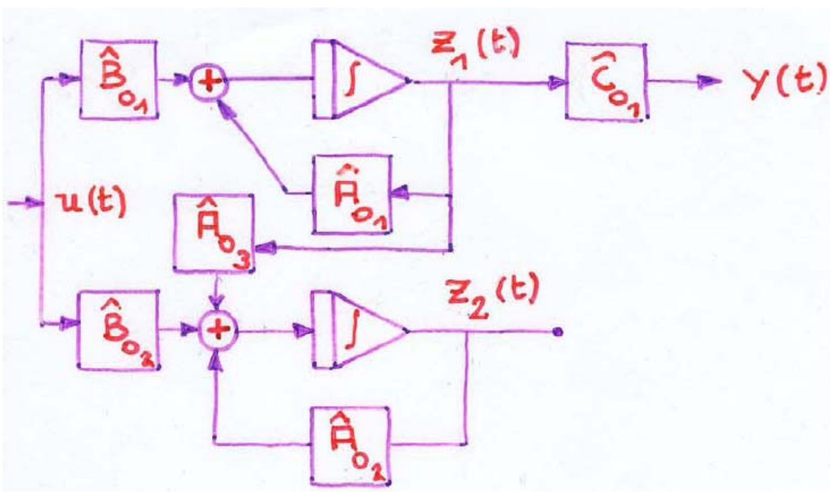
- Il sottosistema $\Sigma_o = (\hat{A}_{o1}, \hat{B}_{o1}, \hat{C}_{o1})$ è la **parte osservabile e ricostruibile** del sistema $\Sigma = (A, B, C)$ cioè **la sua forma minima**
- La matrice $\hat{A}_{o1}$ ha dimensione (n_o x n_o)
- La matrice $\hat{B}_{o1}$ ha dimensione (n_o x r)
- La matrice $\hat{C}_{o1}$ ha dimensione (m x n_o)



Scomposizione di sistemi non compl. osservabili - 3

- Più precisamente ($z_1 = z_{o.r.}$; $z_2 = z_{n.o.r.}$):

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \hat{A}_{o1} z_1(t) + \hat{B}_{o1} u(t) \\ \dot{z}_2(t) = \hat{A}_{o3} z_1(t) + \hat{A}_{o2} z_2(t) + \hat{B}_{o2} u(t) \\ y(t) = \hat{C}_{o1} z_1(t) \end{cases}$$



Esempio: scomposizione parte oss.-ric.

- Sistema di ordine 3:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} q_1 & q_2 & -2q_1+3q_2 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \text{rango}=2$$

$\boxed{\text{2 colonne lin.indipendenti} = T_1}$

Esempio: scomposizione parte oss.-ric. - 1

- Per ottenere una matrice $T = [T_1 \;\; T_2]$ invertibile, si può notare che una scelta relativamente facile da determinare è ancora T_2=[0 0 1]^T:

$$T = [T_1 \quad T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- INFINE:

$$\hat{A}_o = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 9 & 28 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \hat{B}_o = T^{-1}B = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_o = CT = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Sigma_o = (\hat{A}_{o1}, \hat{B}_{o1}, \hat{C}_{o1})$$

Scomposizione canonica

- Qualora un sistema non risulti **né completamente osservabile-ricostruibile**, **né completamente raggiungibile-controllabile**, è possibile suddividerne ulteriormente la *forma minima* $\Sigma_o = \left(\hat{A}_{o1}, \hat{B}_{o1}, \hat{C}_{o1}\right)$, applicando ad essa la trasformazione vista in precedenza per evidenziarne la parte raggiungibile-controllabile e quella non raggiungibile-controllabile:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \hat{A}_{o1} z_1(t) + \hat{B}_{o1} u(t) \\ y(t) = \hat{C}_{o1} z_1(t) \end{cases}$$

$$\hat{P}_{o1} = \left[\hat{B}_{o1} \quad \hat{A}_{o1}\hat{B}_{o1} \quad \hat{A}_{o1}^2\hat{B} \ \ldots \ \hat{A}_{o1}^{n_o-1}\hat{B}_{o1}\right]$$

$$rango\left(\hat{P}_{o1}\right) = n_{oc} < n_o$$

Scomposizione canonica - 1

- Come per i casi precedenti, dalla matrice $\hat{P}_{o1}$ è possibile ricavare una matrice $\hat{T}_1$ dalle prime n_{oc} colonne linearmente indipendenti, alle quali affiancare una matrice $\hat{T}_2$ che renda la matrice $\hat{T}$ invertibile

$$w = \hat{T}^{-1} z_1 \qquad \hat{T} = \left[\hat{T}_1 \ \hat{T}_2\right]$$

Scomposizione canonica - 2

- Risulta: $\begin{cases} \dot{w}(t) = \hat{A}_{oc}w(t) + \hat{B}_{oc}u(t) \\ y(t) = \hat{C}_{oc}w(t) \end{cases}$

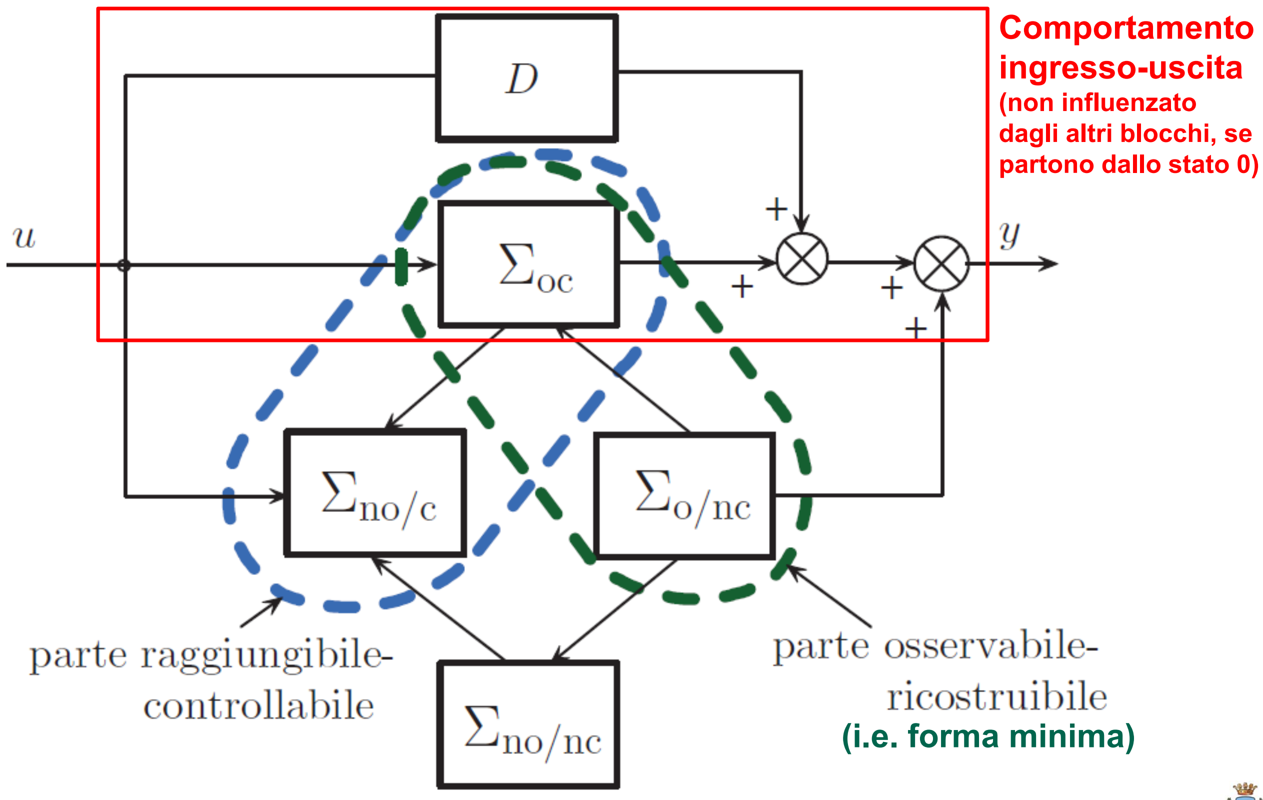
$$\hat{A}_{oc} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{oc1} & \hat{A}_{oc2} \\ 0 & \hat{A}_{oc3} \end{bmatrix} \qquad \hat{B}_{oc} = \begin{bmatrix} \hat{B}_{oc1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_{oc} = \begin{bmatrix} \hat{C}_{oc1} & \hat{C}_{oc2} \end{bmatrix}$$

- Il sottosistema $\Sigma_{oc} = (\hat{A}_{oc1}, \hat{B}_{oc1}, \hat{C}_{oc1})$ è la parte raggiungibile-controllabile e osservabile-ricostruibile del sistema $\Sigma = (A, B, C)$

  cioè quella che **caratterizza il comportamento ingresso uscita a partire dallo stato 0**

Scomposizione canonica: riassumendo



Proprietà strutturali dei sistemi LTI
DUALITA'

Dualità

- I risultati ottenuti dalle analisi di raggiungibilità e osservabilità mostrano notevoli analogie.
- Per formalizzare tali analogie, si usa ricorrere alla definizione di **dualità** (qui nel caso LTI t. continuo)
- Dato:

$$S = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

si definisce **sistema duale**:

$$S_D = \begin{cases} \dot{z}(t) = A^T z(t) + C^T v(t) \\ w(t) = B^T z(t) + D^T v(t) \end{cases}$$

Dualità - 1

- Il numero di ingressi (uscite) di S corrisponde al numero di uscite (ingressi) di S_D
- Le matrici di raggiungibilità e osservabilità di S_D (P_D e Q_D) sono legate a quelle di S (P e Q) come segue:

$$P_D = \begin{pmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}^T = Q^T$$

$$Q_D = \begin{pmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1} B \end{pmatrix}^T = P^T$$

Dualità - 2

- Risulta pertanto:

S stabile ↔ S_D stabile

S ragg.-contr. ↔ S_D oss.-ric.

S oss.-ric. ↔ S_D ragg.-contr.

Dualità - 3

- La proprietà di dualità ha importanti conseguenze relative al progetto dei sistemi di controllo e dei modelli per l'osservazione dello stato (**osservatori dinamici**)
- Infatti, nelle applicazioni pratiche con sistemi MIMO complessi, il problema di controllo richiede in tempo reale **informazioni complete** sullo stato (le sole uscite misurabili **non sono sufficienti** ai fini del controllo)
- Grazie agli osservatori dinamici, è possibile calcolare tali informazioni sullo stato e sfruttarle pienamente per il controllo

PROPRIETÀ STRUTTURALI DEI SISTEMI LTI
- Raggiungibilità e Controllabilità
- Osservabilità e Ricostruibilità
- Dualità

FINE