Fondamenti di Automatica

Analisi dei sistemi dinamici

Dott. Ing. Marcello Bonfè
Dipartimento di Ingegneria - Università di Ferrara
Tel. +39 0532 974839
E-mail: marcello.bonfe@unife.it

Analisi dei sistemi dinamici
DEFINIZIONI

Ulteriori definizioni importanti

- **EVENTO**: coppia tempo-stato $(t, x(t)) \in T \times X$
- **MOVIMENTO** (o **MOTO**): insieme degli eventi definiti dalla funzione di transizione nell'intervallo $[t_0,t_1]$

$$\{(t, x(t)) | x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)), \quad t \in [t_0, t_1]\}$$

- **TRAIETTORIA**: immagine in ***X*** della funzione di transizione nell'intervallo $[t_0,t_1]$

$$\{x(t) | x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)) \quad t \in [t_0, t_1]\}$$

N.B.: il movimento è definito in ***T*** x ***X***, la traiettoria in **X**

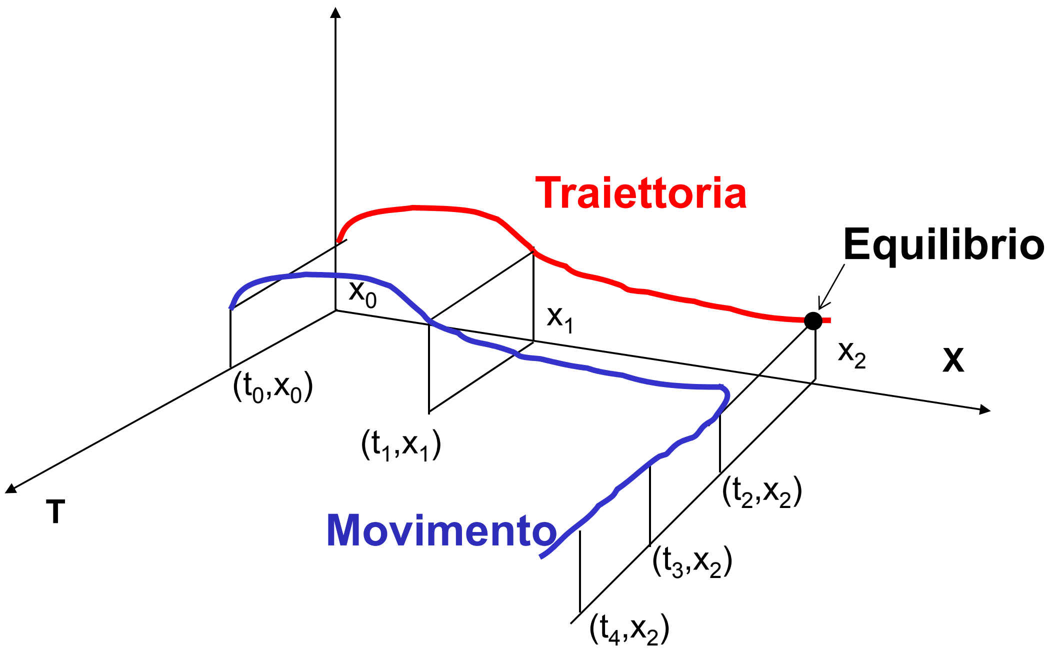
Ulteriori definizioni importanti - 1

- **STATO DI EQUILIBRIO TEMPORANEO** in $[t_0,t_1]$: è uno stato $x \in$ ***X*** per il quale esiste una funzione $u(.) \in \boldsymbol{U_f}$ che per ogni ogni t $\in [t_0,t_1]$ soddisfa la:

$$x = \phi(t, t_0, x, u(\cdot))$$

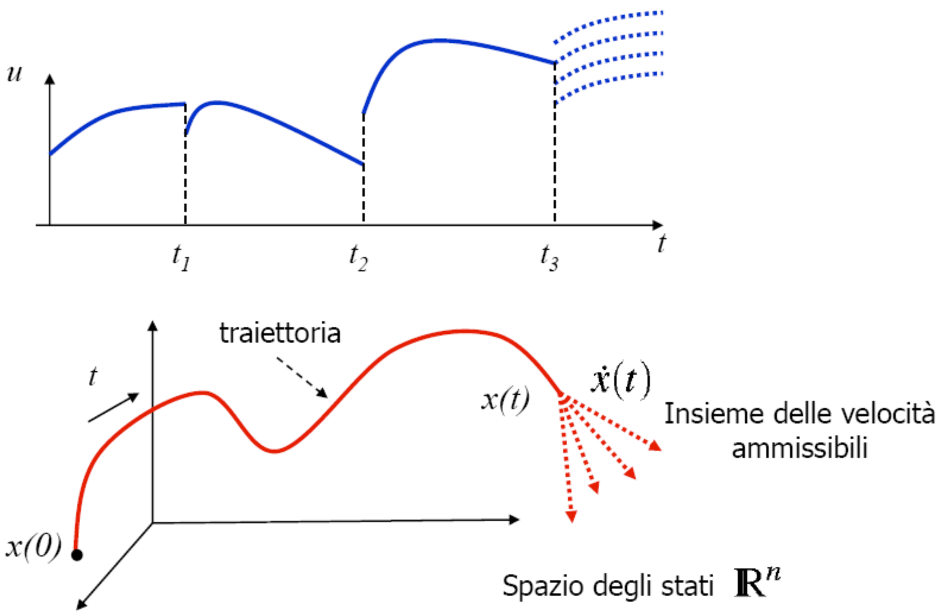
- **STATO DI EQUILIBRIO**: è uno stato di equilibrio temporaneo in $[t_0,t_1]$ per ogni $t_0,t_1 \in$ ***T*** con $t_0 < t_1$

Movimento, traiettoria ed equilibrio



Movimento / traiettoria e funzione di ingresso

- Tramite la funzione di ingresso si influenza il moto (e quindi la traiettoria) agendo direttamente sulla velocità $\dot{x}(t)$

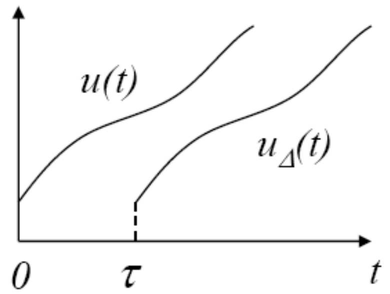


Stazionarietà e linearità: proprietà

- Nei **sistemi stazionari**, vale la proprietà di traslazione nel tempo di cause ed effetti
- Cioè, data la funzione di transizione (idem per la funzione di uscita): $x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$

  risulta: $x(t+\tau) = \phi(t+\tau, t_0+\tau, x_0, u_\Delta(\cdot)) = x(t)$

  con $u_\Delta(t) = u(t+\tau)$



$u_\Delta(t) = u(t-\tau)$ funzione di ingresso traslata

Si suppone che sia:

$$u_\Delta(\cdot) \in \mathcal{U}_f, \quad \forall\, u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$$

Stazionarietà e linearità: proprietà - 1

- Nei **sistemi lineari** vale il principio di **sovrapposizione degli effetti**:

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(t, t_0, \alpha x_{0_1} + \beta x_{0_2}, \alpha u_1(\cdot) + \beta u_2(\cdot)) \\ &= \alpha\phi(t, t_0, x_{0_1}, u_1(\cdot)) + \beta\phi(t, t_0, x_{0_2}, u_2(\cdot)) \end{aligned}$$

- Posto $\alpha = \beta = 1; \quad x_{0_1} = x_0;\ x_{0_2} = 0; \quad u_1(\cdot) = 0;\ u_2(\cdot) = u(\cdot)$

$$x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \underbrace{\phi(t, t_0, x_0, 0)}_{\text{moto libero}} + \underbrace{\phi(t, t_0, 0, u(\cdot))}_{\text{moto forzato}}$$

Stazionarietà e linearità: proprietà - 2

- Analogamente, per la funzione di risposta di un **sistema lineare**:

$$y(t) = \gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \underbrace{\gamma(t, t_0, x_0, 0)}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\gamma(t, t_0, 0, u(\cdot))}_{\text{risposta forzata}}$$

- Quindi per un sistema lineare il moto e la relativa risposta si possono scomporre in due contributi:
  - uno dipendente **SOLO** dalle condizioni iniziali (moto libero e risposta libera)
  - uno dipendente **SOLO** dall'ingresso (moto forzato e risposta forzata)

Stazionarietà e linearità: conseguenze

- Nei **sistemi stazionari**:
  - L'istante iniziale si può sempre assumere $t_0 = 0$
  - Le funzioni ϕ e γ dipendono dalla differenza $t - t_0$ e non da t e t_0 separatamente
- Nei **sistemi lineari:**
  - L'analisi della sola risposta libera in $[t_0,t_1]$ permette di determinare se gli stati iniziali di un sistema sono distinguibili tra loro (sistema detto in forma minima o, come vedremo, completamente osservabile)

Analisi dei sistemi dinamici
STABILITA'

Stabilità

- Con tale termine si intende la capacità di un sistema di reagire con variazioni limitate del moto ***x(.)*** a perturbazioni limitate dello stato iniziale ***x(t_0)*** o dell'ingresso ***u(.)***
- Ipotesi: ***U, U_f, X, Y*** sono spazi vettoriali normati
- $x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$: moto di riferimento
- $x_1(t) = \phi(t, t_0, x(t_0) + \delta x_1(t_0), u(\cdot))$: moto perturbato, con perturbazione *sullo stato iniziale* $\delta x_1(t_0)$
- $x_2(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot) + \delta u(\cdot))$: moto perturbato, con perturbazione *sull'ingresso* $\delta u(\cdot)$

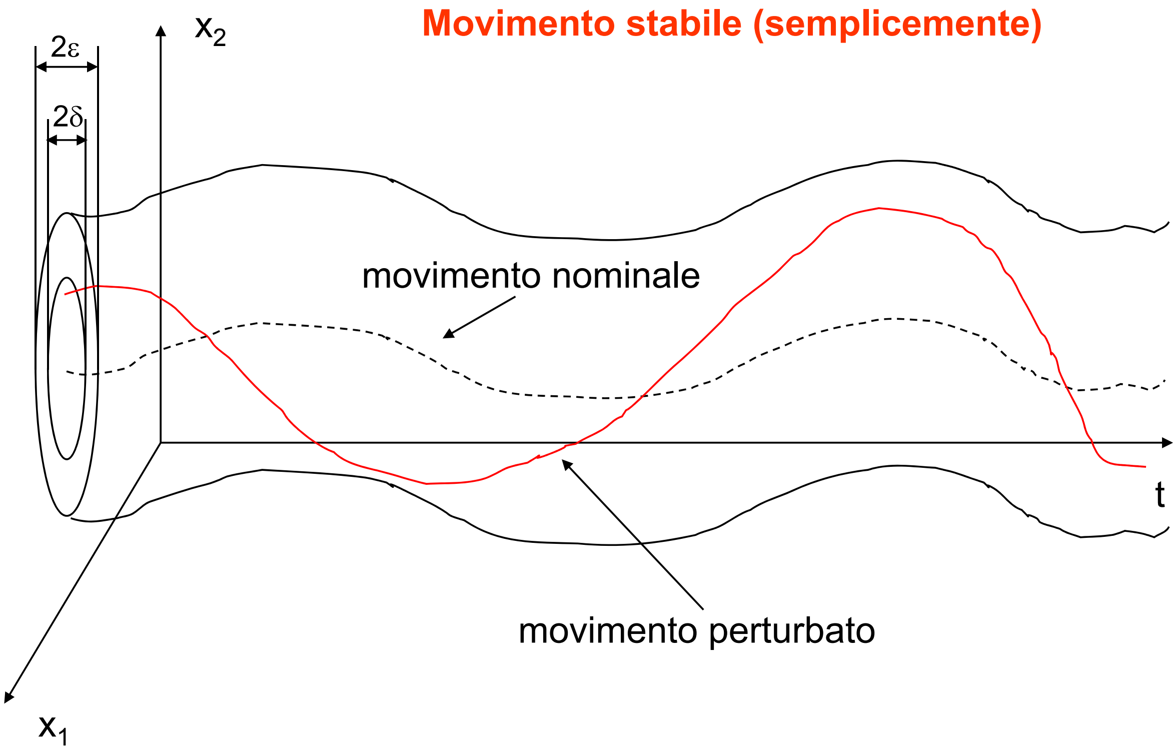
Stabilità rispetto a perturbazioni dello stato iniziale

- Dato $\delta x_1(t) = x_1(t) - x(t)$ si dice che **il moto di riferimento è (semplicemente) stabile** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che quando $\|\delta x_1(t_0)\| < \delta$ risulta $\|\delta x_1(t)\| < \varepsilon; \quad \forall t \geq t_0$

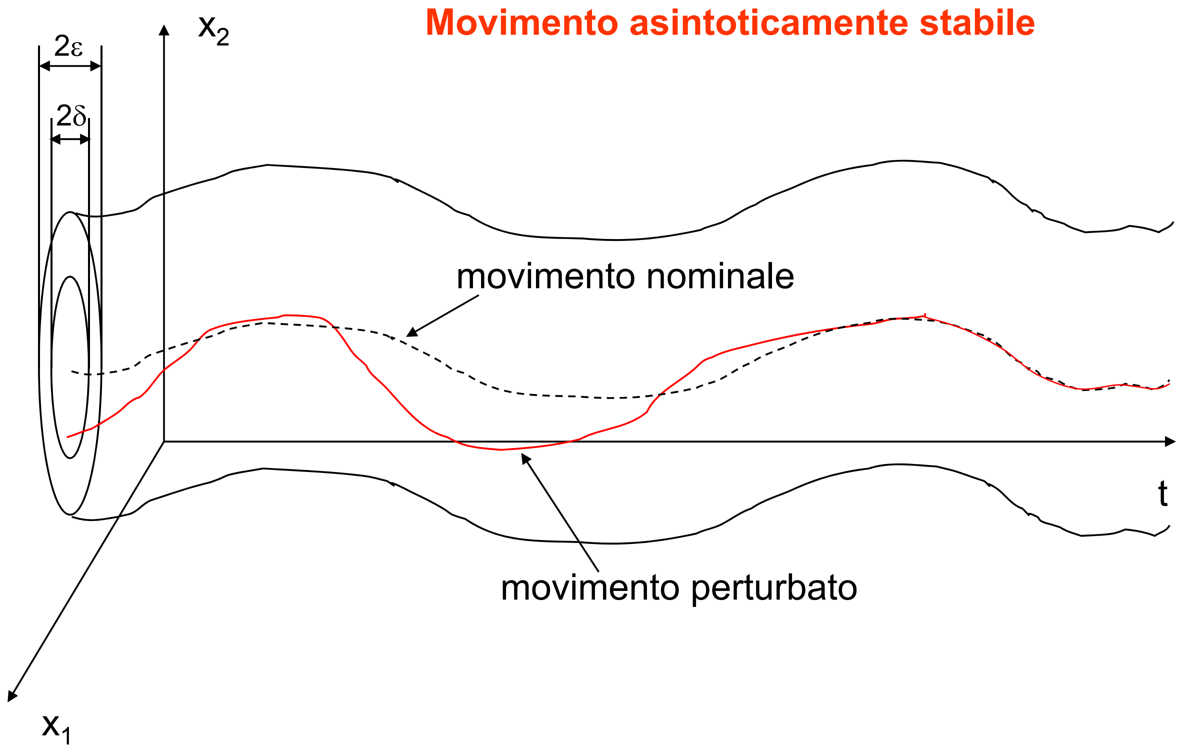
- Si dice che **il moto di riferimento è asintoticamente stabile** se, <u>oltre ad essere semplicemente stabile</u>, soddisfa la relazione

$$\lim_{t \to \infty} \|\delta x_1(t)\| = 0$$

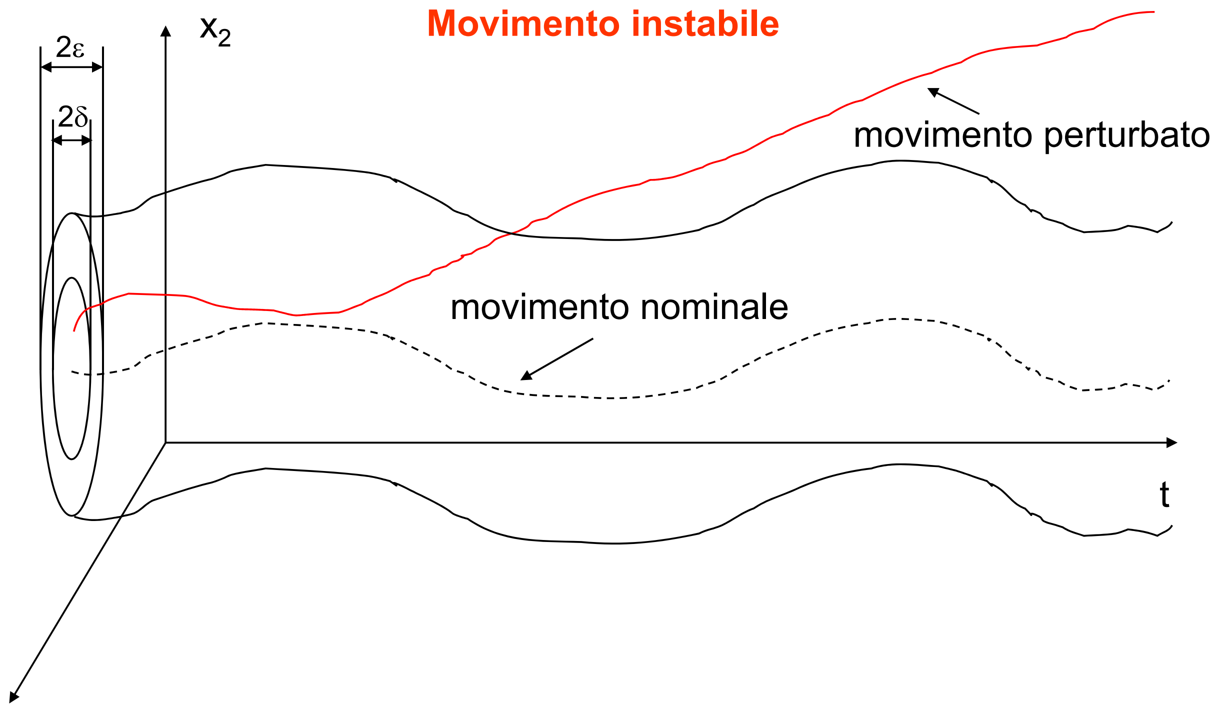
Stabilità: interpretazione geometrica



Stabilità: interpretazione geometrica - 1



Stabilità: interpretazione geometrica - 2



Stabilità rispetto a perturbazioni dell'ingresso

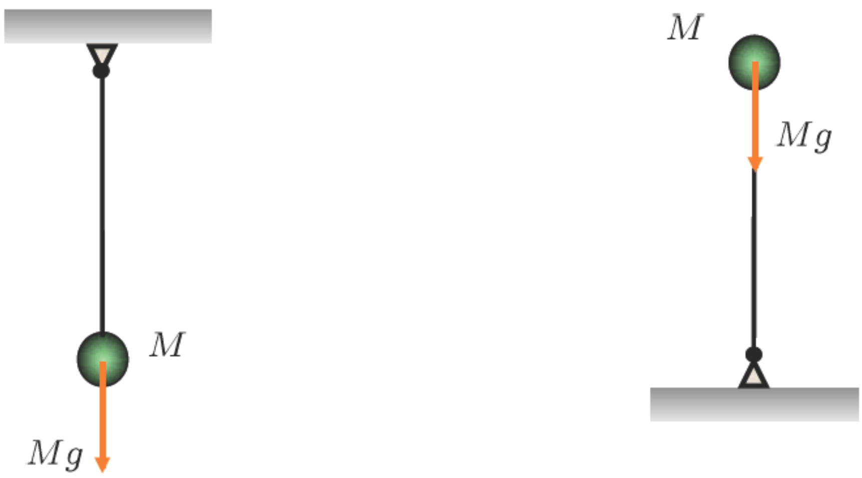
- Dato $\delta x_2(t) = x_2(t) - x(t)$ si dice che il moto di riferimento **è stabile rispetto a** $\delta u(\cdot)$ o anche **stabile ingresso limitato – stato limitato**, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che quando $\|\delta u(\cdot)\| < \delta$ risulta $\|\delta x_2(t)\| < \varepsilon; \quad \forall t \geq t_0$
- Riferendosi alla funzione di risposta $y(t) = \gamma(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$ anziché alla funzione di transizione $x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$ si ottiene in modo analogo la definizione di **stabilità ingresso limitato – uscita limitata**

Osservazioni

- La stabilità, così come è stata definita, si riferisce ad un moto (o ad una risposta), individuato da una terna t_0, $x(t_0)$, $u(.)$, **NON** al sistema
- La stabilità può essere riferita ad uno **stato di equilibrio**:
$$\bar{x} = \phi(t, t_0, \bar{x}, u(\cdot))$$
che è un particolare moto del sistema
- Si è soliti distinguere la stabilità in piccolo (piccole perturbazioni) dalla stabilità in grande o globale, per la quale si misura l'entità della perturbazione cui corrisponde un comportamento stabile dei movimenti del sistema (globale ➔ entità qualunque)

Esempio: stati di equilibrio stabili e instabili

Pendolo sollecitato dalla sola forza di gravità:



Stabile (asintotic. stabile se c'è attrito)

Instabile

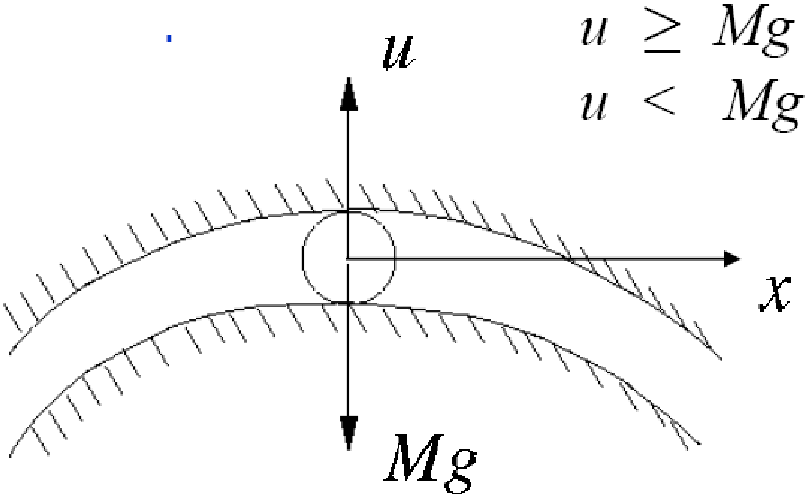
Esempio: stabilità dipendente dall'ingresso

Sfera che scorre in una guida, spinta verso l'alto dalla forza *u* (e sottoposta all'azione della gravità):

$x=0,\ u(\cdot)$ è uno stato di equilibrio:

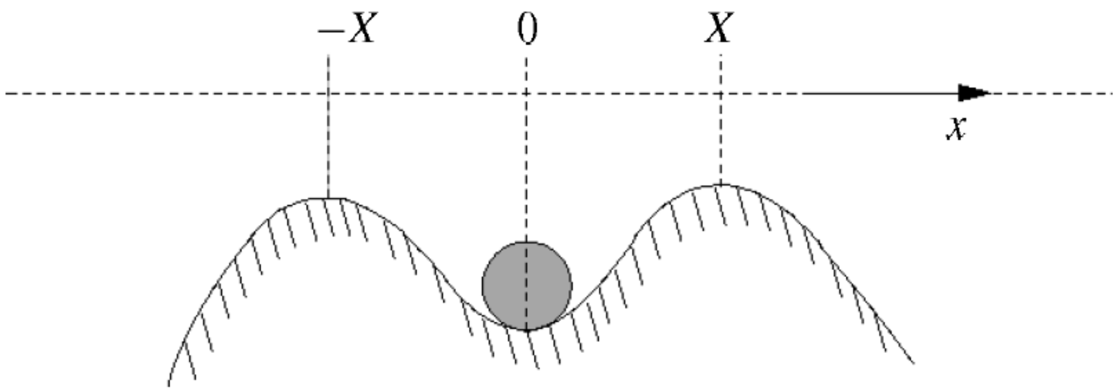
$u \geq Mg$ stabile

$u < Mg$ instabile



Esempio: stabilità in grande

Sfera su una superficie ondulata (sempre considerando l'azione della gravità):



$x=0$ è un punto di equilibrio il cui dominio di stabilità è $-X < x < X$.

Osservazioni - 1

- Per un sistema libero (cioè senza ingressi):

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

uno **stato di equilibrio** è uno stato $\bar{x}$ tale che:

$$0 = f(\bar{x}, t)$$

- Questa condizione evidenzia l'associazione intuitiva tra *stabile* e *fermo* → $\dot{\bar{x}} = 0$
- Tuttavia, come già detto, la stabilità è in realtà un concetto associato al *movimento*, del quale lo stato di equilibrio è un caso particolare (anche per sistemi dotati di ingresso)

Analisi dei sistemi dinamici
SOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI STAZIONARI

Sistemi lineari stazionari (o tempo-invarianti, LTI)

- Tempo continuo $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$
- Tempo discreto $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$
- Per tali sistemi è possibile calcolare **in forma esplicita** la funzione di transizione dello stato $x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$ e la funzione di risposta $y(t) = \gamma(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$

Soluzione di equazioni differenziali

- Una equazione differenziale scalare e omogenea:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

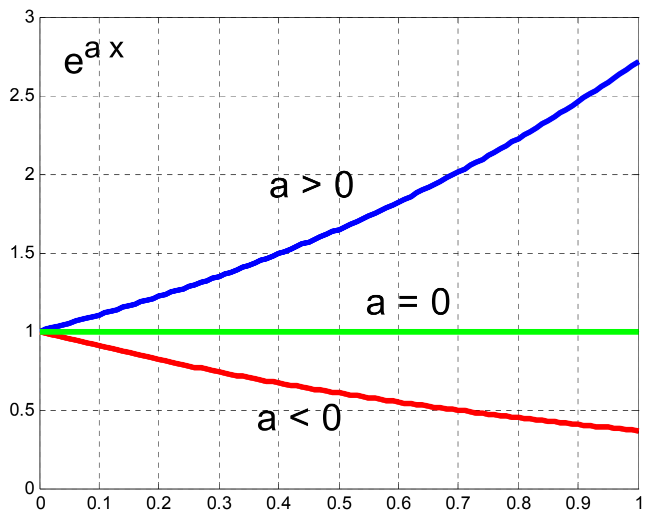
ha una soluzione del tipo $x(t) = x_0 e^{at}$

- Il comportamento della soluzione dipende ovviamente dal segno e dal valore di *a* (o della sua parte reale, $e^{(x+jy)} = e^x(\cos y + j\sin y)$)
- Sviluppo in serie della funzione esponenziale:

$$e^{at} = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \frac{t^i}{i!} = 1 + at + a^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + a^r\frac{t^r}{r!} + \ldots \qquad a \in \mathbb{R}$$

Soluzione di equazioni differenziali - 1

- Funzione esponenziale naturale:



Soluzione di equazioni differenziali - 2

- Caso vettoriale omogeneo (sistema LTI con u(t)=0)

$$\dot{x}(t) = Ax(t); \quad x(0) = x_0,\ x(t) \in \mathbb{R}^n$$

- **Teorema**: la soluzione dell'equazione differenziale vettoriale è del tipo:

$$x(t) = e^{At} x_0$$

dove

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{t^i}{i!} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + A^r \frac{t^r}{r!} + \ldots$$

è chiamata **esponenziale della matrice A**

Osservazioni

- Conoscere l'esponenziale della matrice A equivale a conoscere la soluzione dell'equazione differenziale per ogni condizione iniziale
- Si noti anche che:

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i t^{i-1}}{(i-1)!} = A e^{At}$$

$$e^{At}_{(t=0)} = I$$

Proprietà dell'esponenziale della matrice A

- E' **non singolare** per ogni t, per cui si può scrivere: $$x(0) = (e^{At})^{-1} x(t)$$
- Altre proprietà utili:

$$(e^{At})^{-1} = e^{-At}$$

$$e^{A(t+\tau)} = e^{At} e^{A\tau}$$

$$(e^{At})^k = e^{Akt}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{(A+B)t} \neq e^{At} e^{Bt}$$

e^{At} = Matrice di transizione

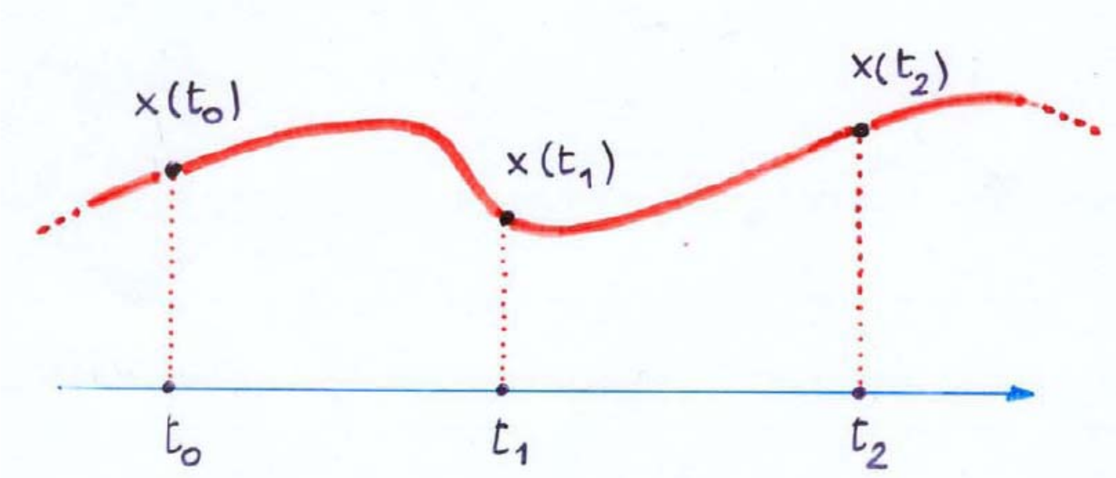
- L'esponenziale della matrice A è anche chiamata **matrice di transizione** perché determina, in assenza di ingresso, il moto libero:

$$x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), 0) = e^{A(t-t_0)} x(t_0)$$

- In generale, si definisce matrice di transizione dello stato $\Phi(t, t_0)$ la soluzione dell'equazione differenziale matriciale (caso non stazionario):

$$\dot{X}(t) = A(t) X(t); \quad X(t_0) = I$$

Proprietà di composizione



$$x(t_1) = e^{A(t_1-t_0)}x(t_0)$$
$$x(t_2) = e^{A(t_2-t_0)}x(t_0) = e^{A(t_2-t_1)}x(t_1)$$
$$= \underbrace{e^{A(t_2-t_1)}e^{A(t_1-t_0)}}_{e^{A(t_2-t_0)}}x(t_0)$$

Calcolo di e^{At} : basi teoriche

[Def.] Il **polinomio caratteristico** di una matrice reale A (n x n) è dato da:

$$a(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

[Def.] L'**equazione caratteristica** di A è data dal polinomio caratteristico eguagliato a 0:

$$a(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

[Def.] Le radici dell'equazione caratteristica sono gli **autovalori** di A (che possono essere numeri complessi):

$$a(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\ldots(\lambda - \lambda_h)^{n_h} = 0$$

Calcolo di e^{At} : basi teoriche - 1

[Teorema di Cayley-Hamilton]

La matrice A soddisfa l'equazione caratteristica:

$$a(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0$$

N.B.: dal teorema risulta quindi che:

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \cdots - a_1 A - a_0 I$$

Ciò risulterà di grande importanza, oltre che per il calcolo dell'esponenziale, anche per l'analisi delle proprietà strutturali di un sistema LTI

Calcolo di e^{At} : basi teoriche - 2

[Def.] Un **polinomio annullatore** per A è un polinomio che soddisfa la relazione:

$$p(A) = 0$$

[Def.] Il **polinomio minimo** di A è il polinomio annullatore di grado minimo

$$\alpha(A) = 0$$

Calcolo di e^{At} : basi teoriche - 3

- **Proprietà** del polinomio minimo:
  - È unico se considerato monico (coefficiente del termine con esponente maggiore = 1)
  - È un divisore del polinomio caratteristico:

$$\alpha(\lambda) = \frac{\det(\lambda I - A)}{b(\lambda)}$$

dove $b(\lambda)$ è il massimo comun divisore (monico) degli elementi della matrice $\mathrm{agg}(\lambda I - A)$

Calcolo di e^{At} : basi teoriche - 4

- **Proprietà** del polinomio minimo:
  - Ha come radici tutti gli autovalori di A

$$\alpha(\lambda) = \lambda^l + \alpha_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 =$$
$$= (\lambda - \lambda_1)^{l_1}(\lambda - \lambda_2)^{l_2}\ldots(\lambda - \lambda_h)^{l_h}$$

con $0 < l_i \leq n_i \quad (i = 1, 2, \ldots, h)$

$$\sum_{i=1}^{h} l_i = l \leq \sum_{i=1}^{h} n_i = n$$

Calcolo di e^{At} : basi teoriche - 5

- **Proprietà** del polinomio minimo:
  - La matrice $(\lambda I - A)^{-1} = \dfrac{\mathrm{agg}(\lambda I - A)}{\det(\lambda I - A)}$

    è una matrice i cui elementi sono rapporti tra polinomi in funzione di λ
  - Il minimo comune multiplo dei denominatori di tale matrice è il polinomio minimo di A
  - Il calcolo di questa matrice e del m.c.m. dei denominatori costituiscono appunto il procedimento per determinare il polinomio minimo di A

Calcolo di e^{At} : basi teoriche - 6

- **Richiami** di algebra lineare:
  - Inversa di una matrice quadrata: A^{-1}

    $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
  - Se A ha l'inversa è invertibile o non singolare
  - La matrice inversa di può calcolare come:

    $$A^{-1} = \frac{\mathrm{agg}(A)}{\det(A)}$$
  - La matrice $\mathrm{agg}(A)$ si ottiene associando ad ogni elemento di riga *i* e colonna *j* il complemento algebrico dell'elemento di A di riga *j* e colonna *i*

Calcolo di e^{At} : basi teoriche - 7

- **Richiami** di algebra lineare:
  - Il complemento algebrico dell'elemento a_{ij} di una matrice quadrata A si ottiene calcolando il determinante della matrice risultante da A eliminando la riga i e la colonna j, moltiplicato per $(-1)^{i+j}$
  - ESEMPIO: per A (2x2)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \dfrac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \\ \dfrac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \dfrac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix}$$

Calcolo di e^{At} : un procedimento analitico

- Nel seguito viene descritto un metodo, basato sul cosiddetto *polinomio interpolante,* per ottenere l'espressione di e^{At}
- Ottenuta tale espressione, si potrà notare che tutti gli elementi della matrice sono delle combinazioni di termini elementari costituiti da funzioni (scalari) esponenziali, cioè del tipo $e^{\lambda t}$
- Si vedranno infine la natura (i.e. sono gli autovalori di A) e l'importante ruolo dei coefficienti λ che compaiono in tali termini elementari

Calcolo di e^{At} : un procedimento analitico - 1

- **Punto di partenza**: teoria delle funzioni di matrice
- Sia A una matrice reale (n x n) e si consideri una funzione (scalare) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sviluppabile in serie di potenze:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

- La corrispondente funzione di matrice è definita:

$$f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i A^i$$

Calcolo di e^{At} : un procedimento analitico - 2

- Per la funzione di matrice non è però necessario considerare serie di infiniti termini.
- Infatti, dal polinomio minimo (monico) di A:

$$\begin{aligned}\alpha(\lambda) &= \lambda^l + \alpha_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = \\ &= (\lambda - \lambda_1)^{l_1}(\lambda - \lambda_2)^{l_2} \ldots (\lambda - \lambda_h)^{l_h}\end{aligned}$$

risulta (applicando il teorema di Cayley-Hamilton):

$$A^l = -\alpha_{l-1}A^{l-1} - \cdots - \alpha_1 A - \alpha_0 I$$

- **NOTA**: nel contesto scalare, questo vale solo rimpiazzando la matrice A con uno dei suoi autovalori λ_k

$$\lambda_k^l = -\alpha_{l-1}\lambda_k^{l-1} - \cdots - \alpha_1\lambda_k - \alpha_0 \; (k = 1, 2, \ldots, h)$$

Calcolo di e^{At} : un procedimento analitico - 3

- **PERTANTO**, le serie considerate si riducono a:

$$f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i A^i = \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i A^i$$

← Funzione di matrice

↙ Funzione scalare

$$f(\lambda_k) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \lambda_k^i = \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i \lambda_k^i \quad (k = 1, 2, \ldots, h)$$

con una opportuna definizione dei *coefficienti* $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{l-1}$

Calcolo di e^{At} : un procedimento analitico - 4

- I coefficienti (che si vedrà poi essere a loro volta <u>funzioni scalari del tempo</u>) $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{l-1}$ che compaiono nell'espressione matriciale e in quelle scalari sono gli stessi
- Per determinarli, si possono quindi sfruttare le espressioni ottenute dalla funzione scalare <u>sostituendo</u> alla variabile scalare <u>gli autovalori di A</u>
- Nel caso di interesse, l'obiettivo finale è ottenere l'esponenziale della matrice A, quindi

$$f(x) = e^{xt} \quad \Rightarrow \quad f(A) = e^{At}$$

N.B.: funzione di *x*, non di *t*..

Calcolo di e^{At} : un procedimento analitico - 5

- Le condizioni sulla funzione scalare si possono esprimere in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ \vdots \\ f(\lambda_h) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{l-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{l-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_h & \lambda_h^2 & \dots & \lambda_h^{l-1} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice di Vandermonde}} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{l-1} \end{bmatrix}$$

N.B.: una matrice di Vandermonde è una matrice le cui righe (o colonne) hanno elementi in progressione geometrica a partire da 1. Tale tipo di matrice è sempre invertibile

Calcolo di e^{At} : un procedimento analitico - 5a

Nel caso di interesse, cioè per calcolare $f(A) = e^{At}$, risulta il seguente sistema di vincoli:

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_h t} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{l-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{l-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_h & \lambda_h^2 & \dots & \lambda_h^{l-1} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice di Vandermonde}} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{l-1} \end{bmatrix}$$

Calcolo di e^{At} : un procedimento analitico - 6

- A questo punto, si possono presentare due casi, a seconda della molteplicità degli autovalori (nel polinomio minimo):
  1. Tutti gli autovalori hanno molteplicità unitaria (radici distinte nel polinomio minimo), vale a dire $h = l$
  2. Uno o più autovalori hanno molteplicità maggiore di uno (radici multiple nel polinomio minimo), vale a dire $h \neq l$

Calcolo di e^{At} : un procedimento analitico - 7

1. Se $h = l$ (radici distinte nel polinomio minimo), il sistema di equazioni **ha soluzione**, essendo la matrice dei coefficienti (di *Vandermonde*) non singolare (i.e. invertibile) per costruzione.

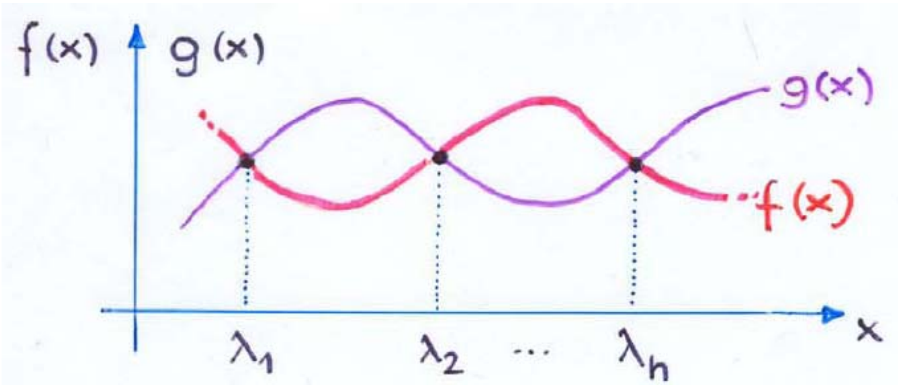
   Ricavati i coefficienti $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{l-1}$ è possibile calcolare la funzione di matrice con:

$$f(A) = \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i A^i$$

Calcolo di e^{At} : un procedimento analitico - 8

NOTA BENE: $$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \neq \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i x^i = g(x)$$

Per la funzione scalare l'uguaglianza vale se $x = \lambda_k \ (k = 1, .., h)$, per la funzione di matrice vale sempre! Questo metodo per il calcolo di e^{At} prende il nome appunto da tale aspetto, evidenziabile in modo grafico come segue:



Calcolo di e^{At} : un procedimento analitico - 9

Se $h \neq l$, occorre fare ulteriori considerazioni.

Anzitutto, si noti che, dato un qualunque altro polinomio *h(x)* per il quale valga:

$$f(A) = g(A) = h(A)$$

si avrà ➔ $g(A) - h(A) = \mathbf{0}$

il che significa che il polinomio minimo (che t.c. $\alpha(A) = 0$) è un divisore per *g(x)-h(x)*, cioè esiste un polinomio $\beta(x)$ tale che:

$$g(x) - h(x) = \alpha(x)\beta(x)$$

Calcolo di e^{At} : un procedimento analitico - 9a

Inoltre, nei punti di interesse per la variabile scalare *x* (cioè gli autovalori di A), il polinomio minimo ha anche derivate (rispetto a *x*) nulle fino all'ordine pari alla molteplicità dell'autovalore considerato:

$$0 = \alpha(\lambda_k) = \alpha'(\lambda_k) = \cdots = \alpha^{(l_k-1)}(\lambda_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, h)$$

Calcolo di e^{At} : un procedimento analitico - 10

Di conseguenza: $g(\lambda_k) = h(\lambda_k)$

$$g'(\lambda_k) = h'(\lambda_k)$$

....

$$g^{(l_k-1)}(\lambda_k) = h^{(l_k-1)}(\lambda_k)$$

➔Tutti i polinomi = *f(A)* e <u>le loro derivate</u> fino alla (l_k-1)-esima assumono gli stessi valori in λ_k (con k=1,2,…,h)

Calcolo di e^{At} : un procedimento analitico - 11

In base a questi risultati, si può estendere il problema di calcolo dei coefficienti $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{l-1}$ impostando un sistema di equazioni basato su una matrice di *Vandermonde generalizzata*, nella quale cioè vi siano blocchi di righe ciascuna delle quali pari alla derivata della precedente

Calcolo di e^{At} : un procedimento analitico - 12

2. Se $h \neq l$ il sistema da risolvere diventa (in generale):

$$\begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f'(\lambda_1) \\ \vdots \\ f^{l_1-1}(\lambda_1) \\ \hline f(\lambda_2) \\ f'(\lambda_2) \\ \vdots \\ f^{l_2-1}(\lambda_2) \\ \hline \vdots \\ f^{l_h-1}(\lambda_h) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{l-1} \\ 0 & 1 & \ldots & (l-1)\lambda_1^{l-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \frac{(l-1)!}{(l-l_1)!}\lambda_1^{l-l_1} \\ \hline 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^{l-1} \\ 0 & 1 & \ldots & (l-1)\lambda_2^{l-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \frac{(l-1)!}{(l-l_2)!}\lambda_2^{l-l_2} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \frac{(l-1)!}{(l-l_h)!}\lambda_h^{l-l_h} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice di Vandermonde generalizzata}} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{l-1} \end{bmatrix}$$

N.B.: derivate di f(x), calcolate in λ_k

Calcolo di e^{At} : un procedimento analitico - 13

Anche in questo secondo caso, ricavati i coefficienti $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{l-1}$ (in quanto anche la matrice di *Vandermonde generalizzata* si può dimostrare essere invertibile) è possibile calcolare la funzione di matrice con:

$$f(A) = \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i A^i$$

Calcolo di e^{At} : un procedimento analitico - 14

Per il caso specifico di interesse $f(A) = e^{At}$ risulta:

$$\left[\begin{array}{c} e^{\lambda_1 t} \\ t e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ t^{l_1-1} e^{\lambda_1 t} \\ \hline e^{\lambda_2 t} \\ t e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ t^{l_2-1} e^{\lambda_2 t} \\ \hline \vdots \\ t^{l_h-1} e^{\lambda_h t} \end{array}\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{l-1} \\ 0 & 1 & \ldots & (l-1)\lambda_1^{l-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \frac{(l-1)!}{(l-l_1)!}\lambda_1^{l-l_1} \\ \hline 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^{l-1} \\ 0 & 1 & \ldots & (l-1)\lambda_2^{l-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \frac{(l-1)!}{(l-l_2)!}\lambda_2^{l-l_2} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \frac{(l-1)!}{(l-l_h)!}\lambda_h^{l-l_h} \end{array}\right]}_{\text{Matrice di Vandermonde generalizzata}} \left[\begin{array}{c} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{l-1} \end{array}\right]$$

N.B.: derivate di e^{xt}, rispetto a x, calcolate in λ_k

Calcolo di e^{At} : un procedimento analitico - 15

RIASSUMENDO: per calcolare e^{At}, calcolare gli h autovalori di A ed analizzare il grado l del polinomio minimo, poi determinare $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{l-1}$ da uno dei seguenti sistemi:

$\boxed{\text{1. Se } h = l}$

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_h t} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{l-1} \\ 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^{l-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_h & \ldots & \lambda_h^{l-1} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice di Vandermonde}} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{l-1} \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{2. Se } h \neq l}$

$$\left[\begin{array}{c} e^{\lambda_1 t} \\ t\,e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ t^{l_1-1} e^{\lambda_1 t} \\ \hline \vdots \\ \hline \vdots \\ t^{l_h-1} e^{\lambda_h t} \end{array}\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{l-1} \\ 0 & 1 & \ldots & (l-1)\lambda_1^{l-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \frac{(l-1)!}{(l-l_1)!}\lambda_1^{l-l_1} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \frac{(l-1)!}{(l-l_h)!}\lambda_h^{l-l_h} \end{array}\right]}_{\text{Matrice di Vandermonde generalizzata}} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{l-1} \end{bmatrix}$$

Calcolo di e^{At} : un procedimento analitico - 15a

INFINE: esplicitare e^{At} calcolando la serie di l termini in funzione dei coefficienti $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{l-1}$ e delle potenze di A:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i A^i = \gamma_0 I + \gamma_1 A + \gamma_2 A^2 + \cdots + \gamma_{l-1} A^{l-1}$$

Calcolo di e^{At} : osservazioni

- Il metodo visto per il calcolo dell'esponenziale di matrice è detto metodo del *polinomio interpolante*
- In letteratura esistono diversi altri metodi per il calcolo di e^{At} :
  - tramite la *forma di Jordan* della matrice A
  - tramite la forma triangolare di A ottenuta per *scomposizione di Schur*
  - …
- Qualunque sia il metodo utilizzato, gli elementi di e^{At} hanno una forma ben precisa (slide seguente)

Calcolo di e^{At} : definizione dei *modi*

STRUTTURA GENERALE DI e^{At} :

- Ogni termine di e^{At} è una combinazione lineare a coefficienti costanti di termini del tipo:

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{l_1-1}e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_h t}, \ldots, t^{l_h-1}e^{\lambda_h t}$$

- Questi termini elementari si chiamano **modi** di e^{At} e caratterizzano completamente il **moto libero** del sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$

Calcolo di e^{At} : definizione dei *modi* - 1

OSSERVAZIONE:

- Gli autovalori di A possono essere complessi, nel qual caso sarà sempre presente una coppia di valori complessi coniugati: $\lambda_{i1,i2} = \sigma_i \pm j\omega_i$
- Applicando la formula di Eulero ($e^{x+jy} = e^x(\cos y + j\sin y)$) i modi associati a tali autovalori complessi risultano del tipo:
  $e^{\sigma_i t}cos(\omega_i t), e^{\sigma_i t}sin(\omega_i t), \ldots, t^{l_i-1}e^{\sigma_i t}cos(\omega_i t), t^{l_i-1}e^{\sigma_i t}sin(\omega_i t)$
- **N.B.:** essendo gli autovalori complessi sempre presenti con il proprio coniugato, la matrice e^{At} e quindi i modi della risposta risultano comunque **REALI**

Calcolo di e^{At} : primo esempio

- Si consideri: $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

  i cui autovalori sono: $\lambda_1 = -3;\ \lambda_2 = 2$

  In questo semplice caso è immediato vedere che:

$$e^{At} = \gamma_0 I + \gamma_1 A = \begin{bmatrix} \gamma_0 - 3\gamma_1 & \gamma_1 \\ 0 & \gamma_0 + 2\gamma_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}$$

Calcolo di e^{At} : primo esempio - 1

- Perciò: $$\begin{cases} e^{-3t} = \gamma_0 - 3\gamma_1 \\ e^{2t} = \gamma_0 + 2\gamma_1 \end{cases}$$

  dalla cui soluzione si ottiene:
  $$\begin{cases} \gamma_0 = \frac{3e^{2t}}{5} + \frac{2e^{-3t}}{5} \\ \gamma_1 = \frac{e^{2t} - e^{-3t}}{5} \end{cases}$$

  e quindi:
  $$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & \frac{e^{2t} - e^{-3t}}{5} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Calcolo di e^{At} : primo esempio - 2

- E' ora possibile calcolare lo stato x(t) in un qualunque istante t, noto x(0), o anche calcolare a ritroso lo stato iniziale, noto x(t) in un certo istante di tempo fissato.
- Es: $x(0) = [1 \;\; 5]^T$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & \frac{e^{2t} - e^{-3t}}{5} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 5e^{2t} \end{bmatrix}$$

Calcolo di e^{At} : secondo esempio

- Si consideri: $$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

con autovalore di molteplicità doppia: $\lambda_1 = -3;$

In questo caso occorre considerare la procedura generalizzata:

$$e^{At} = \gamma_0 I + \gamma_1 A = \begin{bmatrix} \gamma_0 - 3\gamma_1 & \gamma_1 \\ 0 & \gamma_0 - 3\gamma_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ te^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ te^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}$$

Calcolo di e^{At} : secondo esempio - 1

- Perciò: $$\begin{cases} e^{-3t} = \gamma_0 - 3\gamma_1 \\ te^{-3t} = \gamma_1 \end{cases}$$

dalla cui soluzione si ottiene:

$$\begin{cases} \gamma_0 = e^{-3t} + 3te^{-3t} \\ \gamma_1 = te^{-3t} \end{cases}$$

e quindi:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Evoluzione dello stato: soluzione completa ($u(t) \neq 0$)

- Dato: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(0) = x_0,\ x(t) \in \mathbb{R}^n$
  si può dimostrare che la soluzione dell'equazione differenziale è data dalla **formula di Lagrange**:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Moto libero + **Moto forzato**

$$\phi(t, t_0, x_0, 0) \qquad \phi(t, t_0, 0, u(\cdot))$$

Evoluzione dello stato: soluz. completa ($u(t) \neq 0$) - 1

- Verifica della formula di Lagrange:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(e^{At}x_0) + \frac{d}{dt}\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau =$$

$$= Ae^{At}x_0 + e^{A(t-t)}Bu(t) + A\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau =$$

$$= A\underbrace{\left[e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right]}_{x(t)} + Bu(t)$$

Evoluzione dello stato: soluz. completa ($u(t) \neq 0$) - 2

- In generale, se $t_0 \neq 0$:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Funzione di risposta

- Nel caso LTI non omogeneo, si ottiene facilmente:

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x_0}_{\text{Risposta libera}} + \underbrace{\int_{0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{\text{Risposta forzata}}$$

Risposta libera + Risposta forzata

$\gamma(t, t_0, x_0, 0)$ $\quad$ $\gamma(t, t_0, 0, u(\cdot))$

Funzione di risposta - 1

- La matrice: $W(t) = Ce^{At}B$

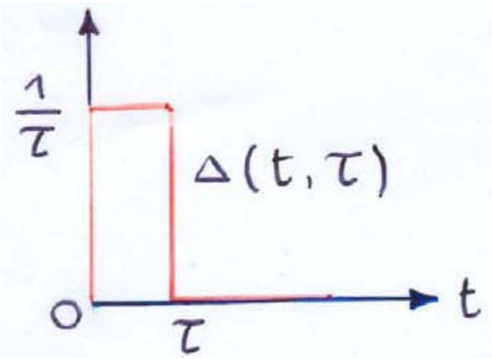
  è chiamata **risposta impulsiva** del sistema
- Se x_0 = 0 ed il sistema è puramente dinamico:

$$y(t) = \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

- La matrice di risposta impulsiva è un **modello matematico ingresso-uscita** del sistema

Funzione di risposta - 2

- La risposta impulsiva può essere determinata sperimentalmente, applicando in ingresso al sistema opportuni segnali di test:



per $\tau \to 0$ si ottiene una segnale di riferimento detto **impulso (o *delta*) di Dirac**

Funzione di risposta - 3

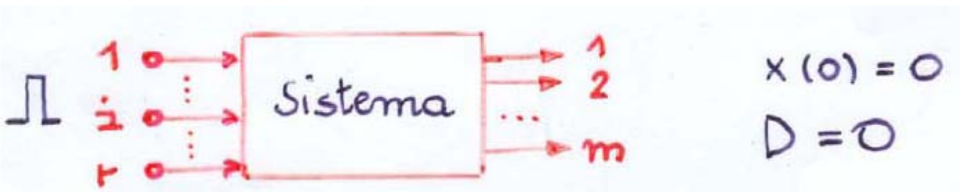
- Caratteristiche dell'impulso di Dirac:

$$\int_0^{\infty} \delta(t)dt = \lim_{\tau \to 0} \int_0^{\infty} \Delta(t,\tau)dt = 1$$

$$\int_0^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \lim_{\tau \to 0} \int_0^{\infty} f(t)\Delta(t,\tau)dt = f(0)$$

Funzione di risposta - 4

- Applicando un impulso di Dirac all'i-esimo ingresso di un sistema puramente dinamico:



$$u(t) = \delta(t)\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} = \delta(t)e_i \quad \Rightarrow \quad y(t) = \int_0^t W(t-\tau)\delta(\tau)e_i d\tau = W(t)e_i$$

i-esimo ingresso

i-esima colonna di *W(t)*

Funzione di risposta - 4a

- Applicando un impulso di Dirac a tutti gli *r* ingressi del sistema si possono ricostruire tutte le colonne della matrice *W(t)*
- Il modello ingresso-uscita del sistema si può pertanto determinare interamente in modo sperimentale

Soluzione di equazioni alle differenze finite

- Caso vettoriale omogeneo (sistema LTI tempo-discreto, con u(k)=0)

$$x(k+1) = Ax(k); \quad x(0) = x_0,\ x(k) \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{Z}$$

- In tale caso, risulta agevolmente:

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax_0 \\ x(2) &= Ax(1) = A^2 x_0 \\ x(3) &= Ax(2) = A^3 x_0 \\ &\dots \\ x(k) &= A^k x_0 \end{aligned}$$

Soluzione di equazioni alle differenze finite - 1

- Pertanto nel caso discreto la **matrice di transizione**, che caratterizza il moto libero, è la **potenza di matrice** A^k
- A differenza dell'esponenziale di matrice, la potenza di matrice **può essere singolare**
- Anche tale matrice può essere calcolata con la teoria delle funzioni di matrice, dalla quale risulta che ogni suo elemento è una combinazione lineare a coefficienti costanti di termini, detti **modi di** A^k , del tipo:

$$\lambda_1^k, k\lambda_1^{k-1}, \dots, (l_1-1)!\binom{k}{l_1-1}\lambda_1^{k-l_1+1}, \dots, \lambda_h^k, \dots, (l_h-1)!\binom{k}{l_k-1}\lambda_h^{k-l_h+1}$$

Modi: caso continuo e caso discreto

Modi di e^{At}:

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t}, \; t e^{\lambda_1 t}, \; \dots, \; t^{\ell_1 - 1} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_h t}, \; t e^{\lambda_h t}, \; \dots, \; t^{\ell_h - 1} e^{\lambda_h t} \end{cases}$$

radici del polinomio minimo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ autovalori

$\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_h$ molteplicità

Modi di A^K

$$\begin{cases} \lambda_1^K, \; K\lambda_1^{K-1}, \; \dots, \; (\ell_1-1)!\binom{K}{\ell_1-1}\lambda_1^{K-\ell_1+1} \\ \vdots \\ \lambda_h^K, \; K\lambda_h^{K-1}, \; \dots, \; (\ell_h-1)!\binom{K}{\ell_h-1}\lambda_h^{K-\ell_h+1} \end{cases}$$

Soluzione di equazioni alle differenze finite - 2

- Caso non omogeneo ($u(k) \neq 0$):

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k); \quad x(0) = x_0,\ x(k) \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{Z}$$

risulta:

$$\begin{aligned}
x(1) &= Ax_0 + Bu(0) \\
x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = A^2x_0 + ABu(0) + Bu(1) \\
x(3) &= Ax(2) + Bu(2) = A^3x_0 + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2) \\
&\cdots \\
x(k) &= \underbrace{A^k x_0}_{\text{Moto libero}} + \underbrace{\textstyle\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}Bu(i)}_{\text{Moto forzato}}
\end{aligned}$$

Moto libero + Moto forzato

$\phi(k,0,x_0,0)$ $\qquad$ $\phi(k,0,0,u(\cdot))$

Funzione di risposta – caso discreto

- Per il sistema LTI non omogeno vale:

$$y(k) = \underbrace{CA^k x(0)}_{\text{Risposta libera}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-1-i}Bu(i) + Du(k)}_{\text{Risposta forzata}}$$

Risposta libera + Risposta forzata

$\gamma(k,0,x_0,0)$ $\qquad$ $\gamma(k,0,0,u(\cdot))$

- La matrice $W(k) = CA^{k-1}B$ è la <u>risposta impulsiva</u> per il caso discreto, determinabile applicando ingressi del tipo:

$$u(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

Rappresentazioni equivalenti

Introducendo il concetto di stato ed i modelli per sistemi ingegneristici, si è osservato che **NON** esiste un modo unico di scegliere le variabili di stato per rappresentare un sistema dinamico.

Per un sistema LTI, una volta scelta una base per ***X*=R**^{n}, ***U*=R**^{r} e ***Y*=R**^{m} e scelte le variabili di stato, esso è rappresentato da:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Le proprietà del sistema però, NON dipendono dalla scelta delle variabili di stato…

Considerando una matrice T (n x n) costante e non singolare, è possibile effettuare un **cambio di variabili** e definire un nuovo vettore di stato x come:

$$x = Tz \iff z = T^{-1}x$$

Rappresentazioni equivalenti - 1

Sostituendo nelle equazioni di partenza si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \hat{A}z(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) = \hat{C}z(t) + \hat{D}u(t) \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} \hat{A} = T^{-1}AT & \hat{B} = T^{-1}B \\ \hat{C} = CT & \hat{D} = D \end{array}$$

Il sistema LTI rappresentato da queste equazioni è **equivalente** al sistema LTI di partenza, nel senso che per un ingresso u(t) e due stati iniziali legati dalla condizione

$$z_0 = T^{-1}x_0$$

Le funzioni dello stato x(t) e z(t) sono legate dalla relazione

$$z(t) = T^{-1}x(t) \quad \forall t \geq 0$$

e le uscite sono identiche.

Rappresentazioni equivalenti - 2

Le matrici ***A*** e $\bar{A}$ sono matrici simili, aventi **lo stesso polinomio caratteristico, lo stesso polinomio minimo e gli stessi autovalori**:

$$\det(\lambda I - \hat{A}) = \det(\lambda T^{-1}T - T^{-1}AT) =$$

$$= \det\left[T^{-1}(\lambda I - \hat{A})T\right] = \cancel{\det T^{-1}}\det(\lambda I - A)\cancel{\det T}$$

Risulta inoltre:

$$\hat{A}^2 = T^{-1}A\cancel{TT^{-1}}AT = T^{-1}A^2T$$

$$e^{\hat{A}t} = \sum_{i=0}^{\infty}\hat{A}\frac{t^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty}T^{-1}AT\frac{t^i}{i!} = T^{-1}e^{At}T$$

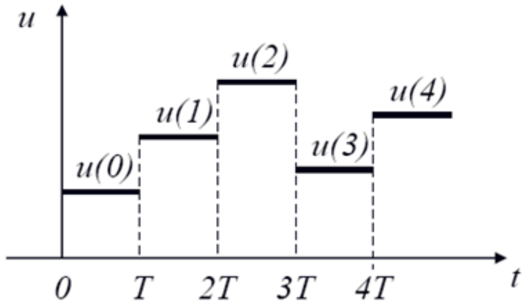
$$\hat{C}e^{\hat{A}t}\hat{B} = C\cancel{TT^{-1}}e^{At}\cancel{TT^{-1}}B = Ce^{At}B$$

Rappresentazioni equivalenti - 3

- Riassumendo, sia per sistemi continui che per sistemi discreti le rappresentazioni equivalenti hanno le stesse caratteristiche di moto e risposta
- Come si vedrà più avanti, ciò vale anche per altre proprietà, dette appunto **strutturali**, cioè indipendenti dalla scelta delle variabili di stato
- Tuttavia, la scelta delle variabili di stato influisce sulla forma delle matrici A, B e C. Ciò permette, con opportune trasformazioni, di rendere più evidenti alcuni parametri numerici del sistema (sistemi in forma *canonica*)

Discretizzazione di un sistema LTI continuo

- **Discretizzazione (campionamento):** si suppone che ad ogni ingresso venga applicata una funzione costante a tratti



- Integrando l'equazione differenziale tra due istanti di campionamento:

$$x[(k+1)T] = \underbrace{e^{AT}}_{A_d} x(kT) + \underbrace{\int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-\tau]} B d\tau}_{B_d} u(kT)$$

Discretizzazione di un sistema LTI continuo - 1

- Si ottiene pertanto un modello discreto che fornisce ad ogni passo *i* gli stessi valori di stato e uscite del modello continuo all'istante *iT*, nelle ipotesi dette sugli ingressi (costanti a tratti):

$$\begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \\ y(k) = C_d x(k) + D_d u(k) \end{cases}$$

Con:

$$A_d = e^{AT}$$
$$B_d = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-\tau]} B d\tau = \int_0^T e^{A\varepsilon} B d\varepsilon$$
$$C_d = C$$
$$D_d = D$$

Analisi dei sistemi dinamici
STABILITA' DEI SISTEMI LINEARI STAZIONARI

Stabilità di un moto con stato iniziale perturbato

- Dato il sistema LTI continuo $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

moto di riferimento:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

moto perturbato:

$$x_1(t) = e^{At}[x(0) + \delta x_1(0)] + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow \quad \delta x_1(t) = x_1(t) - x(t) = e^{At}\delta x_1(0)$$

Stabilità di un moto con stato iniziale perturbato - 1

- La differenza tra il moto di riferimento e quello perturbato $\delta x_1(t) = e^{At}\delta x_1(0)$ corrisponde di fatto a un moto libero del sistema con stato iniziale $\delta x_1(0)$
- Perché tale differenza tenda a zero, per t → ∞ (i.e. **stabilità asintotica**), occorre che tutti gli elementi di e^{At} (che dipendono dagli autovalori di A) tendano a zero per t → ∞!!

N.B.: Si noti che $\delta x_1(t)$ **NON** dipende dal moto di riferimento, pertanto per i sistemi LTI si può parlare di **stabilità del sistema**, anziché di **stabilità dello specifico moto** (o stato di equilibrio)

Stabilità di un moto con stato iniziale perturbato - 2

- Dato il sistema LTI discreto $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

moto di rif. $x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i)$

moto perturb. $x_1(k) = A^k[x(0) + \delta x_1(0)] + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i)$

$$\Rightarrow \quad \delta x_1(t) = x_1(t) - x(t) = A^k \delta x_1(0)$$

N.B.: Ancora, $\delta x_1(t)$ **NON** dipende dal moto di riferimento, pertanto anche per i sistemi discreti si può parlare di **stabilità del sistema**, anziché di **stabilità dello specifico moto** (o stato di equilibrio)

Stabilità e stati di equilibrio dei sistemi LTI

- Se A è invertibile, il **punto di equilibrio è unico**

$$A\bar{x} + B\bar{u} = 0 \;\Rightarrow\; \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

- Ovviamente, se $\bar{u} = 0 \rightarrow \bar{x} = 0$
- L'unico movimento di interesse per la stabilità è il movimento libero, le cui caratteristiche dipendono da e^{At} (o A^k), cioè **dipendono solo dagli autovalori di A** (che a loro volta **NON** dipendono dalla rappresentazione)

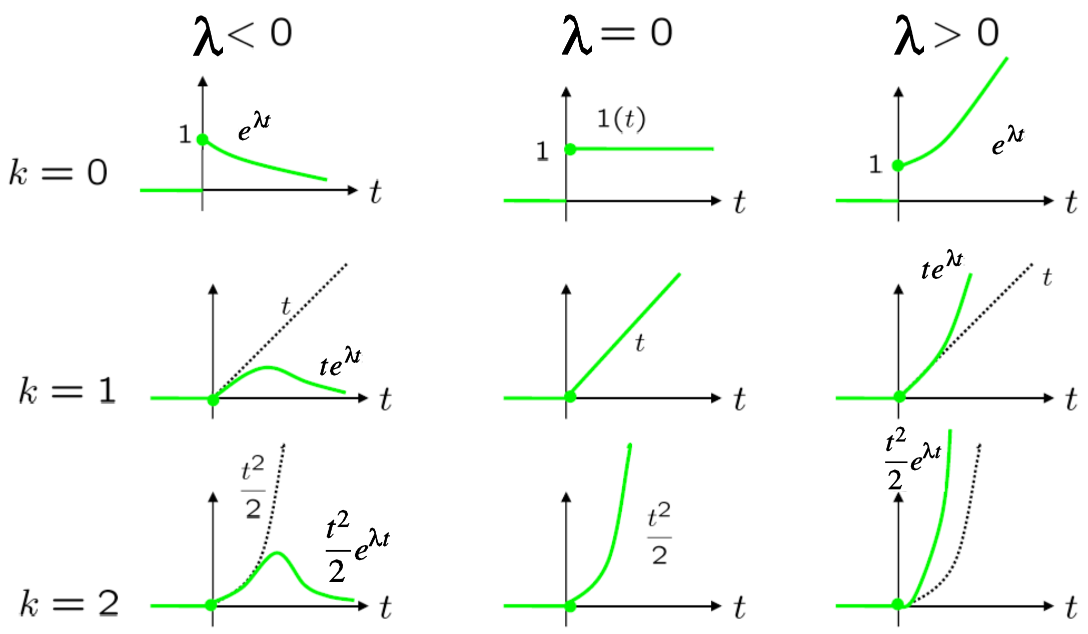
Stabilità e analisi modale

- Per i sistemi LTI il moto libero è caratterizzato dai **modi** della matrice di transizione (e^{At} o A^k)
- Lo studio delle caratteristiche di questi termini elementari viene chiamata **analisi modale**
- Nel *caso continuo*, l'analisi modale si basa sulle proprietà delle funzioni esponenziali. Come noto, tali funzioni convergono a 0 per valori dell'esponente a <u>parte reale negativa</u>.
- Nel *caso discreto*, l'analisi modale si basa sulle potenze. Tali funzioni convergono a 0 per valori della base con <u>modulo inferiore a 1</u>.

Stabilità e analisi modale: tempo continuo

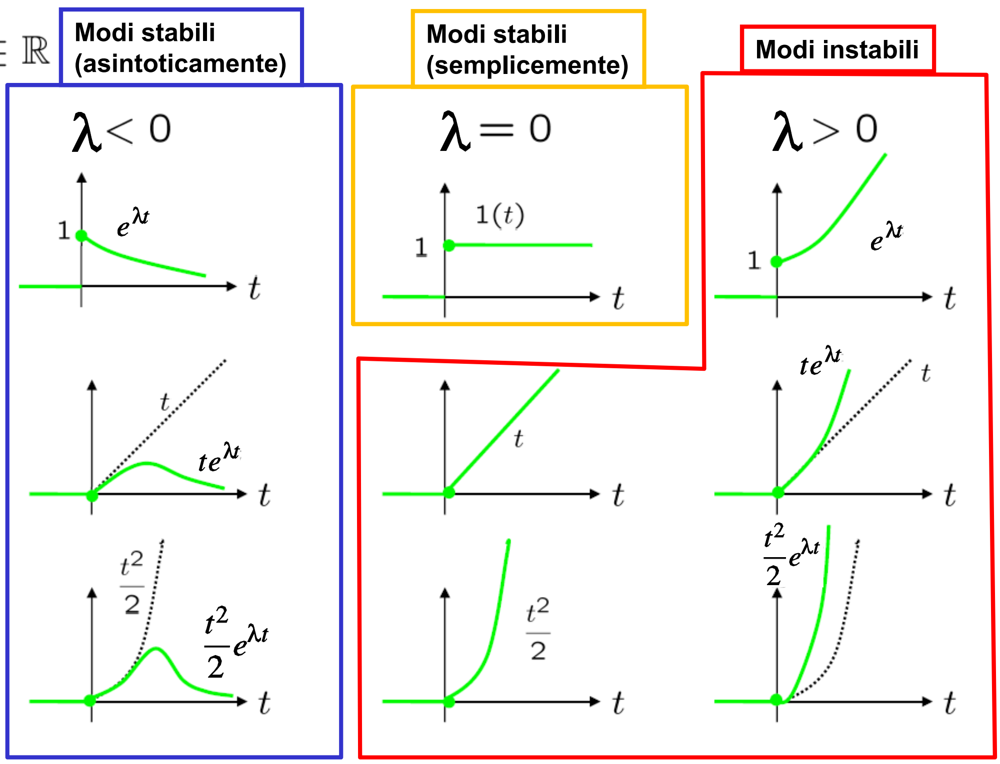
- Studio qualitativo dei termini di tipo $t^k e^{\lambda t}$

a) $\lambda \in \mathbb{R}$



Stabilità e analisi modale: tempo continuo - a

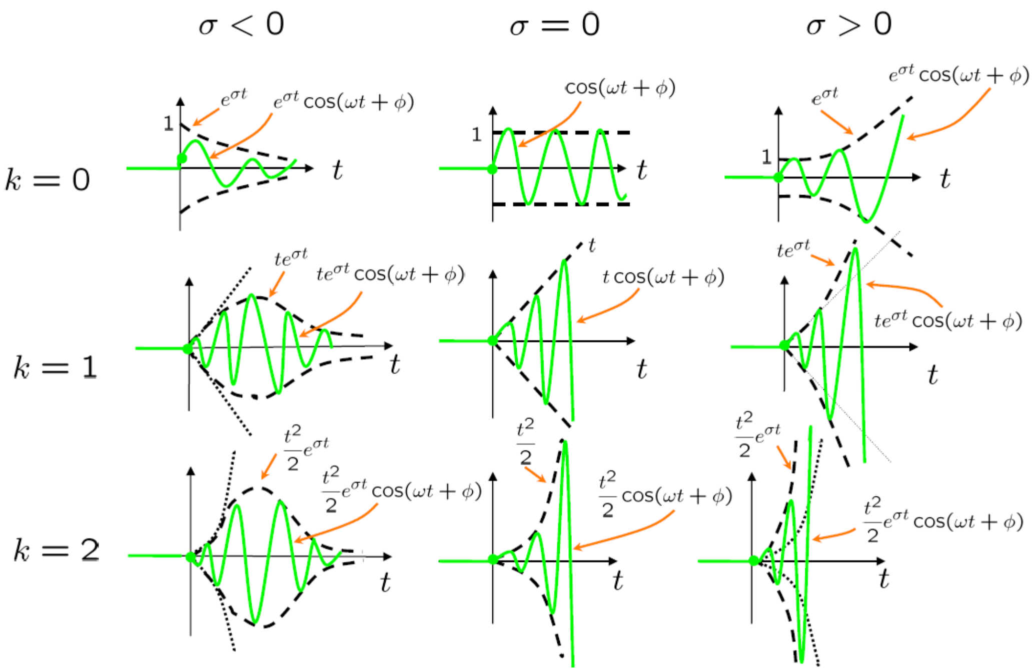
a) $\lambda \in \mathbb{R}$



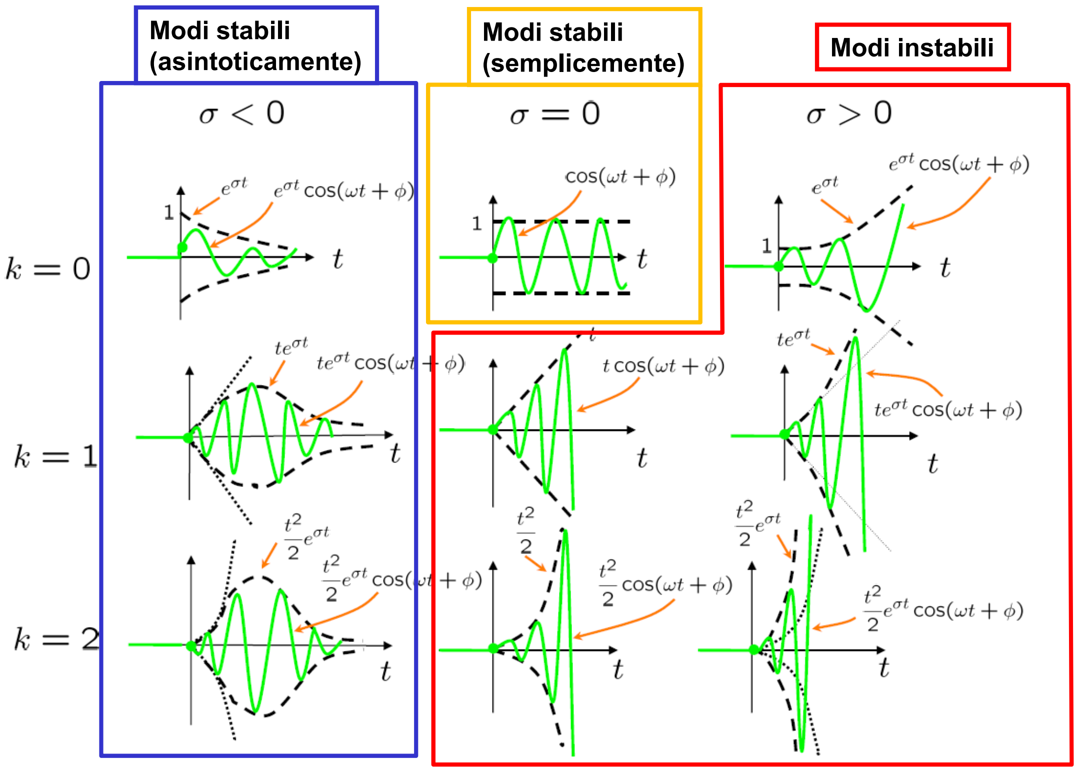
Stabilità e analisi modale: tempo continuo - 1

- Studio qualitativo dei termini di tipo $t^k e^{\lambda t}$

  b) $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda_1 = \sigma + j\omega, \lambda_2 = \sigma - j\omega,$



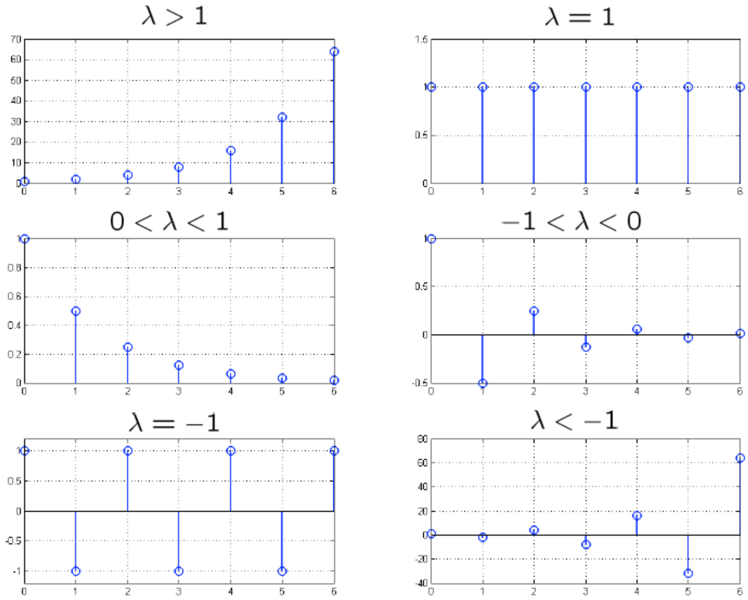
Stabilità e analisi modale: tempo continuo - 1a



Stabilità e analisi modale: tempo discreto

- Studio qualitativo dei termini di tipo $\binom{k}{l}\lambda^{(k-l)}$

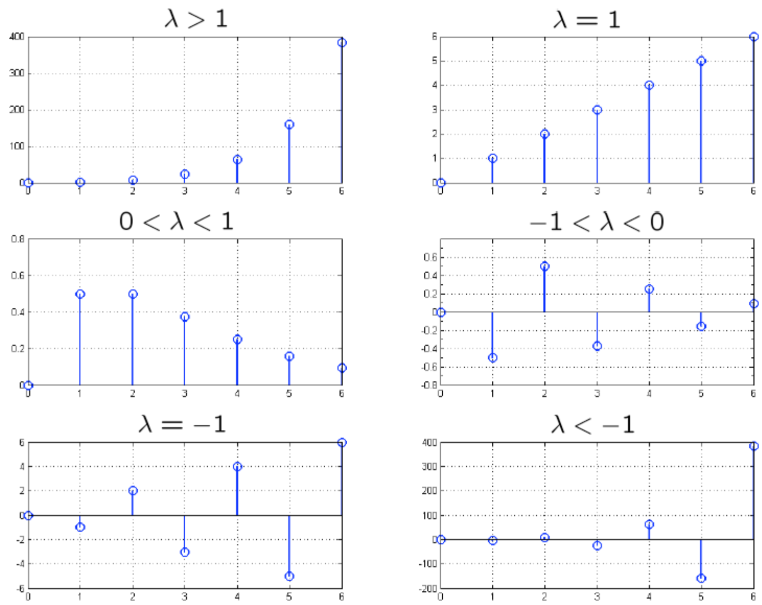
a) $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalori semplici



Stabilità e analisi modale: tempo discreto - 1

- Studio qualitativo dei termini di tipo $\binom{k}{l}\lambda^{(k-l)}$

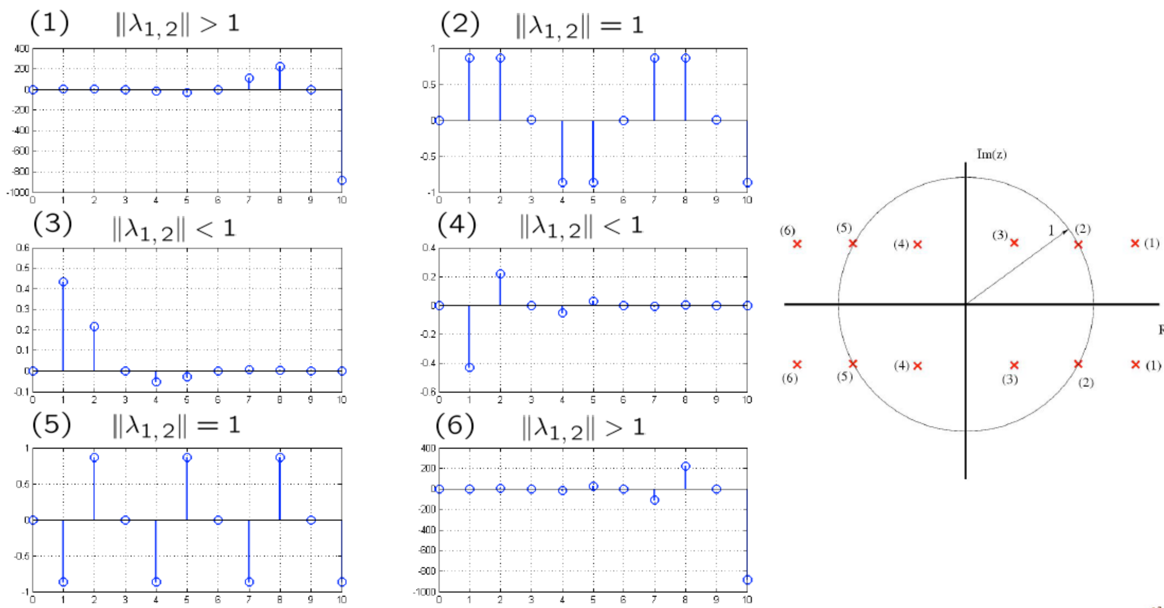
a) $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalori multipli (doppi)



Stabilità e analisi modale: tempo discreto - 2

- Studio qualitativo dei termini di tipo $\binom{k}{l}\lambda^{(k-l)}$

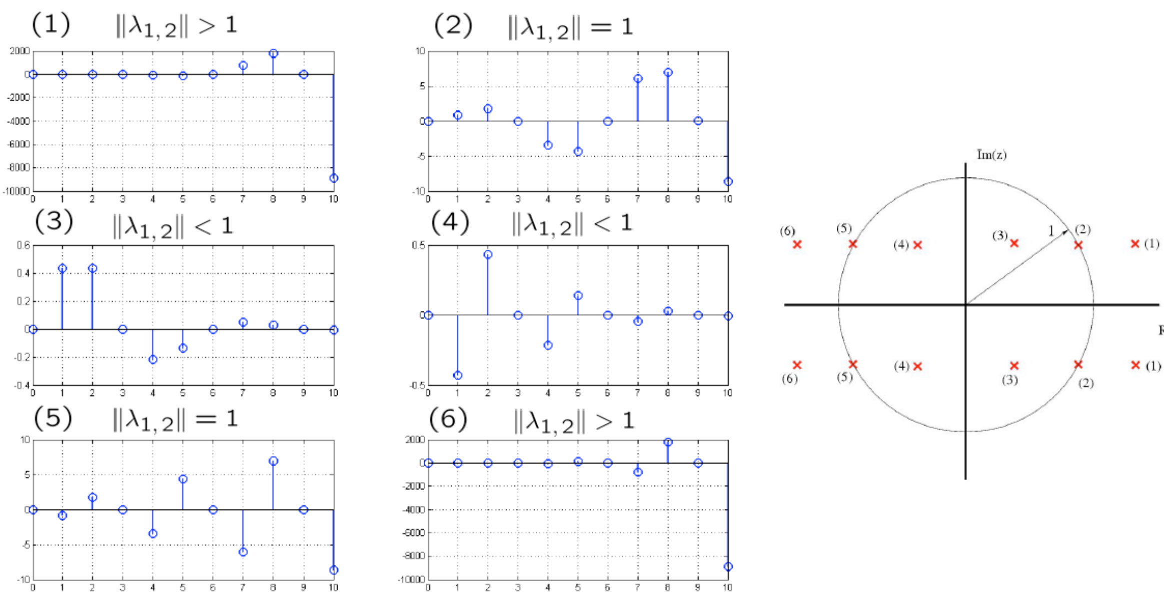
b) $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ **autovalori semplici**



Stabilità e analisi modale: tempo discreto - 3

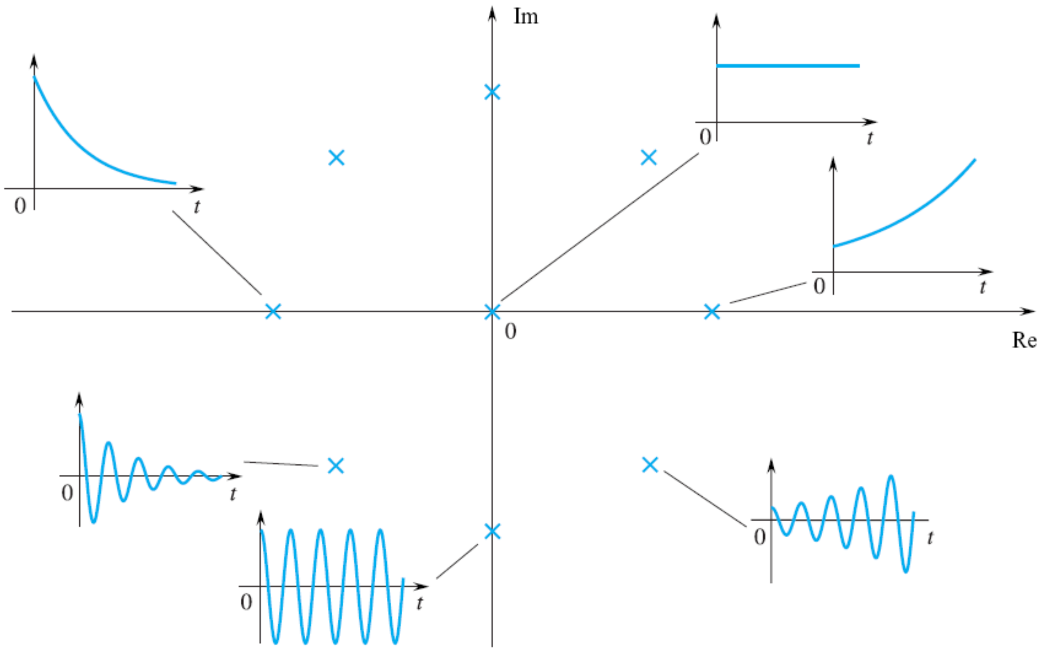
- Studio qualitativo dei termini di tipo $\binom{k}{l}\lambda^{(k-l)}$

b) $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ **autovalori multipli (doppi)**



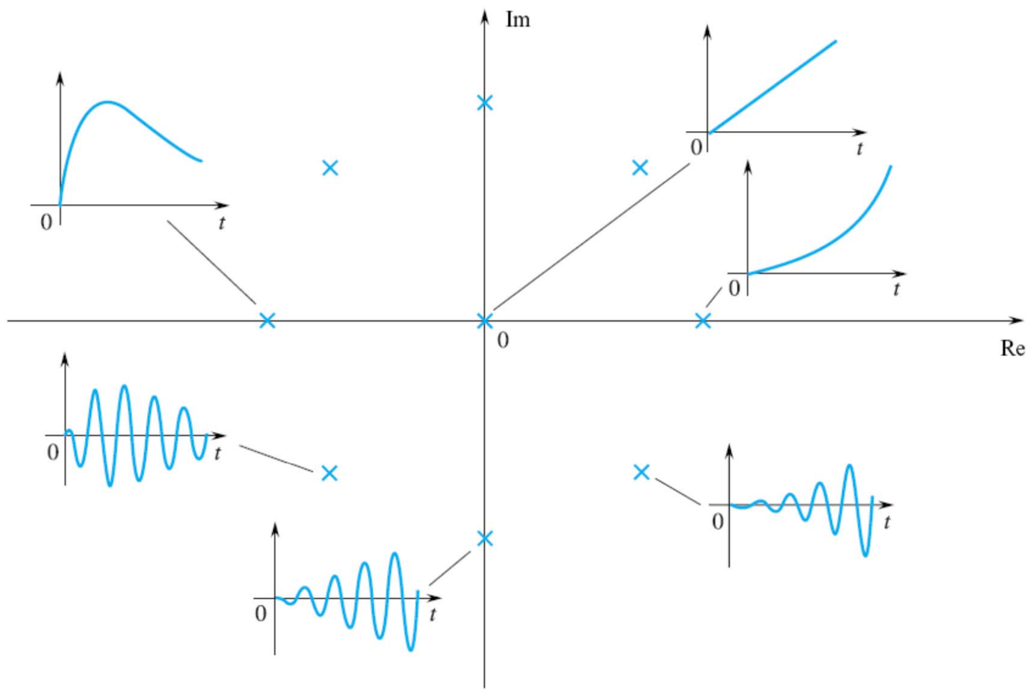
Stabilità e analisi modale: nel piano complesso

- Mappa degli autovalori, caso <u>continuo</u> con molteplicità = 1:



Stabilità e analisi modale: nel piano complesso - 1

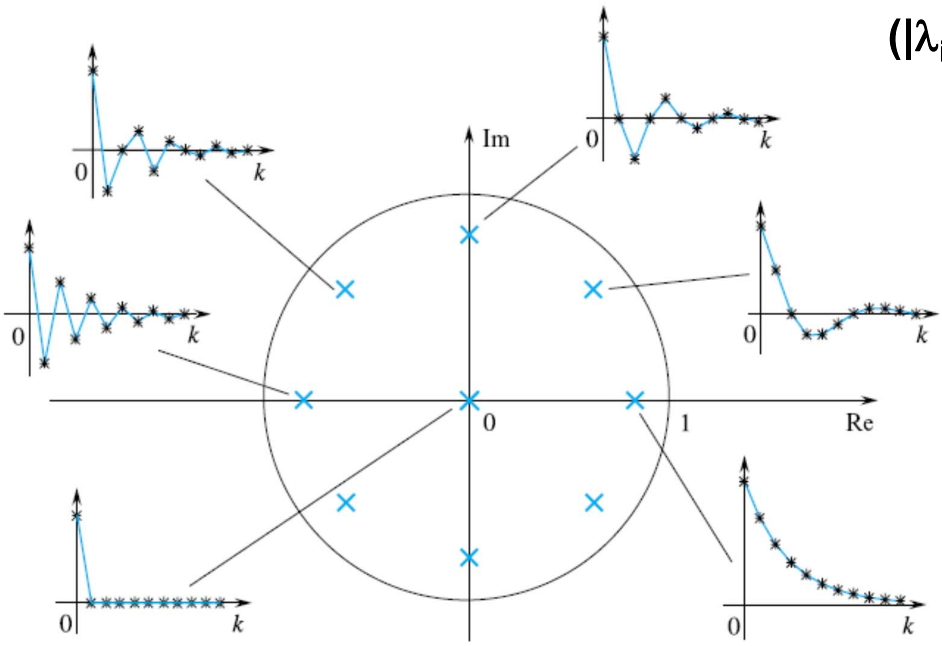
- Mappa degli autovalori, caso <u>continuo</u> con molteplicità = 2:



Stabilità e analisi modale: nel piano complesso - 2

- Mappa degli autovalori, caso <u>discreto</u> con molteplicità = 1:

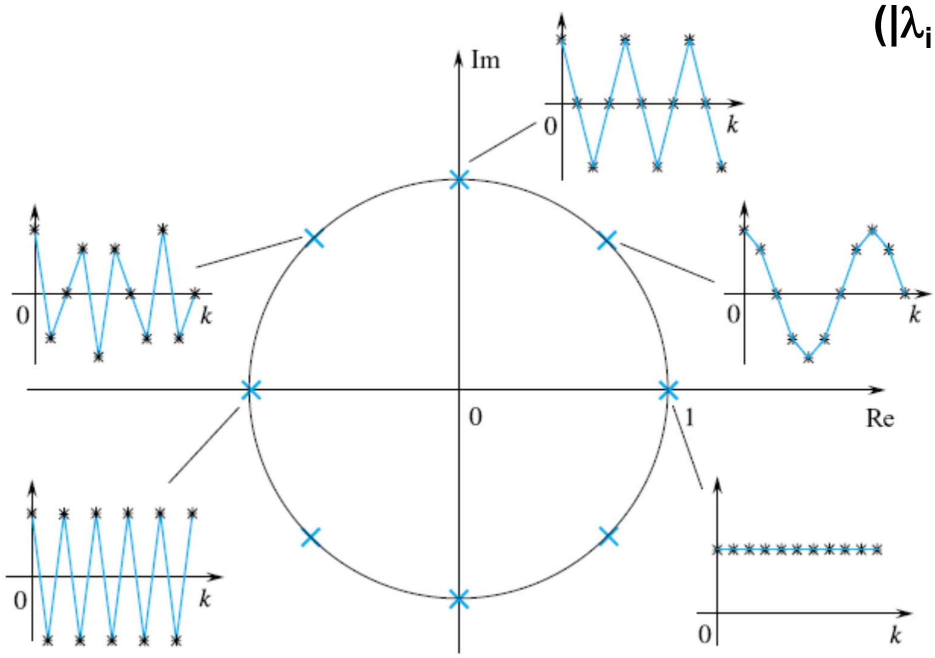
($|\lambda_i| < 1$)



Stabilità e analisi modale: nel piano complesso - 3

- Mappa degli autovalori, caso <u>discreto</u> con molteplicità = 1:

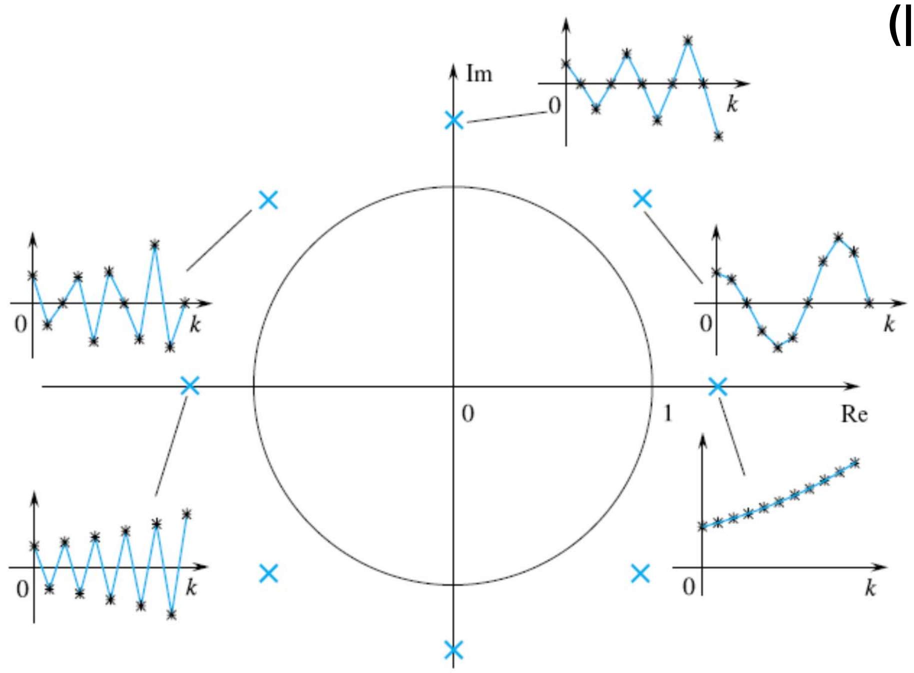
($|\lambda_i| = 1$)



Stabilità e analisi modale: nel piano complesso - 4

- Mappa degli autovalori, caso discreto con molteplicità = 1:

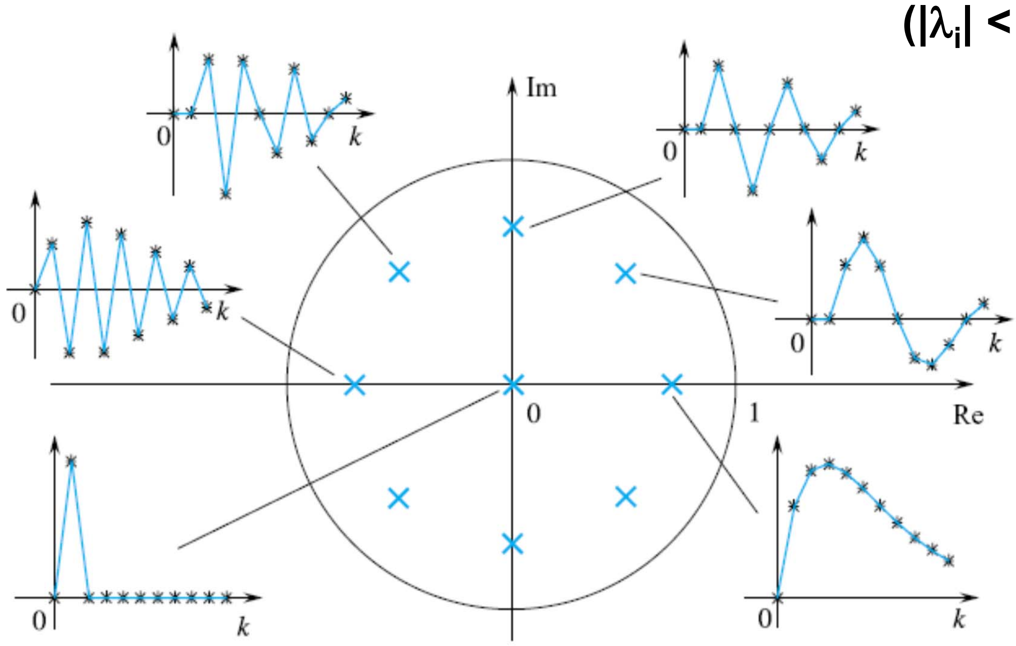
($|\lambda_i| > 1$)



Stabilità e analisi modale: nel piano complesso - 5

- Mappa degli autovalori, caso discreto con molteplicità = 2:

($|\lambda_i| < 1$)

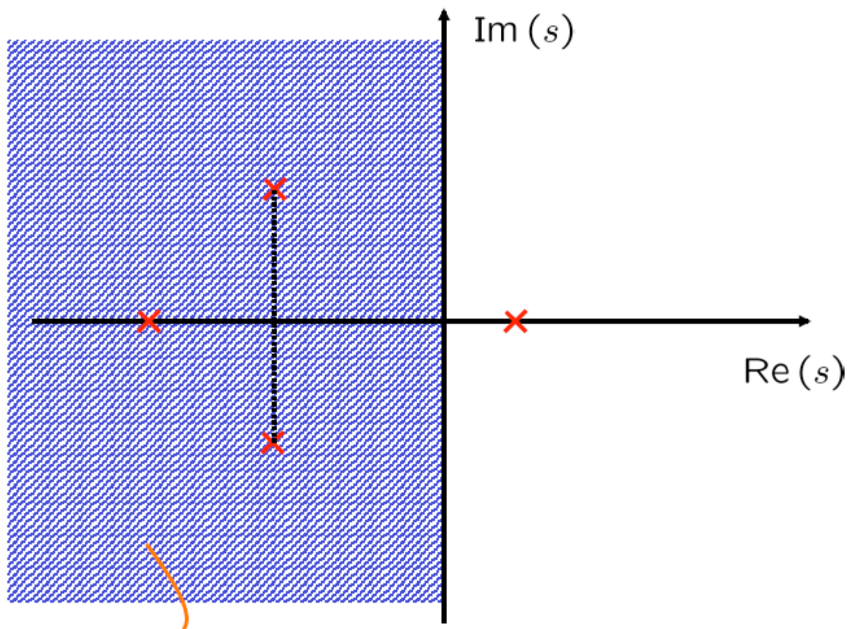


Stabilità dei sistemi LTI (tempo continuo)

- **Teorema:** Un sistema LTI a tempo continuo è **semplicemente stabile** se e solo se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa o nulla, e quelli a parte reale nulla hanno molteplicità unitaria nel polinomio minimo di A

- **Teorema:** Un sistema LTI a tempo continuo è **asintoticamente stabile** se e solo se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa

Stabilità dei sistemi LTI (tempo continuo) - 1



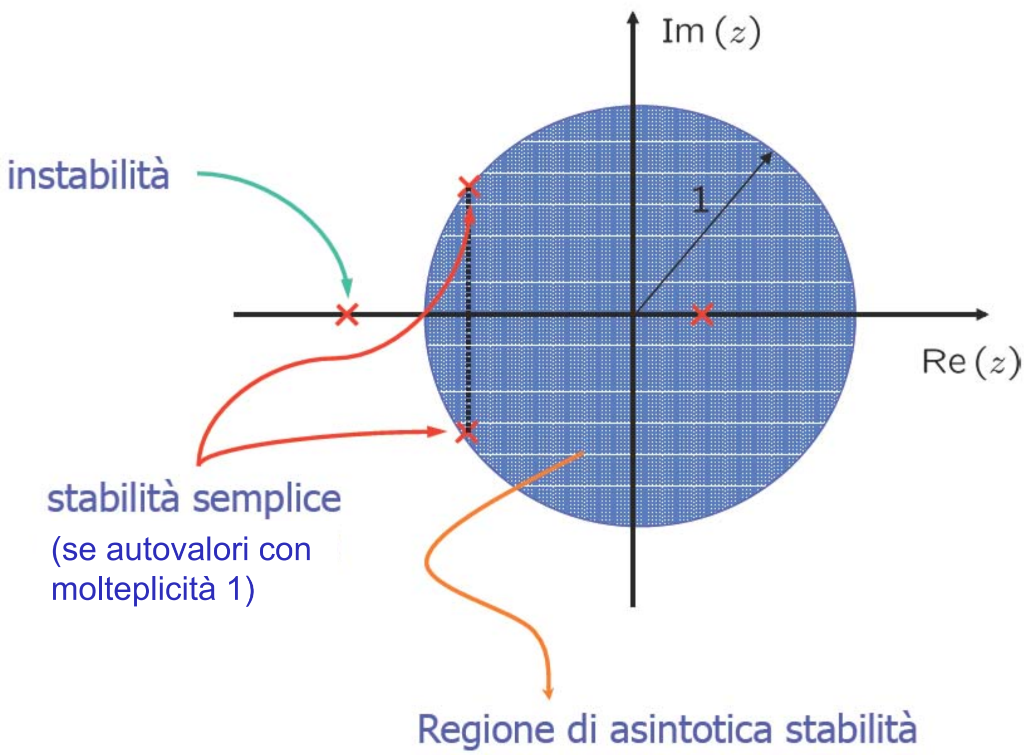
Regione di asintotica stabilità

Stabilità dei sistemi LTI (tempo discreto)

- **Teorema:** Un sistema LTI a tempo discreto è **semplicemente stabile** se e solo se tutti gli autovalori di A hanno modulo minore o uguale a 1, e quelli a modulo unitario hanno molteplicità unitaria nel polinomio minimo di A

- **Teorema:** Un sistema LTI a tempo discreto è **asintoticamente stabile** se e solo se tutti gli autovalori di A hanno modulo minore di 1

Stabilità dei sistemi LTI (tempo discreto) - 1



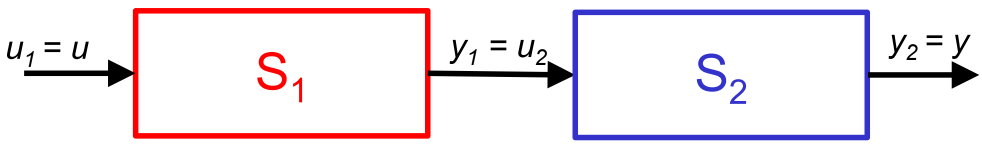
Stabilità dei sistemi LTI interconnessi

- Grazie alle proprietà dei modelli LTI (es. sovrapposizione degli effetti), risulta relativamente agevole studiare la stabilità sistemi complessi, ma costituiti da più parti semplici interconnesse
- Le tipiche modalità di interconnessione sono:
  - **In cascata**: l'uscita di un sistema è l'ingresso di un altro
  - **In parallelo**: due sistemi hanno lo stesso ingresso

N.B.: l'interconnessione <u>in retroazione</u> è più complessa e verrà trattata più in dettaglio in seguito

Stabilità dei sistemi LTI interconnessi - 1

- **Sistemi in cascata**:



$$S_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t) \\ y_1(t) = C_1 x_1(t) + D_1 u_1(t) \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t) \\ y_2(t) = C_2 x_2(t) + D_2 u_2(t) \end{cases}$$

- Sistema ottenuto (<u>solo</u> variabili di stato):

$$S_c : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u(t) \\ \dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 C_1 x_1(t) + B_2 D_1 u(t) \end{cases}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B_c = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix}$$

Stabilità dei sistemi LTI interconnessi - 1

- **Sistemi in cascata**: ai fini dell'analisi di stabilità, si può osservare che la matrice di stato ottenuta

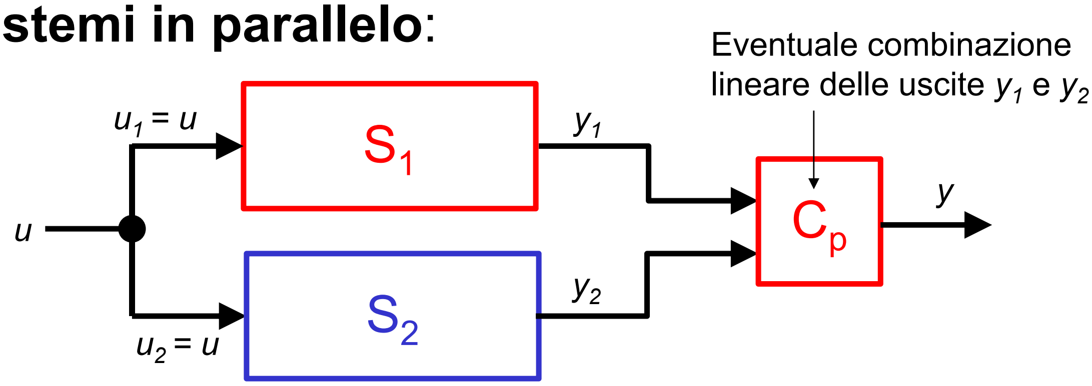
$$A_c = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}$$

è <u>triangolare a blocchi</u>, pertanto i suoi autovalori sono l'unione di quelli dei blocchi sulla diagonale, che coincidono con quelli dei due sistemi S_1 e S_2

Teorema: Il sistema LTI ottenuto come **cascata** di due sistemi LTI è asintoticamente stabile **se e solo se** lo sono entrambi i due sistemi interconnessi

Stabilità dei sistemi LTI interconnessi - 1

- **Sistemi in parallelo**:



$$S_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t) \\ y_1(t) = C_1 x_1(t) + D_1 u_1(t) \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t) \\ y_2(t) = C_2 x_2(t) + D_2 u_2(t) \end{cases}$$

$$S_p : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u(t) \\ \dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u(t) \end{cases}$$

N.B.: <u>solo</u> variabili di stato

Stabilità dei sistemi LTI interconnessi - 1

- **Sistemi in parallelo**: la matrice di stato non è altro che

$$A_p = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

la cui forma diagonale a blocchi evidenzia che gli autovalori sono anche in questo caso l'unione di quelli dei due sistemi S_1 e S_2

Teorema: Il sistema LTI ottenuto come **parallelo** di due sistemi LTI è asintoticamente stabile **se e solo se** lo sono entrambi i due sistemi interconnessi

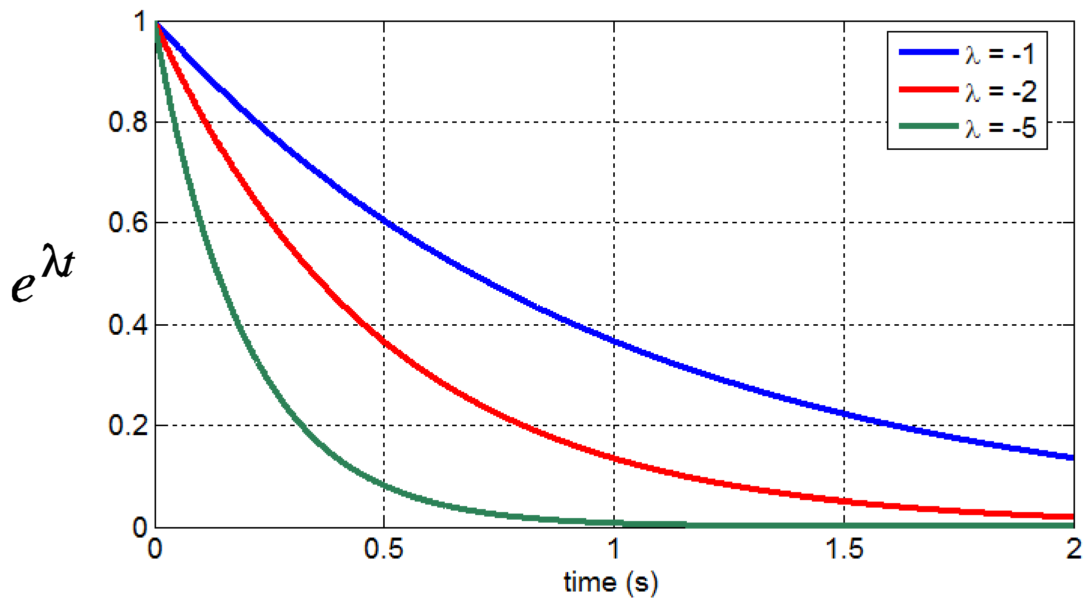
Analisi dei sistemi dinamici
ANALISI MODALE QUANTITATIVA
(PRESTAZIONI)

Analisi modale quantitativa

- Appurato che la stabilità dei sistemi LTI dipende dal segno degli autovalori per i sistemi a tempo continuo (dal modulo per quelli a tempo discreto), il progetto di un sistema di controllo (che si vedrà in seguito) dovrà ovviamente permettere di ottenere anzitutto tale condizione primaria
- Una volta verificate le condizioni per ottenere la stabilità, si potrà poi valutare quantitativamente come i valore numerici degli autovalori influenzino l'andamento nel tempo dello stato e quindi dell'uscita di un sistema

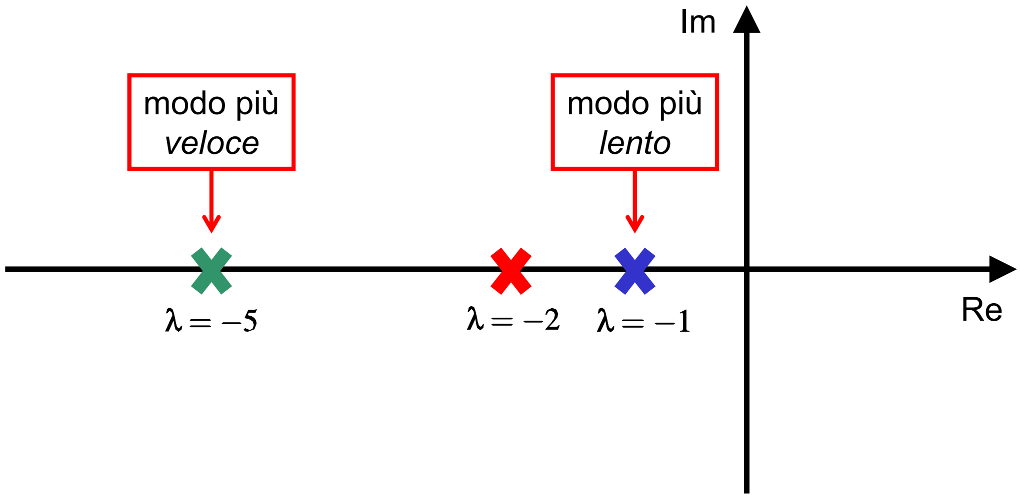
Analisi modale quantitativa (tempo continuo)

- Come si può intuire, maggiore è il valore assoluto, minore sarà il tempo che impiegherà un modo (stabile) a raggiungere valori prossimi allo zero



Analisi modale quantitativa (tempo continuo) - 1

- Visualizzando la collocazione degli autovalori nel piano complesso, si nota come la distanza dall'asse reale sia proporzionale alla *velocità* (con cui → 0) dei modi corrispondenti:



Analisi modale quantitativa (tempo continuo) - 2

- Considerando per semplicità solo i modi di autovalori con molteplicità unitaria e ipotizzando che questi ultimi possano essere fissati <u>arbitrariamente</u> grazie ad un sistema di controllo (cosa <u>non sempre vera</u>, come verrà dimostrato più avanti), è possibile anche definire una specifica *temporale* per la scelta di questi autovalori
- **Tempo di assestamento (T_a) per un modo stabile:** tempo che occorre perché il valore del modo si riduca al 5% del valore iniziale

Analisi modale quantitativa (tempo continuo) - 3

- Per un modo semplice e reale, è facile calcolare che:

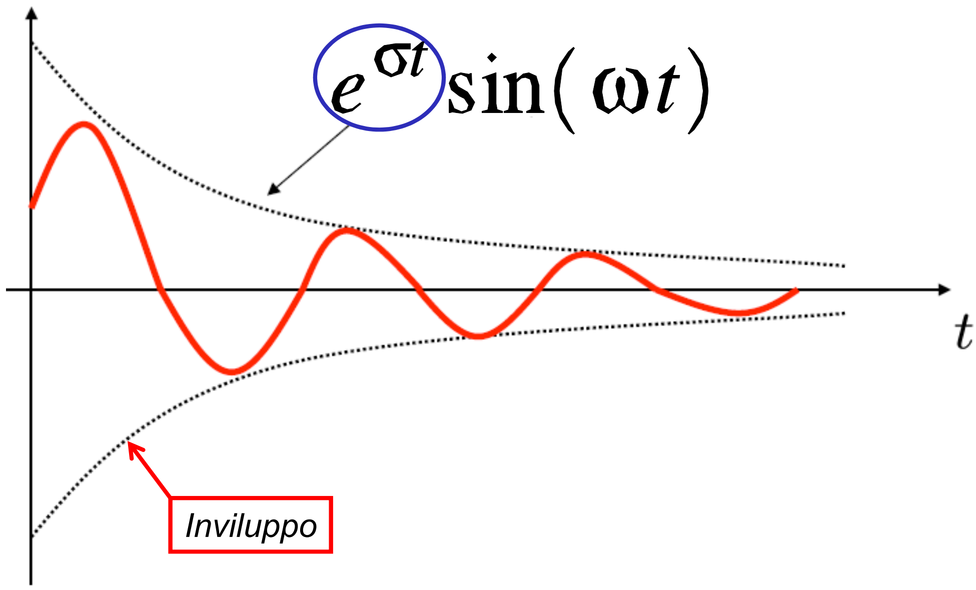
$$e^{\lambda T_a} = 0.05 \;\Rightarrow\; \lambda T_a = -3$$

- Pertanto: $\boxed{T_a = -\dfrac{3}{\lambda}}$

- **NOTA:** fissato T_a, condizione tipica nei problemi di progetto, si determinerà di conseguenza $\lambda = -3/T_a$

Analisi modale quantitativa (tempo continuo) - 4

- Per modi complessi ($\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$), si considera solitamente per approssimazione il cosiddetto *inviluppo* dell'andamento sinusoidale:



Analisi modale quantitativa (tempo continuo) - 5

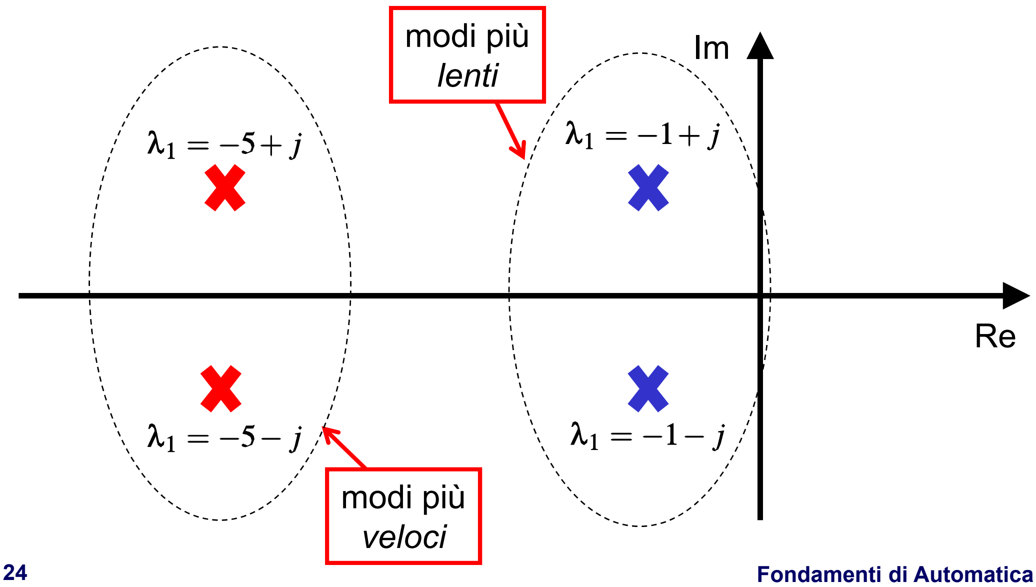
- Valgono quindi considerazioni analoghe alle precedenti, applicate alla sola parte reale

$$e^{\sigma T_a} = 0.05 \Rightarrow \sigma T_a = -3$$

$$\boxed{T_a = -\frac{3}{\sigma}} \Rightarrow \boxed{\sigma = -\frac{3}{T_a}}$$

Analisi modale quantitativa (tempo continuo) - 7

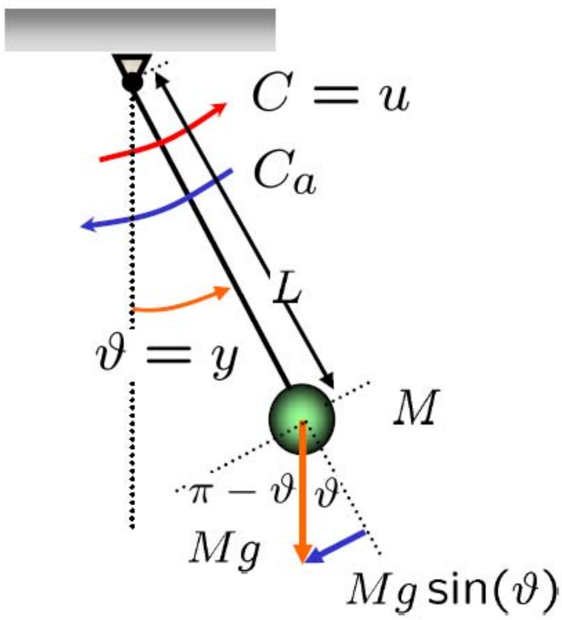
- Anche per gli autovalori complessi, la velocità dei modi corrispondenti (<u>due</u>, con analogo andamento, <u>per ogni coppia complessa coniugata</u>) è proporzionale alla distanza dall'asse reale nel piano complesso



Analisi dei sistemi dinamici
STABILITA' DEI SISTEMI NONLINEARI (CENNI)

Sistemi nonlineari: esempio

- Pendolo ideale:



Sistemi nonlineari: esempio – modello matematico

... dalla fisica

$$C_a = h\dot{\vartheta}$$
$$J\ddot{\vartheta} = u - h\dot{\vartheta} - MgL\sin(\vartheta)$$
$$J = ML^2$$

Ponendo poi

$$\begin{cases} x_1 := \vartheta \\ x_2 := \dot{\vartheta} \end{cases} \quad \text{e} \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\vartheta} = x_2 = f_1(x,u) \\ \dot{x}_2 = \ddot{\vartheta} = -\frac{MgL}{J}\sin(x_1) - \frac{h}{J}x_2 + \frac{1}{J}u = f_2(x,u) \\ y = x_1 = g(x) \end{cases}$$

Linearizzazione di sistemi dinamici stazionari

- Dato il sistema nonlineare stazionario:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t),u(t)) \\ y(t) = g(x(t),u(t)) \end{cases}$$

- Si consideri il moto di riferimento:

$$\bar{x}(t) = \phi(t, t_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot))$$

ed una relativa perturbazione sia sullo stato iniziale che sull'ingresso (δx_0 e $\delta u(\cdot)$), così da ottenere un moto:

$$x'(\cdot) = \bar{x}(\cdot) + \delta x(\cdot)$$

$$\begin{cases} \dot{x}'(t) = \frac{d}{dt}(\bar{x}(t) + \delta x(t)) = f(\bar{x}(t) + \delta x(t), \bar{u}(t) + \delta u(t)) \\ y'(t) = \bar{y}(t) + \delta y(t) = g(\bar{x}(t) + \delta x(t), \bar{u}(t) + \delta u(t)) \end{cases}$$

Linearizzazione di sistemi dinamici stazionari - 1

- Se le funzioni *f(.)* e *g(.)* sono sviluppabili in serie di Taylor:

$$\begin{cases} \cancel{\dot{\bar{x}}(t)} + \delta\dot{x}(t) = \cancel{f(\bar{x}(t),\bar{u}(t))} + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{[\bar{x}(t),\bar{u}(t)]}\delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{[\bar{x}(t),\bar{u}(t)]}\delta u(t) + \dots \\ \cancel{\bar{y}(t)} + \delta y(t) = \cancel{g(\bar{x}(t),\bar{u}(t))} + \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{[\bar{x}(t),\bar{u}(t)]}\delta x(t) + \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{[\bar{x}(t),\bar{u}(t)]}\delta u(t) + \dots \end{cases}$$

e fermando lo sviluppo al 2° termine, si ottiene:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}(t) = A(t)\delta x(t) + B(t)\delta u(t) \\ \delta y(t) = C(t)\delta x(t) + D(t)\delta u(t) \end{cases}$$

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{[\bar{x}(t),\bar{u}(t)]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{[\bar{x}(t),\bar{u}(t)]} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\Big|_{[\bar{x}(t),\bar{u}(t)]} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\Big|_{[\bar{x}(t),\bar{u}(t)]} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\Big|_{[\bar{x}(t),\bar{u}(t)]} \end{bmatrix}$$

$$B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{[\bar{x}(t),\bar{u}(t)]} \quad C(t) = \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{[\bar{x}(t),\bar{u}(t)]} \quad D(t) = \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{[\bar{x}(t),\bar{u}(t)]}$$

Linearizzazione di sistemi dinamici stazionari - 2

- Il modello linearizzato è in generale NON stazionario, anche se il sistema nonlineare è stazionario
- Se il sistema **nonlineare e stazionario** viene linearizzato rispetto ad uno stato di equilibrio corrispondente ad un ingresso costante si ottiene un modello **lineare e stazionario (LTI)**
- Sebbene i modelli nonlineari siano in generale più fedeli alla realtà fisica, i modelli lineari sono comunque utili, perché rappresentativi delle piccole variazioni di sistemi nonlineari rispetto ad un loro moto o ad uno stato di equilibrio considerato

Linearizzazione di sistemi dinamici stazionari - 3

- **STABILITA':** lo stato di equilibrio rispetto al quale si è linearizzato il sistema nonlineare, per ottenere:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t) \\ \delta y(t) = C\delta x(t) + D\delta u(t) \end{cases}$$

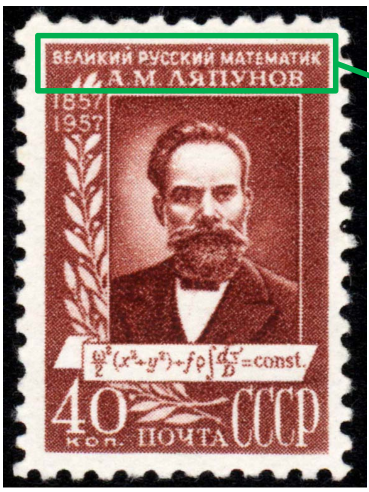
  ➔ è asintoticamente stabile se gli autovalori di A sono a parte reale negativa.

  ➔ è instabile se uno o più autovalori hanno parte reale positiva

- Tali risultati sono detti **criterio ridotto di Lyapunov**
- Se A ha autovalori a parte reale nulla, il criterio ridotto di Lyapunov **NON** permette di affermare nulla in proposito alla stabilità dello stato di equilibrio (da valutare con il criterio diretto di Lyapunov, qui non considerato)

Linearizzazione di sistemi dinamici stazionari - 3a

- Dimostrazione dell'importanza degli studi di Lyapunov sulla **STABILITA'** dei sistemi dinamici lineari e nonlineari (rivelatisi fondamentali nell'era della conquista dello spazio!):



Aleksander Mihailovic Lyapunov: francobolli commemorativi dell'ex-Unione Sovietica (1957) e dell'attuale Ucraina (2010)

Linearizzazione di sistemi dinamici stazionari - 4

- **ESERCIZIO:** si consideri il modello del pendolo ideale visto in precedenza. Si può dimostrare tramite il criterio ridotto di Lyapunov che i due stati di equilibrio x=[0 0] e x=[π 0] (pendolo fermo e rispettivamente orientato **verso il basso** o **verso l'alto**) sono l'uno **stabile** e l'altro **instabile**.
- **NOTA:** per effettuare la linearizzazione, in questo caso, si può anche semplicemente considerare le approssimazioni:

  sin(x) = x , se x è prossimo a 0,

  sin(x) = -x , se x è prossimo a π

ANALISI DEI SISTEMI DINAMICI
- Definizioni
- Stabilità
- Soluzione di sistemi lineari stazionari
- Stabilità dei sistemi lineari stazionari
- Stabilità dei sistemi nonlineari (cenni)

FINE