Fondamenti di Automatica

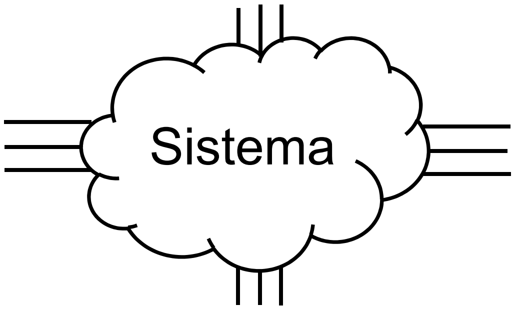
Elementi di Teoria dei Sistemi

Dott. Ing. Marcello Bonfè
Dipartimento di Ingegneria - Università di Ferrara
Tel. +39 0532 974839
E-mail: marcello.bonfe@unife.it

Elementi di Teoria dei Sistemi
DEFINIZIONI

Sistemi e Segnali

- **SISTEMA** (o **PROCESSO**): oggetto o dispositivo o fenomeno il cui comportamento si manifesta attraverso la variazioni nel tempo di un certo numero di attributi misurabili



- **VARIABILI MISURABILI**: caratteristiche di un sistema che si possono esprimere con uno o più numeri (interi, reali o complessi)

Sistemi e Segnali - 1

- **MODELLO MATEMATICO**: relazioni che intercorrono tra le variabili misurabili di un sistema
- **SISTEMA ORIENTATO**: sistema le cui variabili misurabili si distinguono in:
  - **Cause, o stimoli, o INGRESSI**
  - **Effetti, o risposte, o USCITE**

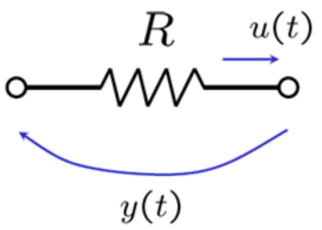
$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_r \end{pmatrix} = u(t)$: **INGRESSO**

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = y(t)$: **USCITA**

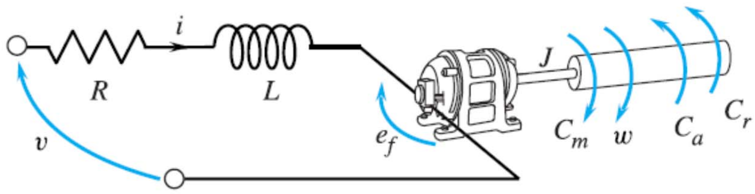
Sistemi e Segnali - 1a

- **NOTA:** non sempre la suddivisione tra **Cause o INGRESSI** ed **Effetti o USCITE** è univoca…

Es.: INGRESSO: tensione.. o corrente?



Es.: Motore.. o generatore?



Sistemi e Segnali - 2

- **SISTEMA ORIENTATO**: rappresentazione grafica con segnali vettoriali (**N.B.**: il tempo è <u>continuo</u>)

$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_r \end{pmatrix}$ = u(t): **VETTORE DI INGRESSO (o VETTORE DEGLI INGRESSI)** $\in \mathbb{R}^r$

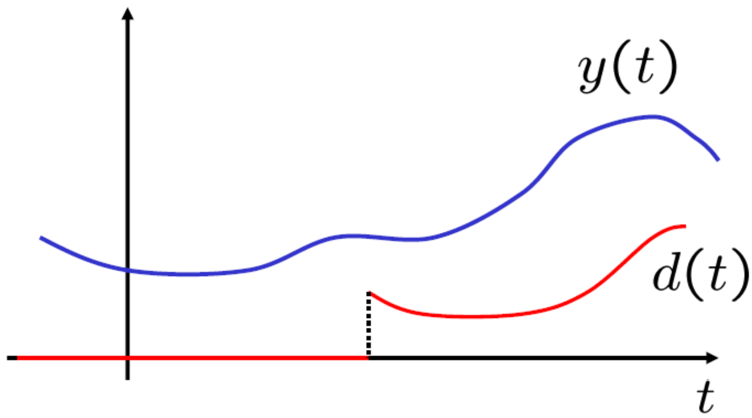
$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}$ = y(t): **VETTORE DI USCITA (o VETTORE DELLE USCITE)** $\in \mathbb{R}^m$

Sistemi e Segnali - 3

- **SEGNALI *ANALOGICI***: rappresentati da numeri reali associati ad un istante del tempo (il tempo è variabile in modo continuo)

Variabili reali a tempo continuo

$$t \in \mathbb{R}$$
$$y(t) \in \mathbb{R}$$
$$d(t) \in \mathbb{R}$$

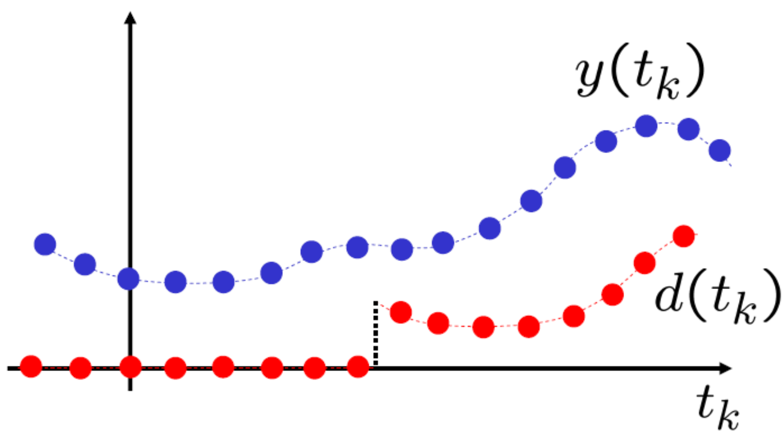


Sistemi e Segnali - 3

- **SEGNALI *DISCRETI***: rappresentati ancora da numeri reali, ma associati ad una <u>successione</u> di istanti di numeri interi, *rappresentativi* del tempo

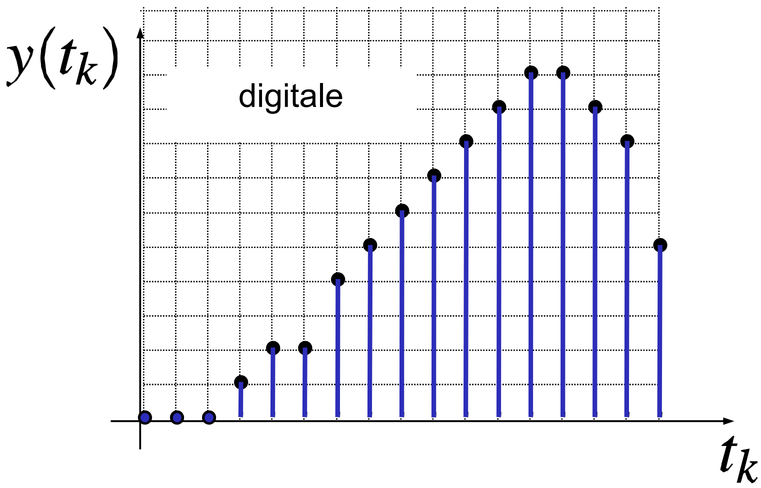
Variabili reali a tempo discreto

$$t_k \in \mathbb{Z}$$
$$y(t_k) \in \mathbb{R}$$
$$d(t_k) \in \mathbb{R}$$



Sistemi e Segnali - 4

- **SEGNALI *DIGITALI***: segnali discreti ed inoltre rappresentati da numeri interi, così da poter essere memorizzati in stringhe di bit (*digit*)



Sistemi e Segnali - 5

- **SISTEMA DISCRETO**: i segnali misurabili sono associati ad una successione di numeri interi detti **PASSI**, generalmente (ma non necessariamente) rappresentativi di istanti di tempo multipli di un intervallo fissato, detto periodo di campionamento: $\{t_k = kT_s \quad k \in \mathbb{Z}\}$

$u(t_k)$ (o semplicemente $u(k)$): **VETTORE DI INGRESSO**

$y(t_k)$ (o semplicemente $y(k)$): **VETTORE DI USCITA**

Sistemi e Segnali - 6

- **NOTAZIONE**:
  - Derivata di un segnale rispetto al tempo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t); \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t); \quad \ldots$$

  - Ove necessario, per semplificare si userà anche:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Dx(t) \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = D^2x(t) \quad \frac{d^ix(t)}{dt^i} = D^ix(t)$$

  - Integrazione di un segnale rispetto al tempo ($x(t_0)=0$):

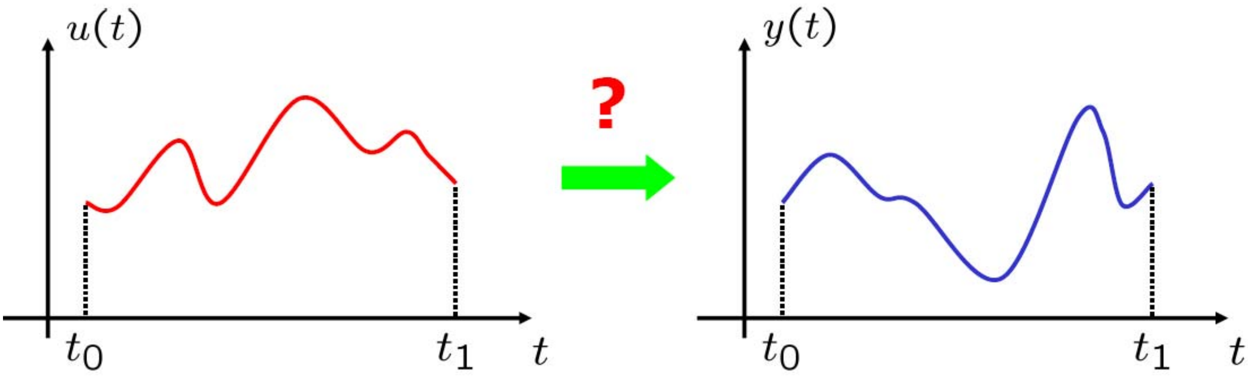
$$\int_{t_0}^{t} x(\tau)d\tau = \frac{1}{D}x(t)$$

Teoria dei Sistemi

- Disciplina complementare ai Controlli Automatici, che studia i modelli matematici dei sistemi e le loro proprietà:
  - deduzione del modello matematico:
    - modellistica (applicazione di leggi fisiche, biologiche, ecc.)
    - identificazione (applicazione di algoritmi numerici *data-driven*)
  - utilizzo del modello matematico:
    - analisi della risposta
    - analisi di controllabilità e osservabilità
    - analisi di stabilità
- Controlli Automatici:
  - utilizzo del modello matematico:
    - sintesi di una funzione di ingresso (catena aperta)
    - sintesi di un controllore in catena chiusa

Sistemi *Dinamici* (a tempo continuo)

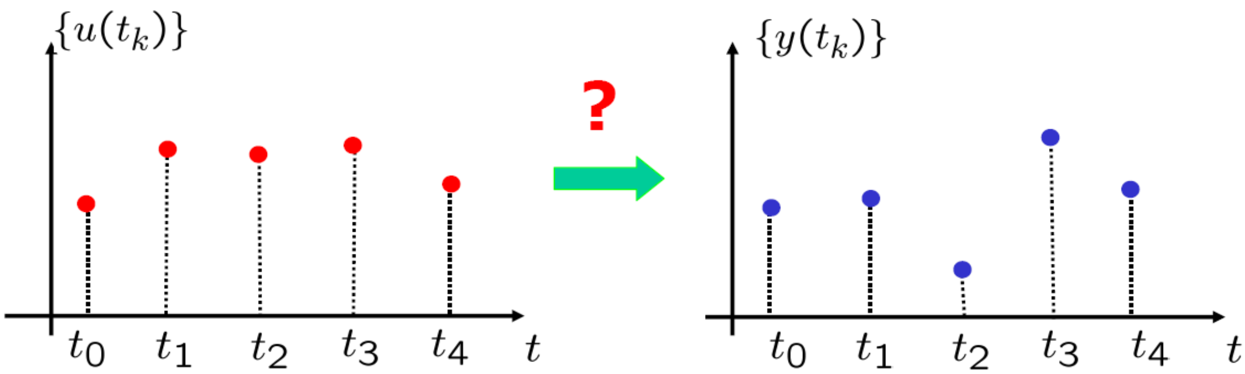
- La risposta ***y(t)*** di un sistema ad un certo istante è o non è univocamente determinata dall'ingresso ***u(t)*** allo stesso istante di tempo?



- **NO?** Il sistema è un **SISTEMA DINAMICO**

Sistemi *Dinamici* (a tempo discreto)

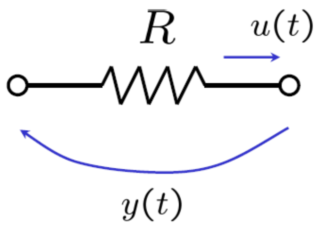
- La risposta ***y(k)*** di un sistema ad un *passo* è o non è univocamente determinata dall'ingresso ***u(k)*** allo stesso *passo*?



- **NO?** Il sistema è un **SISTEMA DINAMICO**

Sistemi Dinamici (e non..)

- E quando la risposta ai quesiti precedenti è **SÌ**? Il sistema viene detto **privo di memoria** o **puramente algebrico** (o combinatorio, nel caso *digitale*)
- Esempio 1: Resistenza elettrica (**N.B.**: ingresso? uscita?)



$$y(t) = R \cdot u(t)$$

Non dinamico

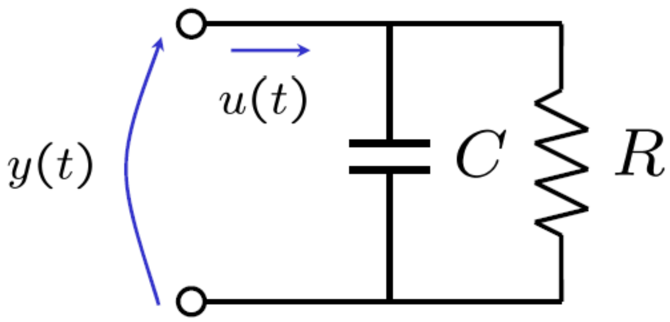
- Esempio 2: *Le spese dell'anno k sono proporzionali al reddito dello stesso anno..*

$$y(k) = \alpha \cdot u(k)$$

Non dinamico

Sistemi Dinamici (e non..) - 1

- Se invece il sistema è **dinamico**, viene detto **dotato di memoria** (appunto), perché la sua risposta dipende anche dall'andamento degli ingressi agli istanti precedenti
- Esempio 1:



- Esempio 2: *Le scorte di magazzino del mese k dipendono da quelle del mese k-1, dalla quantità di merce prodotta e dalla quantità venduta..*

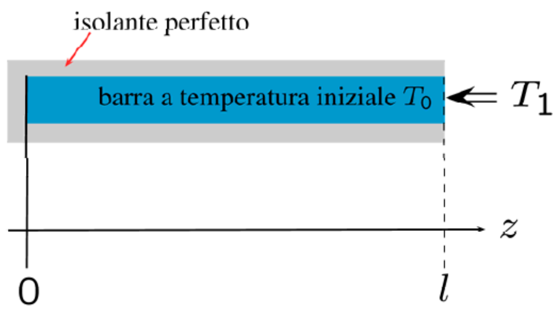
Variabili di Stato

- Sono la **memoria** del sistema dinamico, cioè le informazioni da conoscere in t_0 per determinare $y(t), t \geq t_0$ in relazione a $u(t), t \geq t_0$
- Rappresentano l'effetto della storia passata, cioè precedente a t_0, sul comportamento futuro
- La dimensione ***n*** del vettore delle variabili di stato viene definita **ordine del sistema**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = x(t): \textbf{ VETTORE DI STATO} \in \mathbb{R}^n$$

Sistemi dinamici a dimensione infinita

- **CASO PIU' GENERALE** (ma non trattato nel seguito): lo stato non è un vettore di n elementi, ma una funzione dipendente da una o più variabili
- Esempio: diffusione del calore in una barra isolata riscaldata ad un estremo ➔ stato = T(z,t)



N.B.: se si considerassero solo le temperature in n punti equidistanti lungo l'asse z, sarebbe un sistema a dim. finita

Alcune definizioni importanti

- Modello matematico di un sistema dinamico:
  - insieme dei tempi ***T***
  - insieme degli ingressi ***U***
  - insieme delle funzioni di ingresso U_f
  - insieme degli stati ***X***
  - insieme delle uscite ***Y***
- Per sistemi a tempo continuo ($T = \mathbb{R}$) si usano equazioni differenziali, in generale **NONLINEARI**:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

x(t), u(t) e *y(t)* sono vettori e *f(.)* e *g(.)* sono vettori di funzioni nonlineari.

f() è detta **funzione di velocità di transizione dello stato**

g() è detta **funzione di uscita**

Modelli differenziali vettoriali

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t), t) \\ \ldots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t), t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t), t) \\ \ldots \\ y_m(t) = g_m(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t), t) \end{cases}$$

Modelli differenziali vettoriali - 1

I vettori

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_r(t) \end{pmatrix} \qquad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_m(t) \end{pmatrix}$$

sono, rispettivamente, i vettori di

- ***Stato***: $x(t) \in \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{X}=R^n$
- ***Ingresso***: $u(t) \in \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U}=R^r$
- ***Uscita***: $y(t) \in \boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Y}=R^m$

all' istante $t \in \boldsymbol{T}=R$

Alcune definizioni importanti - 1

- Per sistemi a tempo discreto ($\boldsymbol{T} = \mathbb{Z}$) si usano equazioni alle differenze finite: $\begin{cases} x(k+1) = f(x(k),u(k),k) \\ y(k) = g(x(k),u(k),k) \end{cases}$

x(k), u(k) e *y(k)* sono vettori e *f(.)* e *g(.)* sono vettori di funzioni nonlineari.

f() è detta **funzione dello stato futuro**

g() è detta **funzione di uscita**

- Sistemi **puramente algebrici** (senza stato):

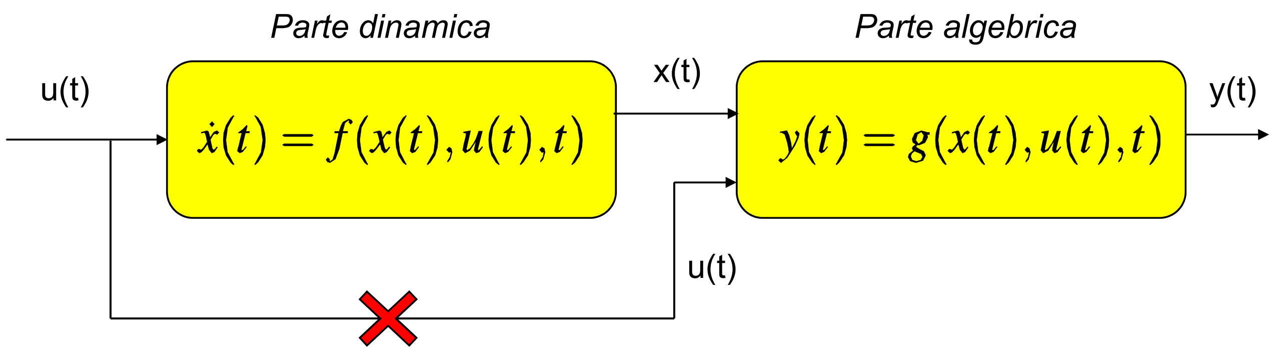
$$y(t) = g(\cancel{x(t)},u(t),t) \quad \text{o} \quad y(k) = g(\cancel{x(k)},u(k),k)$$

- Sistemi **puramente dinamici**:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t) \\ y(t) = g(x(t),\cancel{u(t)},t) \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x(k+1) = f(x(k),u(k),k) \\ y(k) = g(x(k),\cancel{u(k)},k) \end{cases}$$

Alcune definizioni importanti - 1a

- Proprietà di separazione:



MANCA nei sistemi puramente dinamici

Parte dinamica: permette di riassumere la storia passata del sistema tramite le sue *variabili di stato* ad un certo istante t

Parte algebrica del sistema: esprime l'*uscita* del sistema utilizzando tutte le informazioni note all'istante t

Alcune definizioni importanti - 2

- Sistemi dinamici **stazionari** (o tempo-invarianti): le funzioni di stato / uscita non dipendono esplicitamente dal tempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \cancel{t}) \\ y(t) = g(x(t), u(t), \cancel{t}) \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), \cancel{k}) \\ y(k) = g(x(k), u(k), \cancel{k}) \end{cases}$$

- Sistemi dinamici **lineari**: ***U***, ***U$_f$***, ***X***, ***Y***, sono spazi vettoriali definiti sullo stesso campo (es. $\mathbb{R}$) e le funzioni *f()* e *g()* sono lineari in *x* e *u* per ogni *t*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{cases}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \; u \in \mathbb{R}^r, \; y \in \mathbb{R}^m$$

Alcune definizioni importanti - 3

- Matrici caratteristiche dei sistemi lineari:

$$A(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \leftarrow \text{N.B.: } \textbf{quadrata}$$

$$B(t)=\begin{bmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1r}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) & \dots & b_{nr}(t) \end{bmatrix}$$

$$C(t)=\begin{bmatrix} c_{11}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1}(t) & \dots & c_{mn}(t) \end{bmatrix} \qquad D(t)=\begin{bmatrix} d_{11}(t) & \dots & d_{1r}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1}(t) & \dots & d_{mr}(t) \end{bmatrix}$$

- Sistemi dinamici **lineari e stazionari** (o **lineari tempo-invarianti, LTI**):

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \\ y(t)=Cx(t)+Du(t) \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x(k+1)=Ax(k)+Bu(k) \\ y(k)=Cx(k)+Du(k) \end{cases}$$

Alcune definizioni importanti - 4

- Sistemi Multi-Ingresso Multi-Uscita (o Multi-Output, MIMO)
  m > 1 e r > 1

- Sistemi Singolo-Ingresso Multi-Uscita (SIMO)
  m > 1 e r = 1

- Sistemi Multi-Ingresso Singola-Uscita (MISO)
  m = 1 e r > 1

- Sistemi Singolo-Ingresso Singola-Uscita (SISO)
  m = 1 e r = 1

Riassumendo: classificazione dei modelli

- **Lineare**

Stazionario

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\
y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t)
\end{aligned}
$$

➔ **o Lineare Tempo-Invariante (LTI)**

Non Stazionario

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\
y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)
\end{aligned}
$$

Con $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ continue a tratti

- **Non lineare**

Stazionario

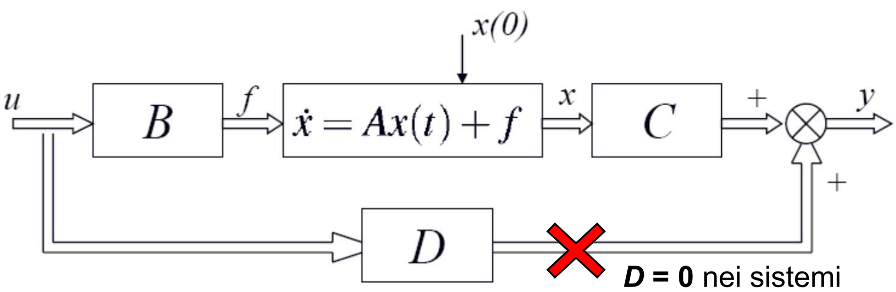
$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\
y(t) &= g(x(t), u(t))
\end{aligned}
$$

Non Stazionario

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\
y(t) &= g(x(t), u(t), t)
\end{aligned}
$$

Riassumendo: classe di modelli più *apprezzata*

- Un sistema lineare stazionario (caso particolare) è rappresentato:
  - nel caso MIMO da 4 matrici (A, B, C, D)
  - nel caso SISO da (A, b, c, d).



***D* = 0** nei sistemi puramente dinamici

u : ingresso; y : uscita; f : azione forzante; x : stato

A : matrice del sistema
B : matrice di distribuzione degli ingressi
C : matrice di distribuzione delle uscite
D : matrice del legame algebrico ingresso/uscita

Risposta di un sistema dinamico (a tempo continuo)

- La soluzione dell'equazione differenziale:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t); \quad x(t_0) = x_0$$

  che si suppone esista e sia unica, è del tipo:

$$x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$$

  e si definisce **funzione di transizione dello stato**

- Tale funzione ha le seguenti proprietà:
  - Orientamento nel tempo: è definita per $t \geq t_0$, non necessariamente per $t < t_0$
  - Causalità: $u'_{[t_0,t)}(\cdot) = u''_{[t_0,t)}(\cdot)$ Implica

$$\phi(t, t_0, x(t_0), u'(\cdot)) = \phi(t, t_0, x(t_0), u''(\cdot))$$

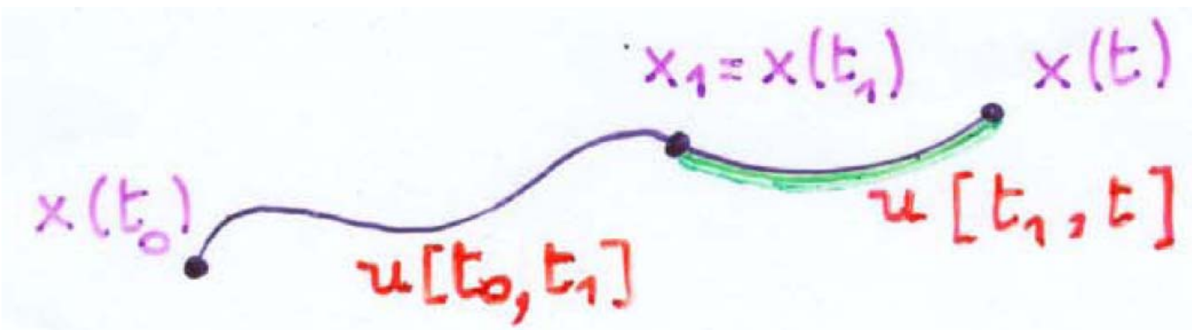
  - Consistenza: $\phi(t, t, x, u(\cdot)) = x$

Risposta di un sistema dinamico - 1

- Proprietà della funzione di transizione dello stato (cont.):
  - Composizione: (congruenza tra due transizioni successive)

$$\text{se } x(t_1) = \phi(t_1, t_0, x(t_0), u(\cdot)); \quad t_0 \leq t_1 \leq t$$

$$\Rightarrow \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)) = \phi(t, t_1, \underbrace{\phi(t_1, t_0, x(t_0), u(\cdot))}_{x(t_1)}, u(\cdot))$$



Risposta di un sistema dinamico - 2

- Sostituendo la funzione di transizione dello stato nella **funzione di uscita:**

$$y(t) = g(\phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)), u(t), t)$$

si ottiene la funzione di risposta:

$$y(t) = \gamma(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$$

e si passa dal modello differenziale ingresso-stato-uscita al modello ingresso-stato-uscita nel quale sono fissate le condizioni iniziali su $x(t_0)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)) \\ y(t) = \gamma(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)) \end{cases}$$

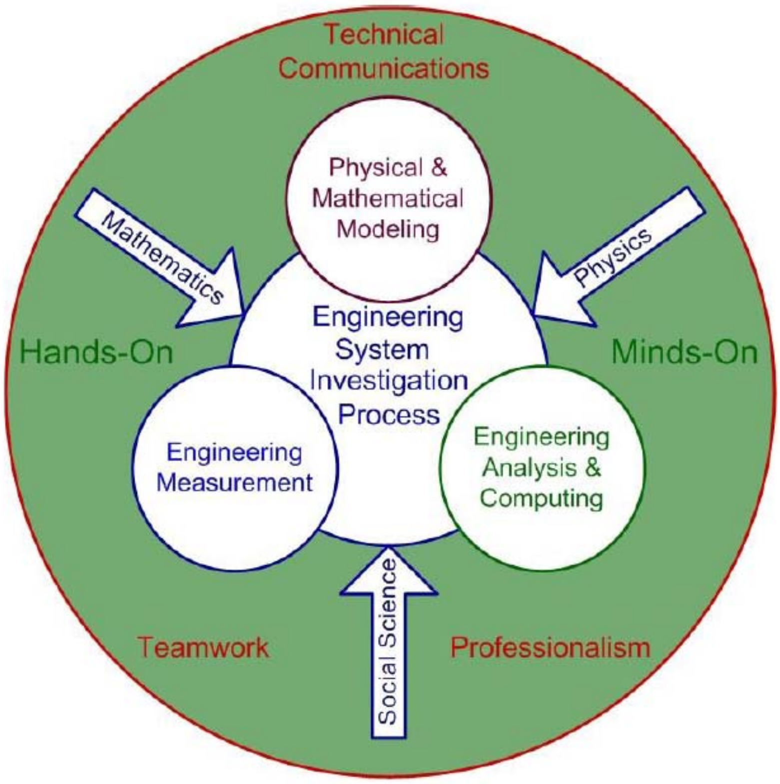
Elementi di Teoria dei Sistemi
MODELLAZIONE DI SISTEMI INGEGNERISTICI

Modellazione di sistemi ingegneristici

- I sistemi ingegneristici sono costituiti da elementi fisici, possibilmente di natura eterogenea ed interagenti.
- In base alla natura del (sotto-)sistema si applicano le basi teoriche di specifiche discipline:
  - Circuiti elettrici ed elettronici ➔ Elettronica/Elettrotecnica
  - Strutture meccaniche ➔ Meccanica
  - Fluidi e trasferimenti termici ➔ Termo-fluidodinamica
- I modelli matematici si ottengono applicando le leggi della fisica ed opportune ipotesi semplificative:
  - Caratteristiche fisiche (resistenze elettriche, masse, elasticità, ecc) **concentrate** in uno o pochi punti, anziché **distribuite**
  - Relazioni di proporzionalità (**lineari**) anziché **nonlineari**

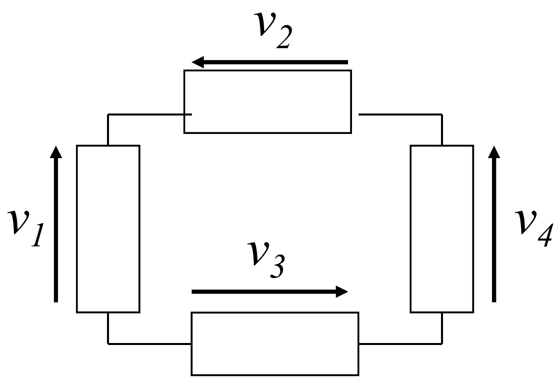
➔ **Modelli lineari a parametri concentrati**

Sistemi ingegneristici: dai modelli alla progettazione

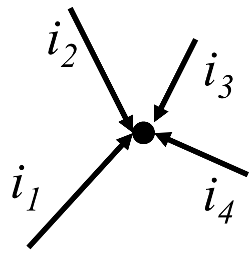


Modelli di circuiti elettrici: le leggi di Kirchhoff

- La somma delle tensioni in una maglia è nulla
- La somma delle correnti in un nodo è nulla



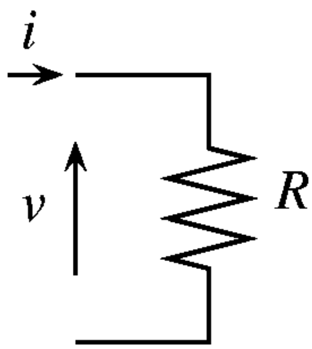
$$v_1 = v_2 + v_3 + v_4$$



$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

Modelli di circuiti elettrici: elementi di base

- Resistenze elettriche: legge di Ohm



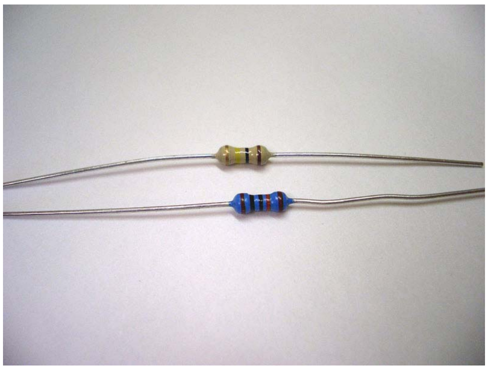
Resistenza

$$v(t) = R\,i(t)$$

- **Teoricamente**:
  - Resistenza *pura* (relazione V-I lineare)
  - Resistenza costante

Modelli di circuiti elettrici: elementi di base - 1

- **Realmente**:
  - Resistenze nonlineari
  - Capacità/induttanze parassite di collegamento
  - Resistenze variabili (es. effetti termici)

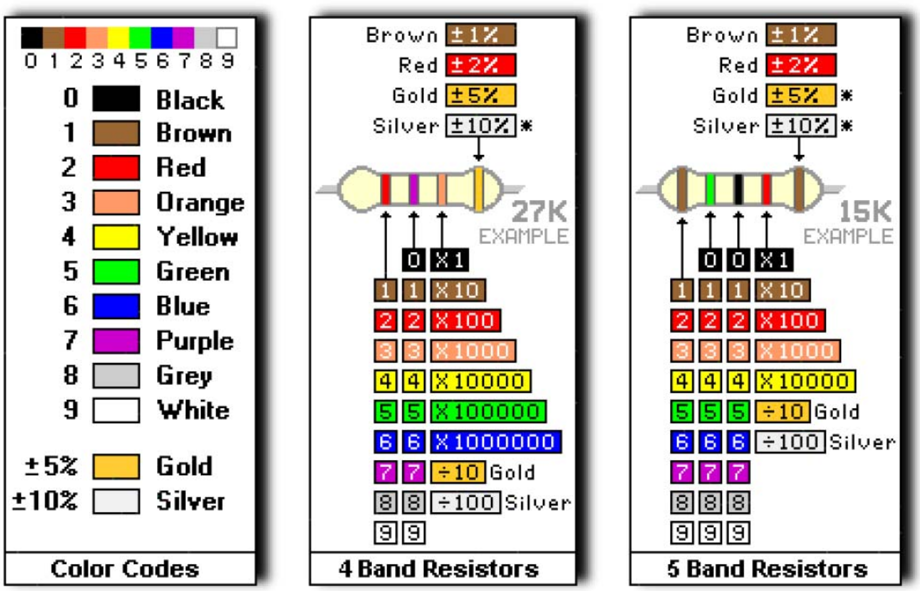


Pin Through-Hole (PTH)

Surface-Mount Device (SMD)

Modelli di circuiti elettrici: elementi di base - 2

- Codici di classificazione resistenze per colore



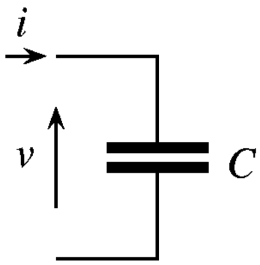
Modelli di circuiti elettrici: elementi di base - 3

- Condensatori: accumulatori di carica elettrica

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \dot{Q}(t) \quad \Rightarrow Q(t) = \int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + Q_0$$

- Tensione ai capi del condensatore (**teorica**):

$$v(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

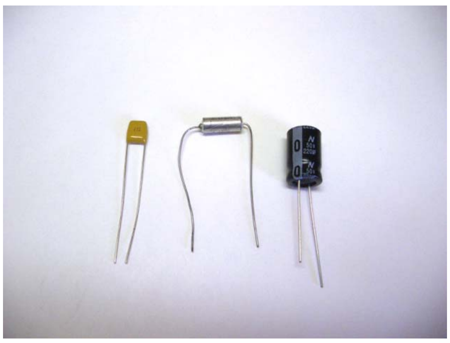


Capacità

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau + \frac{Q_0}{C} = \frac{1}{C}\frac{1}{D}i(t)$$

Modelli di circuiti elettrici: elementi di base - 4

- Condensatori, **realmente**:
  - Capacità nonlineari
  - Resistenze/induttanze parassite di collegamento

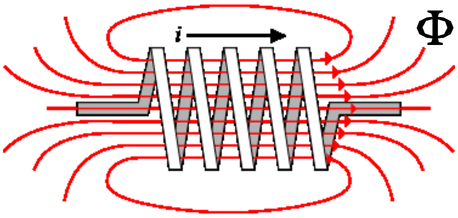


Pin Through-Hole (PTH)

Surface-Mount Device (SMD)

Modelli di circuiti elettrici: elementi di base - 5

- Induttori, legge di Faraday: $f.e.m. = \mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi(t)}{dt}$

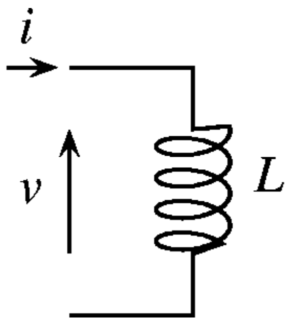


tale f.e.m. si oppone alla variazione di flusso magnetico nel circuito.
Si definisce (auto-)induttanza:

$$L = \frac{\Phi}{i}$$

- Supponendo ***L* costante**: $\dfrac{d\Phi}{dt} = L\dfrac{di}{dt}$

  e la tensione indotta opposta alla f.e.m.:

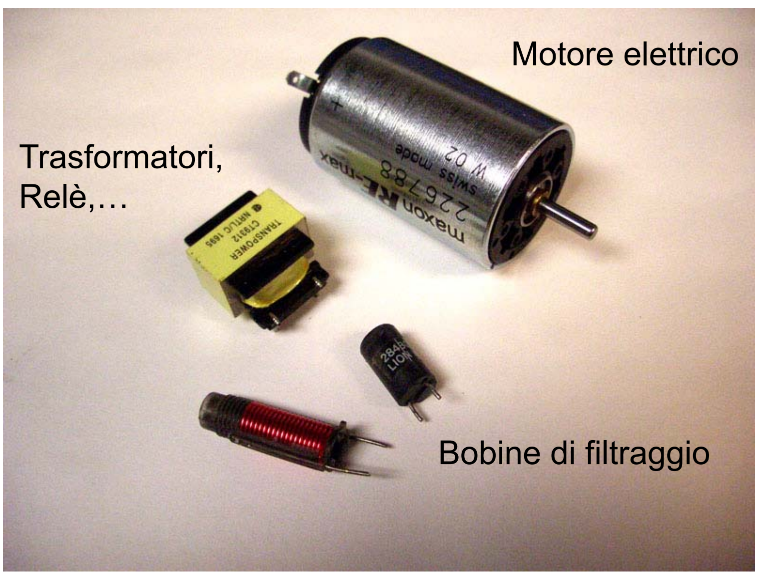


Induttanza

$$v(t) = L\frac{d\,i(t)}{d\,t} = L D i(t)$$

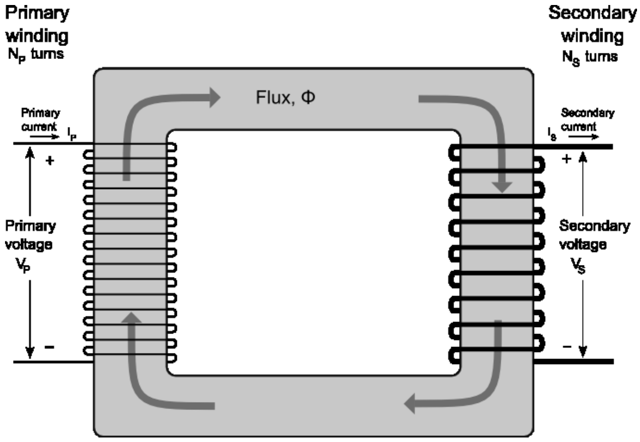
Modelli di circuiti elettrici: elementi di base - 6

- Induttori, **realmente**: qualsiasi circuito elettrico nel quale ci siano avvolgimenti di filo…

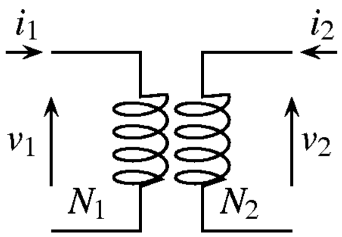


Modelli di circuiti elettrici: elementi di base - 7

- **Trasformatore** di energia elettrica



- **Idealmente** (N1 = spire primario, N2 = spire secondario)



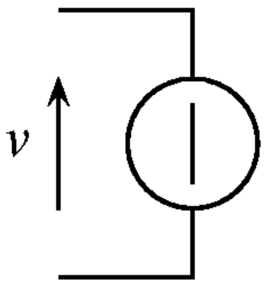
Trasformatore ideale

$$v_1(t) = \frac{N_1}{N_2} v_2(t)\ , \quad i_1(t) = -\frac{N_2}{N_1} i_2(t)$$

$$\Longrightarrow \quad v_1 i_1 = \left(\frac{N_1}{N_2} v_2\right)\left(-\frac{N_2}{N_1} i_2\right) = -v_2 i_2$$

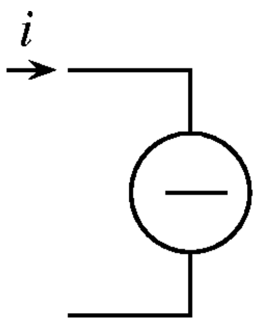
Modelli di circuiti elettrici: elementi di base - 8

- **Sorgenti ideali** di tensione e corrente:



Generatore di tensione

$$v(t) = V_0 \quad (= \text{cost.})$$



Generatore di corrente

$$i(t) = I_0 \quad (= \text{cost.})$$

Modelli di circuiti elettrici: elementi di base - 9

Le unità di misura delle grandezze elettriche nel Sistema Internazionale (SI) sono:

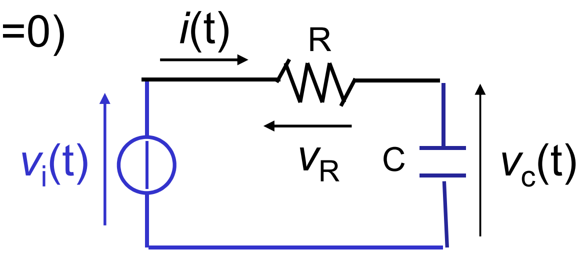
- Variabili:
  - [v] = V, Volt;
  - [i] = A, Ampere;
  - [Q] = C, Coulomb;
  - [Φ] = Wb, Weber;

- Parametri:
  - [R] = Ω, Ohm;
  - [L] = H, Henry;
  - [C] = F, Farad;

Esempi di modellazione dei circuiti elettrici

- Circuito RC serie ($v_C(t_0)$=0)

Kirchhoff alla maglia
$v_i = v_R + v_C$



$$v_R(t) = Ri(t) \qquad i(t) = C\dot{v}_C(t)$$

$$v_i(t) = RC\dot{v}_C(t) + v_C(t)$$

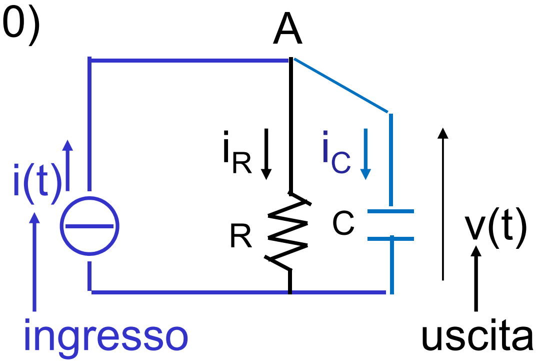
- Modello matematico differenziale (u=v_i, y=x=v_C):

$$\boxed{\dot{v}_C(t) = -\frac{v_C(t)}{RC} + \frac{v_i(t)}{RC}}$$

Esempi di modellazione dei circuiti elettrici - 1

- Circuito RC parallelo ($v(t_0)$=0)

Kirchhoff al nodo A
$i = i_R + i_C$



$$i_R(t) = \frac{1}{R} v(t) \qquad i_C(t) = C\dot{v}(t)$$

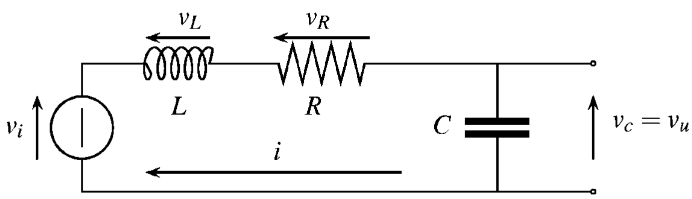
- Modello matematico differenziale (u=i, y=x=v):

$$\boxed{\dot{v}(t) = -\frac{1}{RC} v(t) + \frac{1}{C} i(t)}$$

Esempi di modellazione dei circuiti elettrici - 2

- Circuito RLC serie

(Condizioni iniziali nulle)



$$v_R(t) = Ri(t)$$
$$v_L(t) = L\dot{i}(t)$$
$$C\dot{v}_C(t) = i(t)$$

$$v_i(t) = v_L(t) + v_R(t) + v_C(t)$$

- Modello matematico differenziale:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{i}(t) &= -\frac{R}{L} i(t) - \frac{1}{L} v_C(t) + \frac{1}{L} v_i(t) \\ \dot{v}_C(t) &= \frac{1}{C} i(t) \end{aligned}}$$

Esempi di modellazione dei circuiti elettrici - 3

- Circuito RLC serie: modello in forma matriciale

  con $u=v_i$, $y=v_C$, $x_1=i$, $x_2=v_C$ (quindi $y=x_2$)

$$
\begin{cases}
\overbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}^{\dot{x}(t)} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}^{x(t)} + \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}^{B} u(t) \\[2ex]
y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{D} u(t)
\end{cases}
$$

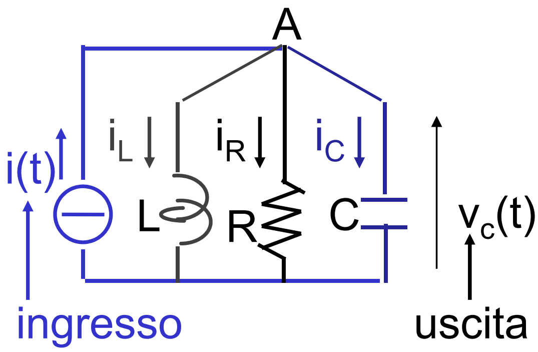
NOTA: D = 0 ➔ sistema puramente dinamico

Esempi di modellazione dei circuiti elettrici - 4

- Circuito RLC parallelo

  (Condizioni iniziali nulle)

Kirchhoff al nodo A
$i = i_L + i_R + i_C$



$$C\dot{v}_c(t) = -\frac{1}{R}v_c(t) - i_L(t) + i(t)$$

$$L\dot{i}_L(t) = v_c(t)$$

Esempi di modellazione dei circuiti elettrici - 5

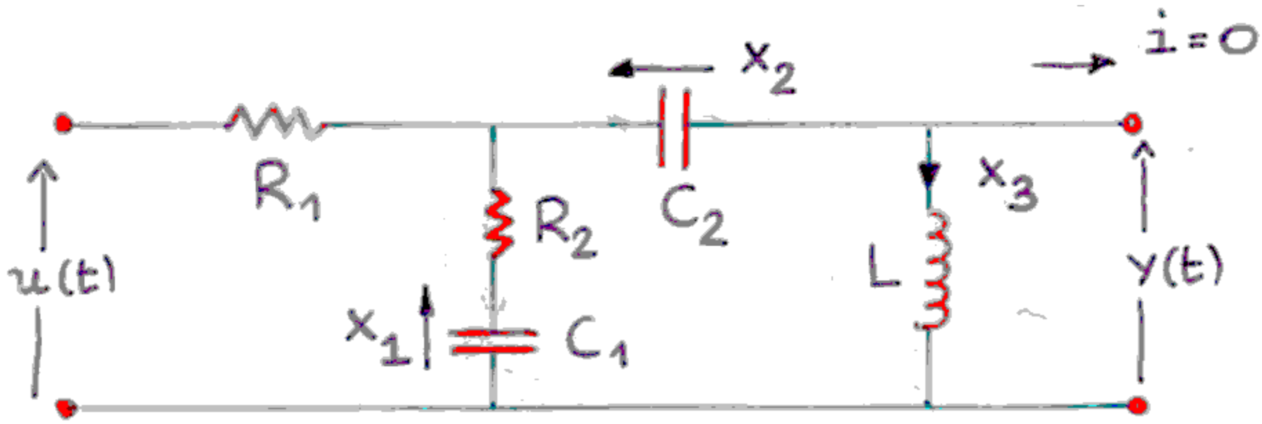
- Circuito RLC: modello in forma matriciale con $u=i$, $y=v_C$, $x_1=v_C$, $x_2=i_L$, (quindi $y=x_1$)

$$
\begin{cases}
\overset{\dot{x}(t)}{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}} = \overset{A}{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}} \overset{x(t)}{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}} + \overset{B}{\begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}} u(t) \\
y(t) = \underset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underset{D}{0} u(t)
\end{cases}
$$

NOTA: D = 0 → sistema puramente dinamico

Esempi di modellazione dei circuiti elettrici - 6

- Circuito complesso:



$$
\begin{cases}
C_1 \dot{x}_1 = (u - x_1 - R_2 C_1 \dot{x}_1)/R_1 - x_3 \\
C_2 \dot{x}_2 = x_3 \\
L \dot{x}_3 = x_1 + R_2 C_1 \dot{x}_1 - x_2
\end{cases}
$$

$$y = L\dot{x}_3$$

Esempi di modellazione dei circuiti elettrici - 7

- Circuito complesso: modello matriciale

A B

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{C_1(R_1+R_2)} & 0 & \frac{-R_1}{C_1(R_1+R_2)} \\ 0 & 0 & 1/C_2 \\ \frac{R_1}{L(R_1+R_2)} & -1/L & \frac{-R_1 R_2}{L(R_1+R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1(R_1+R_2)} \\ 0 \\ \frac{R_2}{L(R_1+R_2)} \end{bmatrix} u(t)
$$

$$
y(t) = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{R_1+R_2} & -1 & \frac{-R_1 R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix} u(t)
$$

C

NOTA: D ≠ 0 ➔ sistema dinamico, **non** puramente

Considerazioni modellistiche ed energetiche

- Nei modelli matematici dei circuiti elettrici, le variabili di stato sono **sempre** associate alla presenza di condensatori e induttori
- Tali elementi **immagazzinano energia** tramite, rispettivamente, accumulo di cariche elettriche e induzione di flusso magnetico.

STATO ⇔ ENERGIA

- Un condensatore carico ha una certa **energia potenziale** (*liberata* quando il condensatore si scarica)
- La corrente in un induttore ha una certa **energia cinetica** (cariche elettriche in movimento)

Considerazioni modellistiche ed energetiche - 1

- **Energia (E)**: quantità di lavoro che un certo sistema (particella di massa/carica) può svolgere
- **Lavoro (W)**: *forza* applicata (meccanica o elettrica) per spostamento (di particelle di massa o cariche elettriche), o anche variazione di energia cinetica (di masse o cariche)
- **Potenza (P)**: lavoro per unità di tempo (dW/dt)
- In ogni contesto fisico, esistono sempre due variabili il cui prodotto esprime la potenza in un certo istante (es. **$P = v\,i$**, **$P = F\,v$**, …)

Considerazioni modellistiche ed energetiche - 2

- Nelle resistenze **NON** c'è accumulo di energia, ma **dissipazione di potenza**, in quanto:

$$P = v\,i \quad \rightarrow \quad P = i^2 R = v^2 / R$$

- Nella pratica, la potenza dissipata si trasforma in calore emesso dal circuito elettrico e aumento di temperatura delle resistenze (che potrebbe determinare anche una variazione di R)
- Se l'obiettivo del modello è **SOLO** il circuito elettrico, tale potenza è genericamente dispersa all'esterno del sistema considerato (e non più considerata…)

Considerazioni modellistiche ed energetiche - 3

- Nel condensatore: $dW = V\,dq = \frac{q}{C}dq$

$$\Rightarrow \quad E_C(=W) = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$$

- Nell'induttore: $dW = -\mathcal{E}\,idt = Li\frac{di}{dt}dt = Lidt$

$$\Rightarrow \quad E_L(=W) = \int_0^I Lidi = \frac{1}{2}LI^2$$

N.B.: Nell'induttore, ricordando $\Phi = Li$ si può esprimere l'energia anche come:

$$E_L = \int_0^\Phi \frac{\Phi}{L}d\Phi = \frac{\Phi^2}{2L}$$

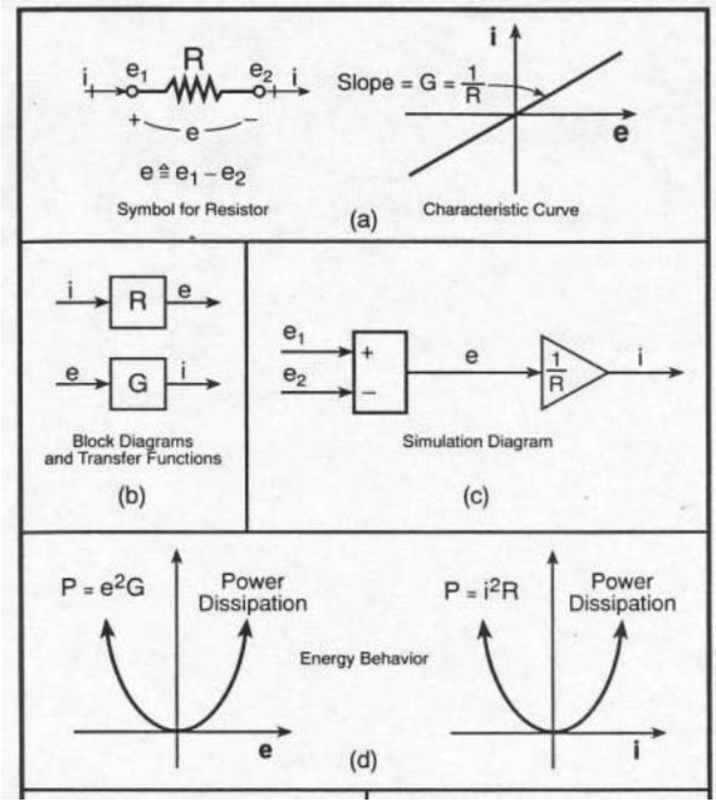
Questa formulazione più generica si applica anche in altri casi di variazione del flusso..

Considerazioni modellistiche ed energetiche - 4

- Le variabili da scegliere *preferibilmente,* dal punto di vista fisico, come stato sarebbero la **carica** nei condensatori e il **flusso** negli induttori
- Con ipotesi di linearità e per pratica ingegneristica (misure!), è più intuitivo utilizzare la **tensione** ai capi dei condensatori e la **corrente** negli induttori
- La scelta delle variabili di stato è **arbitraria**!
- Come vedremo, tale scelta **non influisce** sulle proprietà strutturali del modello matematico, ma solo sull'espressione delle sue equazioni

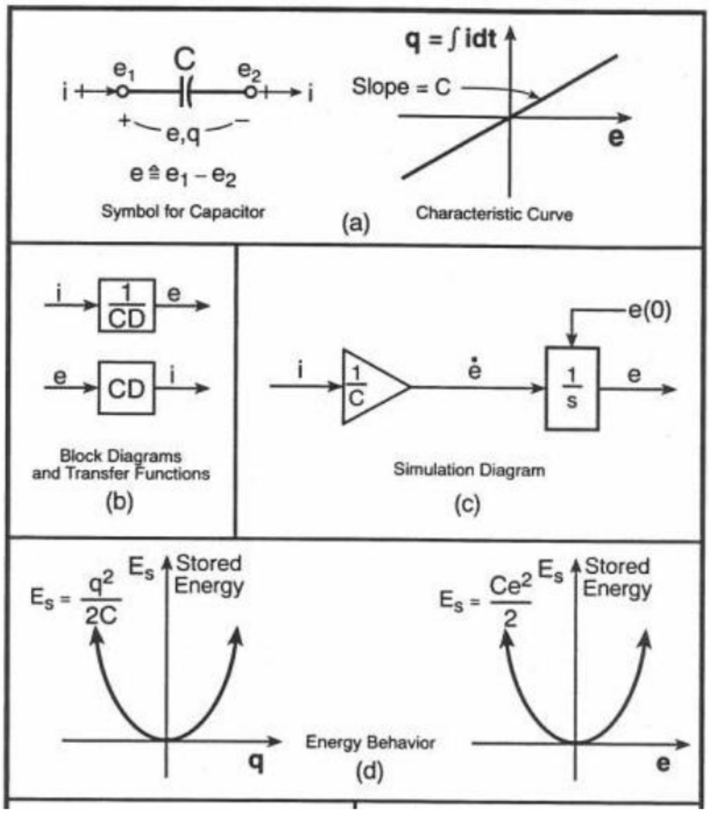
Circuiti elettrici: riassumendo

Resistenze:



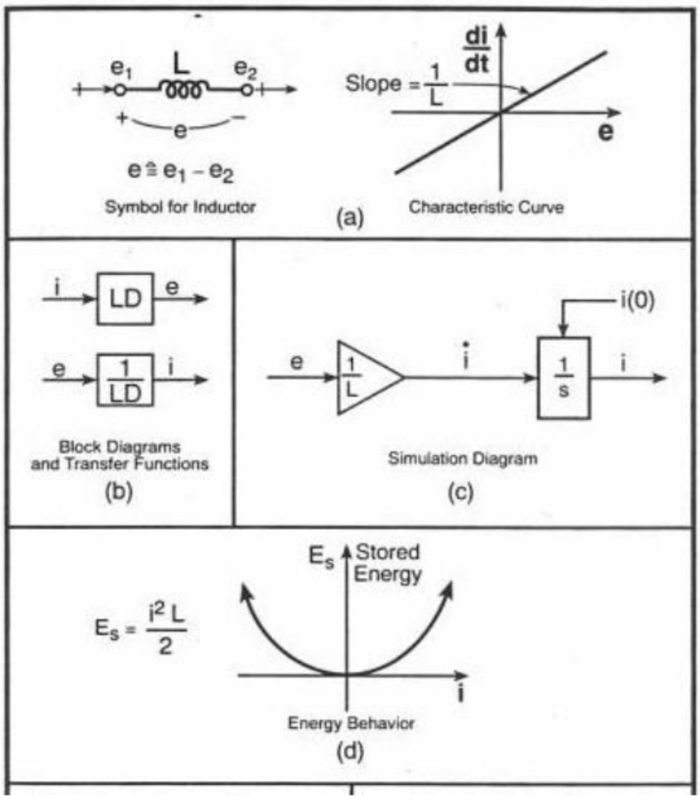
Circuiti elettrici: riassumendo - 1

Condensatori:



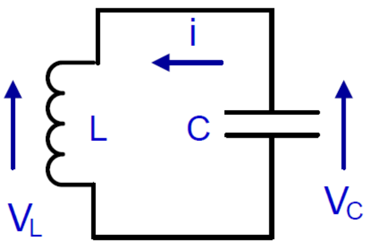
Circuiti elettrici: riassumendo - 2

Induttori:



Circuiti elettrici: esempio e analisi energetica

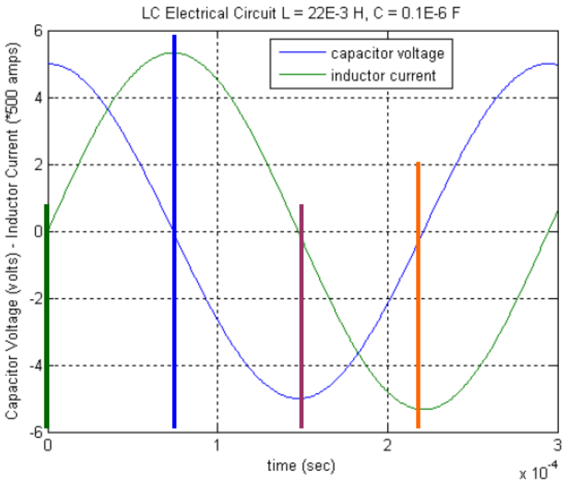
- Circuito LC *puro* (idealmente senza effetti resistivi)

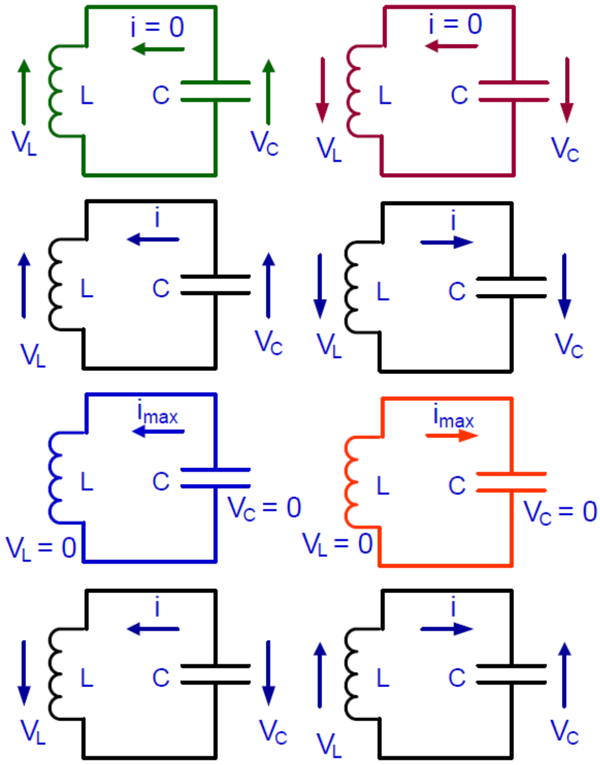


- Se il condensatore ha inizialmente una $V_c(0) \neq 0$, esso si scarica con una certa corrente verso l'induttanza
- Nell'induttanza però, la corrente non si annulla quando il condensatore è scarico, quindi quest'ultimo verrà ricaricato, MA con tensione di segno opposto (fino a $-V_c(0)$!)
- Solo a questo punto, la corrente nell'induttanza diventa nulla e il ciclo si ripete con tutte le variabili di segno opposto…

Circuiti elettrici: esempio e analisi energetica - 1

NOTA: andamento sinusoidale della tensione, andamento cosinusoidale della corrente..

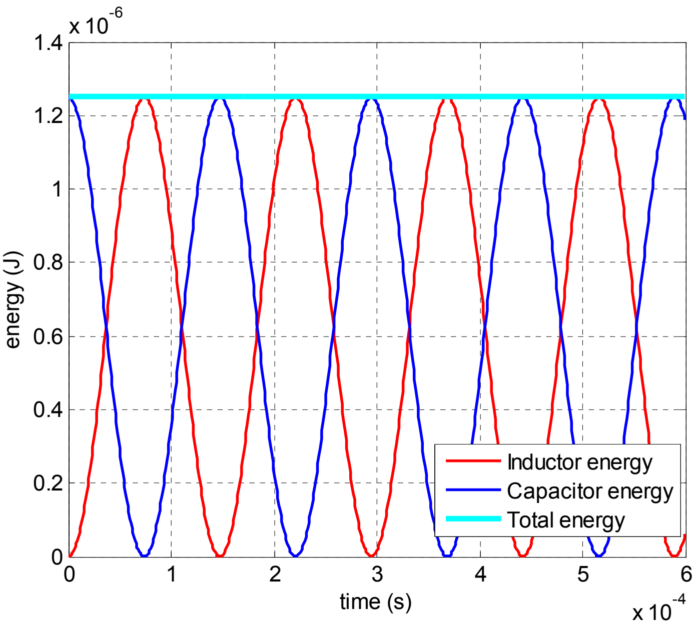




Circuiti elettrici: esempio e analisi energetica - 2

- Graficando l'energia dei due elementi:

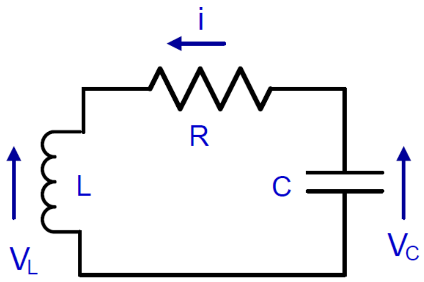
$$E_C = \frac{1}{2} C V_c^2 \qquad E_L = \frac{1}{2} L i^2 \qquad E_{tot} = E_C + E_L$$



NOTA: l'energia totale è perfettamente costante, MA *rimbalza* tra il condensatore e la induttanza!

Circuiti elettrici: esempio e analisi energetica - 3

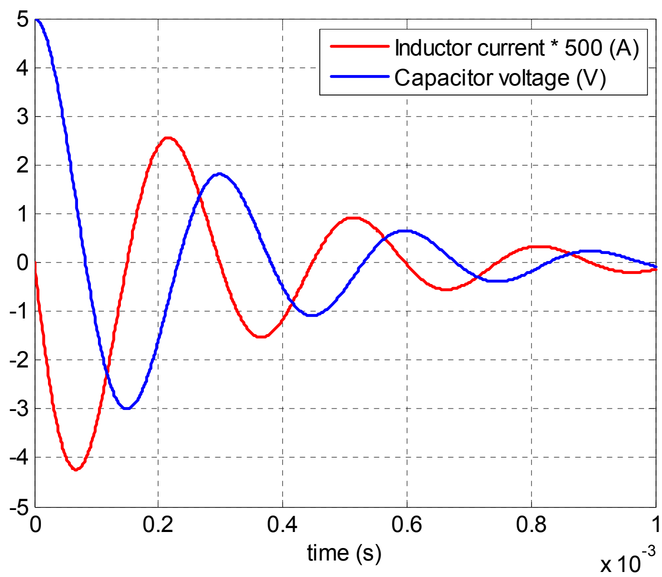
- Introducendo un elemento resistivo…



- La tensione dei due elementi accumulatori di energia non è più istantaneamente identica e la differenza è tanto maggiore quanto più è elevata la corrente sulla resistenza
- La resistenza dissipa l'energia conservata inizialmente nel condensatore, per cui il campo magnetico generatosi nell'induttanza <u>non</u> riuscirà a ricaricare completamente il condensatore con carica opposta a quella iniziale..

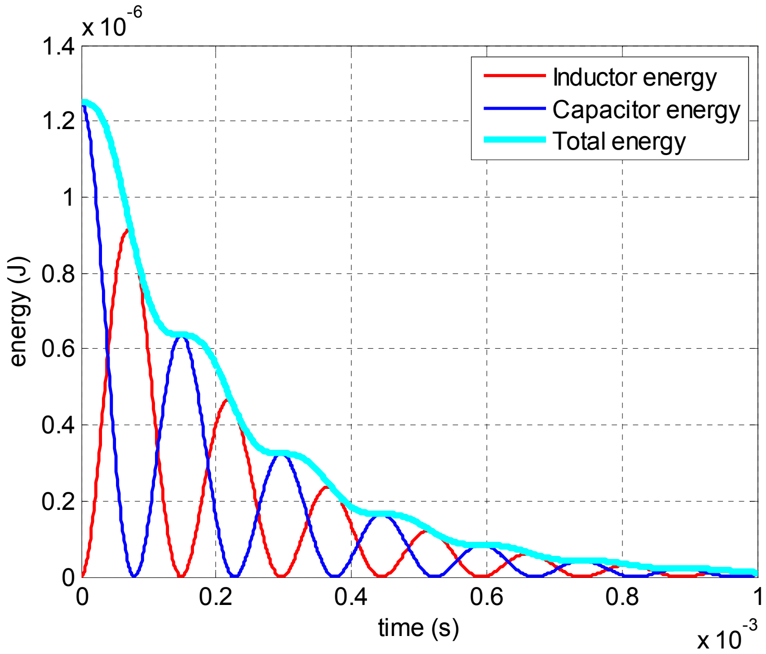
Circuiti elettrici: esempio e analisi energetica - 4

- L'andamento di tensione e corrente non è più puramente sinusoidale, ma tende a 0 per t → ∞



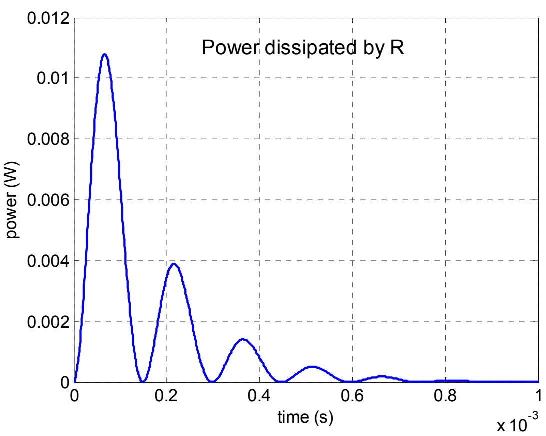
Circuiti elettrici: esempio e analisi energetica - 5

- L'energia totale del circuito tende anch'essa a 0

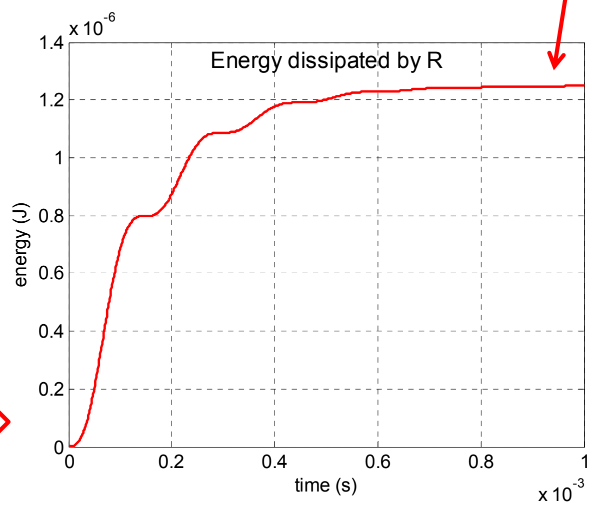


Circuiti elettrici: esempio e analisi energetica - 6

- Cosa è successo? Ovviamente l'energia mancante si disperde nella resistenza (dissipazione *termica*, non visibile dalle variabili elettriche)



Nota: tende al valore iniziale dell'energia immagazzinata nel condensatore!



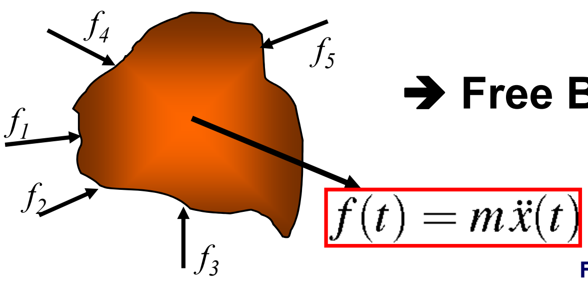
Facendo l'integrale rispetto al tempo

Analisi energetica e stabilità

- Il comportamento del circuito LC puro si può definire *stabile*, poiché **non** c'è una divergenza **verso l'infinito** delle variabili considerate
- Nel circuito RLC la stabilità è ancora più interessante, perché **tutte le variabili tendono ad un valore ben definito (zero!)** per t → ∞
- Formalmente, il circuito LC si dice **semplicemente stabile**, quello RLC **asintoticamente stabile**
- **La stabilità asintotica è ottenuta grazie agli effetti dissipativi della resistenza**
- Qualunque sia il numero di elementi di un circuito elettrico, la presenza di resistenze è sempre necessaria per garantire la stabilità asintotica!

Modelli di sistemi meccanici

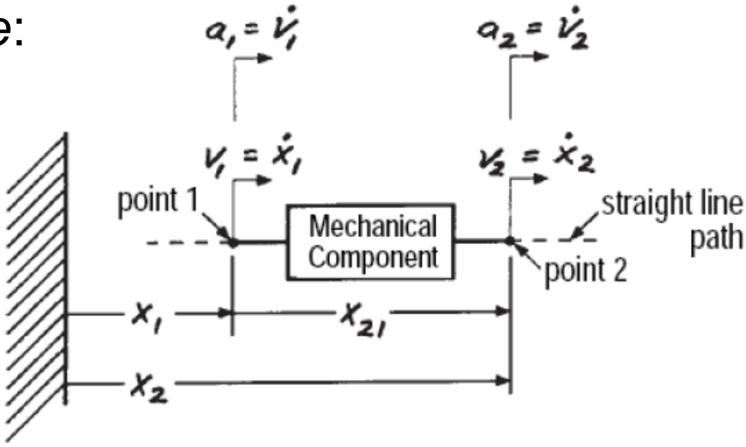
- Si considerano masse in movimento traslatorio e rotatorio nello spazio, per effetto di forze applicate
- Le rotazioni sono provocate da una forza applicata a certa distanza dall'asse di rotazione (forza per distanza = momento della forza, anche detto impropriamente **coppia**)
- La somma vettoriale delle forze applicate ad un corpo ne determina l'accelerazione (legge di Newton)



→ **Free Body Diagram (FBD)**

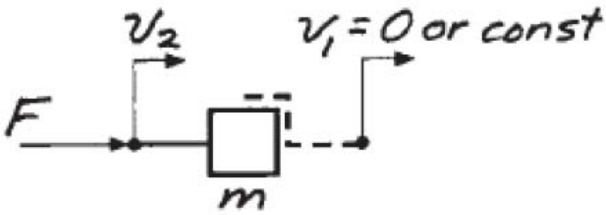
Modelli di sistemi meccanici - 1

- La legge di Newton $\sum f_i(t) = m\ddot{x}(t)$, definendo $m\ddot{x}(t)$ **forza inerziale**, è <u>analoga</u> alle leggi di Kirchhoff! (somma delle forze = 0)
- Spostamenti traslazionali sono sempre relativi ad un riferimento fisso, evidenziabile con schema *circuitale*:



Modelli di sistemi meccanici: elementi di base

- Masse:

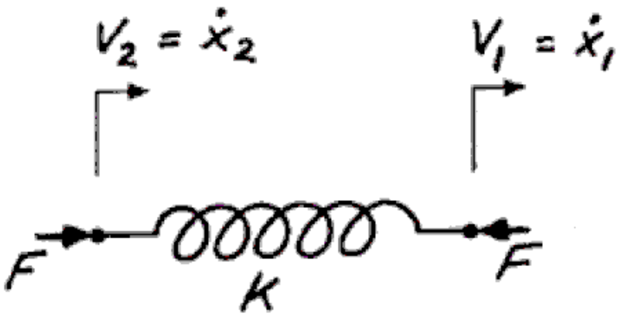


$$f(t) = M\frac{d^2x}{dt^2} = MD^2x(t)$$

- **Teoricamente**:
  - Relazione lineare
  - Massa costante e concentrata in un punto

Modelli di sistemi meccanici: elementi di base - 1

- Molle:

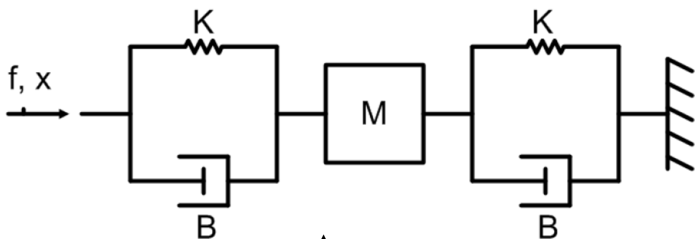


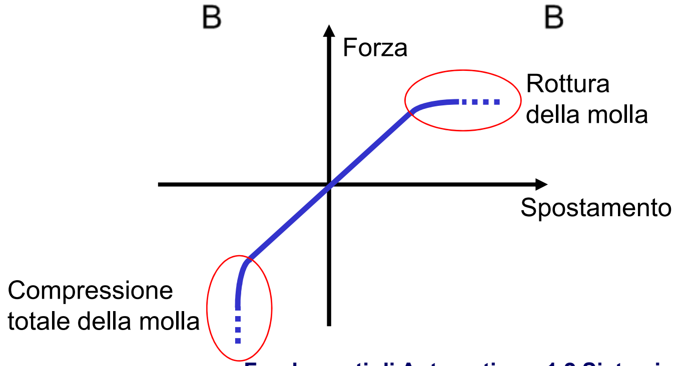
$$f(t) = K\left(x_1(t) - x_2(t)\right)$$

- **Teoricamente**:
  - Molla *pura* (senza massa o effetti di smorzamento)
  - Relazione lineare
  - **Elasticità** (K) costante

Modelli di sistemi meccanici: elementi di base - 2

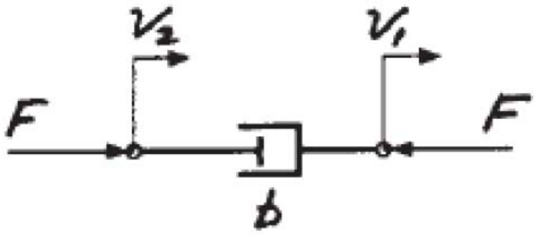
- **Realmente**:
  - La molla ha massa e smorzamento
  - K non è lineare rispetto allo spostamento





Modelli di sistemi meccanici: elementi di base - 3

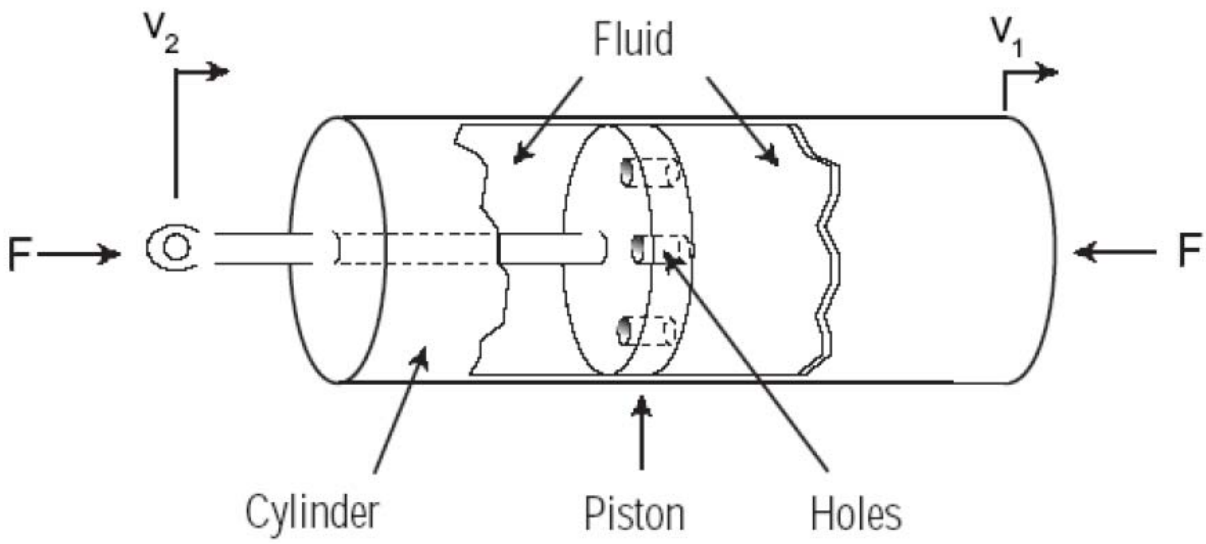
- Smorzatore (*damper*): simbologia e relazione matematica, nell'ipotesi di smorzamento *viscoso,* cioè dovuto all'**attrito** (proporzionale alla velocità)



$$f(t) = B\frac{d}{dt}\left(x_1(t) - x_2(t)\right) = BD\left(x_1(t) - x_2(t)\right)$$

Modelli di sistemi meccanici: elementi di base - 4

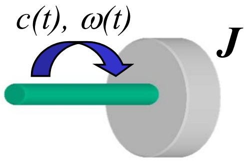
- Smorzatore (*damper*) **realmente**:
  - Il pistone ha una certa massa non trascurabile
  - Il fluido introduce effetti elastici



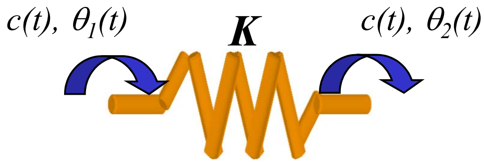
Modelli di sistemi meccanici: elementi di base - 5

- Analogamente per sistemi in moto rotatorio:
  - **Forze** → **Coppie**
  - **Masse** → **Momenti di inerzia (o Inerzie)**

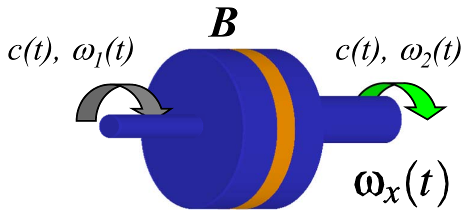
$$c(t) = J\ddot{\theta}(t)$$



$$c(t) = K[\theta_1(t) - \theta_2(t)]$$



$$c(t) = B[\omega_1(t) - \omega_2(t)]$$

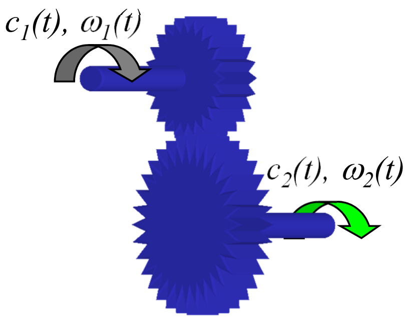


$$\omega_x(t) = \dot{\theta}_x(t)$$

Modelli di sistemi meccanici: elementi di base - 6

- Trasmissione del moto (*trasformatori*…)

Riduttore



$$k_r = \frac{N_1}{N_2} \qquad N_2 > N_1, \quad k_r < 1$$

In un riduttore ideale (senza perdite per attrito e con accoppiamento perfetto tra gli ingranaggi), **la velocità viene ridotta** del fattore k_r

$$\dot{\theta}_2 = k_r\,\dot{\theta}_1$$

Poiché in questo meccanismo la potenza entrante deve essere uguale a quella uscente

$$P_i(t) = c_1(t)\dot{\theta}_1(t) = c_2(t)\dot{\theta}_2(t) = P_u(t) \qquad c_2(t) = c_1(t)/k_r$$

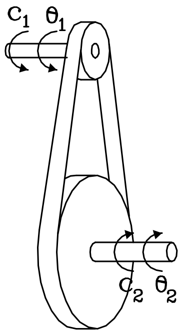
la coppia risulta amplificata.

Modelli di sistemi meccanici: elementi di base - 7

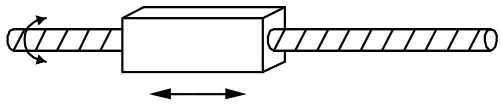
- Trasmissione del moto (*trasformatori*…)

Altri elementi:

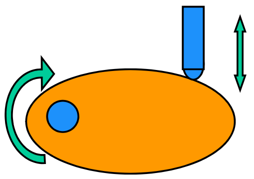
Cinghia/puleggia



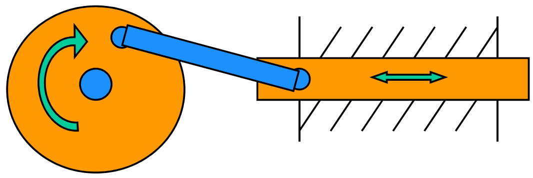
Vite a ricircolazione di sfere



Camma



Biella/manovella



Modelli di sistemi meccanici: elementi di base - 8

Le unità di misura delle grandezze meccaniche nel sistema SI sono:

- Variabili:
- [f] = N, Newton;
- [x] = m, metri;
- $[\dot{x}]$ = m/sec, velocità;
- $[\ddot{x}]$ = m/sec^2, accelerazione.

Variabili (caso rotatorio):
[c] = N m;
$[\theta]$ = rad;
$[\dot{\theta}]$ = rad/sec;
$[\theta]$ = rad/sec^2.

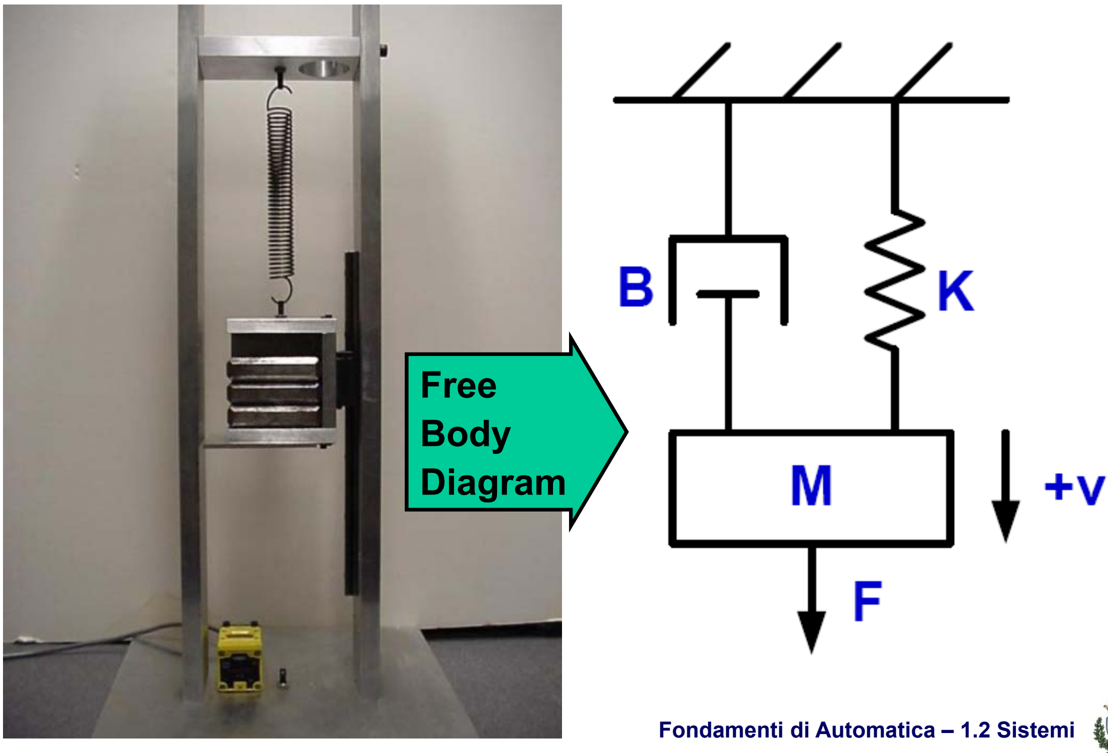
- Parametri:
- [M] = kg, chilogrammi;
- [K] = N/m, coefficiente di rigidezza;
- [B] = N sec/m, coefficiente di attrito viscoso.

Parametri (caso rotatorio):
[J] = kg m^2;
[K] = Nm /rad, coefficiente di rigidezza torsionale;
[B] = Nm sec/rad, coefficiente di attrito torsionale.

N.B.: più precisamente, i radianti sono **numeri puri** (rapporto tra lunghezza di un arco e lunghezza del raggio di tale arco), quindi <u>senza</u> unità di misura…
Nel SI sono definiti *unità di misura derivata* (o *ausiliaria*)

Esempi di modellazione di sistemi meccanici

- Gruppo massa-molla-smorzatore (verticale):



Esempi di modellazione di sistemi meccanici - 1

- Gruppo massa-molla-smorzatore (verticale, $\dot{z} = v$):

$$F_e = Kz \qquad F_a = Bv = B\dot{z}$$

$$F - F_e - F_a = M\ddot{z} \;\Rightarrow\; M\ddot{z} + B\dot{z} + Kz = F$$

- Ponendo $x_1 = z$, $x_2 = v$, $u=F$ e $y = z$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{K}{M}x_1(t) - \frac{B}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Esempi di modellazione di sistemi meccanici - 2

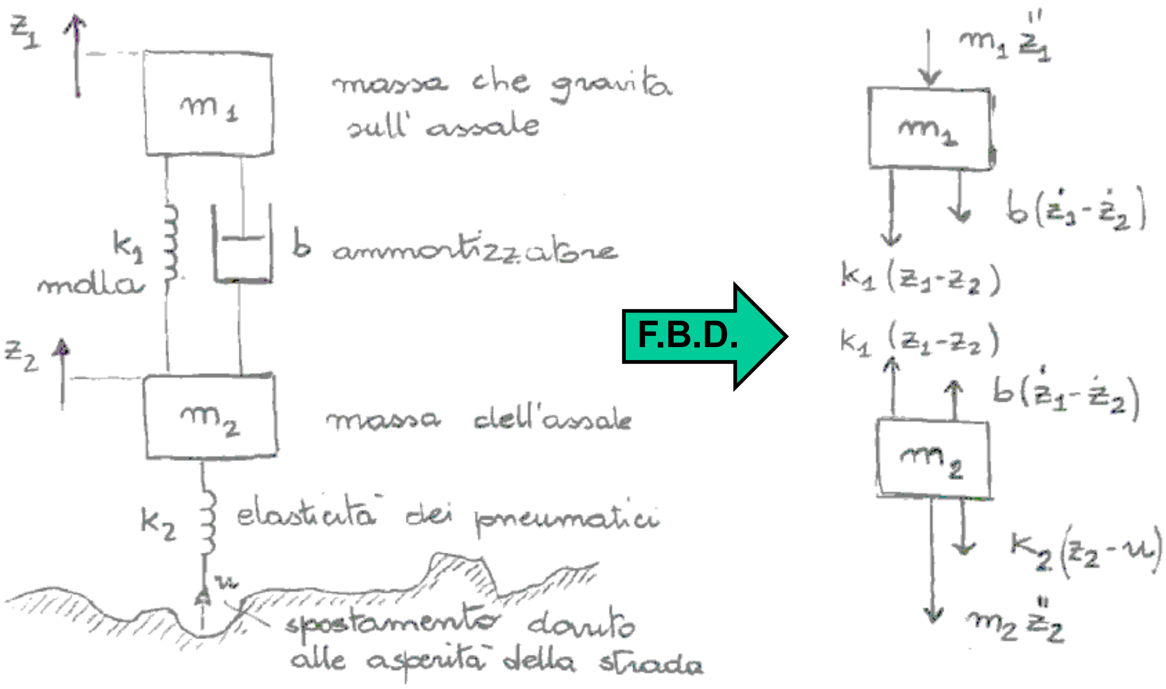
- Gruppo massa-molla-smorzatore (verticale), modello matriciale:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \overset{\overset{A}{\Downarrow}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \overset{\overset{B}{\Downarrow}}{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}} u(t) \\ y(t) = \underset{\underset{C}{\Uparrow}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underset{\underset{D}{\Uparrow}}{0} u(t) \end{cases}$$

N.B.: l'ingresso (la forza F) nel caso considerato sarà sempre diverso da zero, per via della forza peso F = M g, dovuta all'accelerazione di gravità g…

Esempi di modellazione di sistemi meccanici - 3

- Sospensione di un autoveicolo:



Esempi di modellazione di sistemi meccanici - 4

- Sospensione di un autoveicolo:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + b(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_1(z_1 - z_2) = 0 \\ m_2 \ddot{z}_2 - b(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_1(z_1 - z_2) + k_2(z_2 - u) = 0 \end{cases}$$

- Ponendo $x_1 = z_1$, $x_2 = \dot{z}_1$, $x_3 = z_2$, $x_4 = \dot{z}_2$ e $y = [z_1\ z_2]^T$

$$\begin{cases} m_1 \dot{x}_2 + b(x_2 - x_4) + k_1(x_1 - x_3) = 0 \\ m_2 \dot{x}_4 - b(x_2 - x_4) - k_1(x_1 - x_3) + k_2(x_3 - u) = 0 \end{cases}$$

Esempi di modellazione di sistemi meccanici - 5

- Sospensione di un autoveicolo, modello matriciale:

$$\dot{x} = \overset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix}} x + \overset{B}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix}} u$$

$$y = \underset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} x$$

NOTA: D = 0 ➔ sistema puramente dinamico

Considerazioni modellistiche ed energetiche

- Nei modelli matematici dei sistemi meccanici, la legge di Newton impone equazioni differenziali di secondo grado, dalle quali si determinano posizioni e velocità come variabili di stato
- Anche nei sistemi meccanici, vi sono elementi che **immagazzinano energia**: le masse in movimento (**energia cinetica**) e le molle compresse (**energia potenziale**)
- In questo contesto, la potenza è espressa dal prodotto tra forza (coppia) applicata e velocità:

P = F v o **P =** $c\omega$

Considerazioni modellistiche ed energetiche - 1

- Negli smorzatori (ideali) **NON** c'è accumulo di energia, ma **dissipazione di potenza**, in quanto:

$$P = F\,v = B\,v^2$$

- L'elemento è analogo ad una resistenza elettrica, in questo caso la dissipazione di potenza determina un riscaldamento del fluido nello smorzatore
- Per masse e molle, le analogie sono determinate dal tipo di energia immagazzinata:

$$E_{cin} = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{p^2}{2M}$$

Energia cinetica ($p = Mv$: quantità di moto)

$$E_{pot} = \frac{1}{2}Kx^2$$

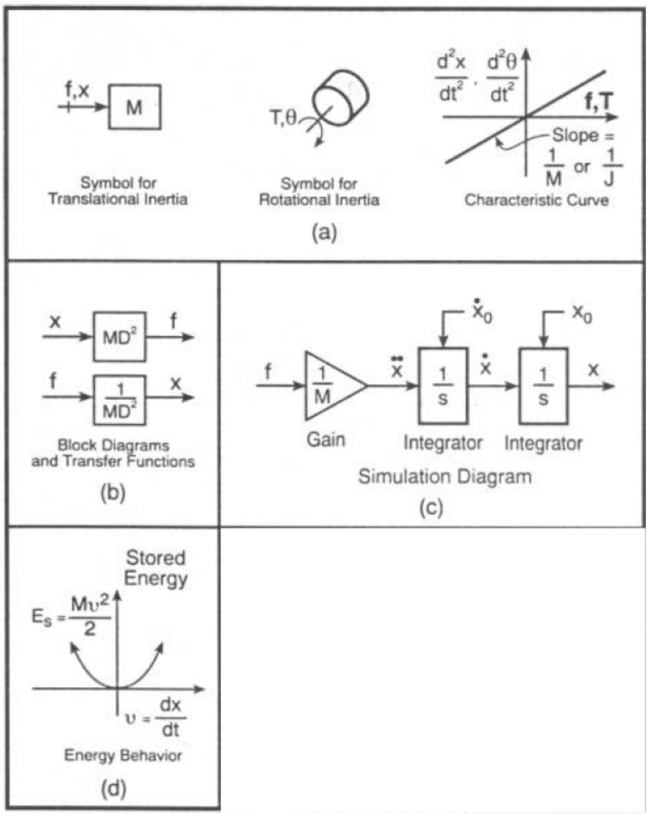
Energia potenziale

Considerazioni modellistiche ed energetiche - 2

- Dall’analogia tra il tipo di energia accumulata, le **masse** sono analoghe agli **induttori** e le **molle** ai **condensatori** (nonostante le similitudini tra i simboli grafici possano fare pensare diversamente! Es. smorzatore → condensatore..)
- Anche nel caso meccanico, esiste una scelta alternativa per rappresentare lo **stato** di una massa, cioè la **quantità di moto**
- Questa scelta faciliterebbe la modellazione nei casi in cui la massa non fosse costante (che però avrebbero modelli matematici nonlineari)

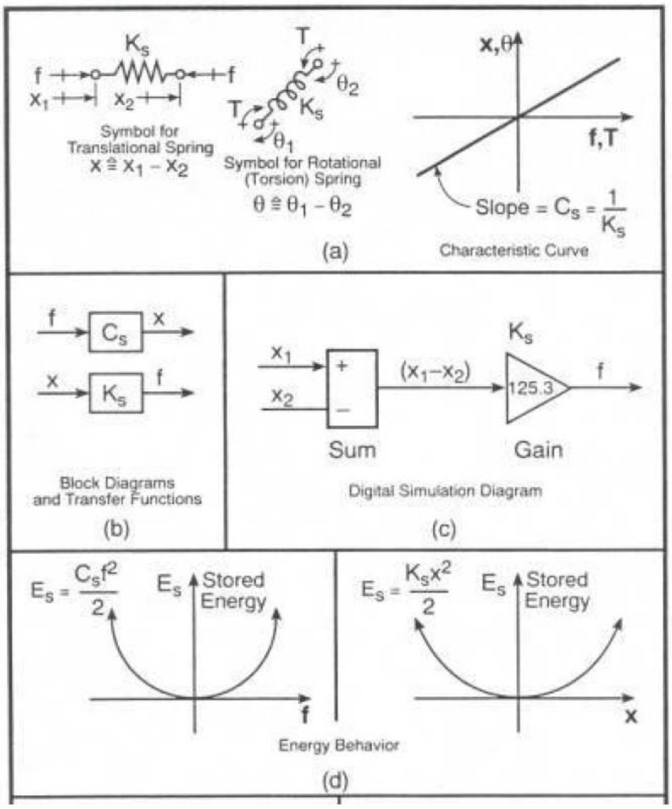
Sistemi meccanici: riassumendo

Masse/Inerzie:



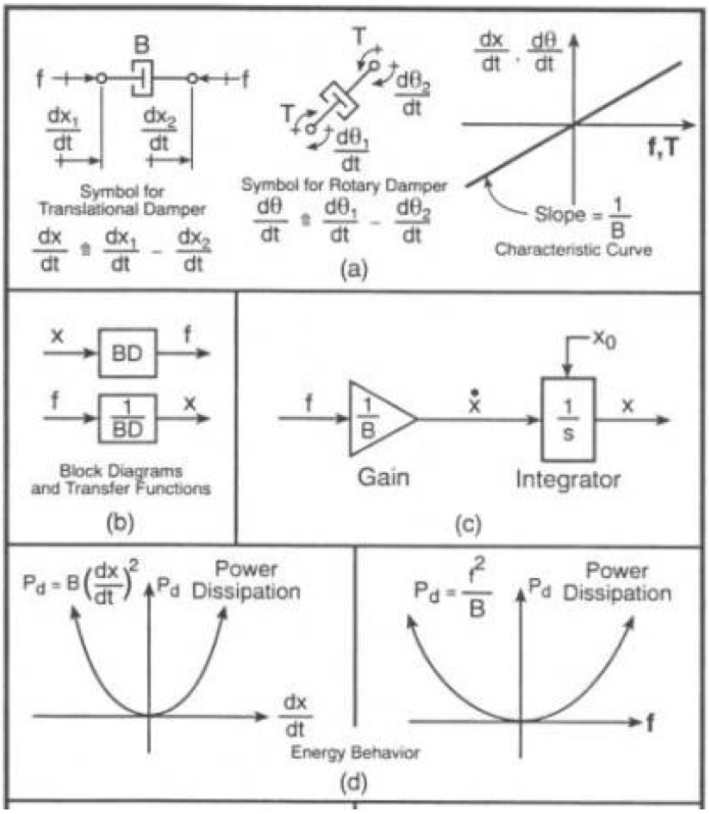
Sistemi meccanici: riassumendo - 1

Molle:



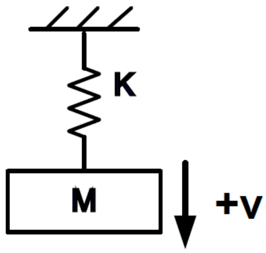
Sistemi meccanici: riassumendo - 2

Smorzatori:



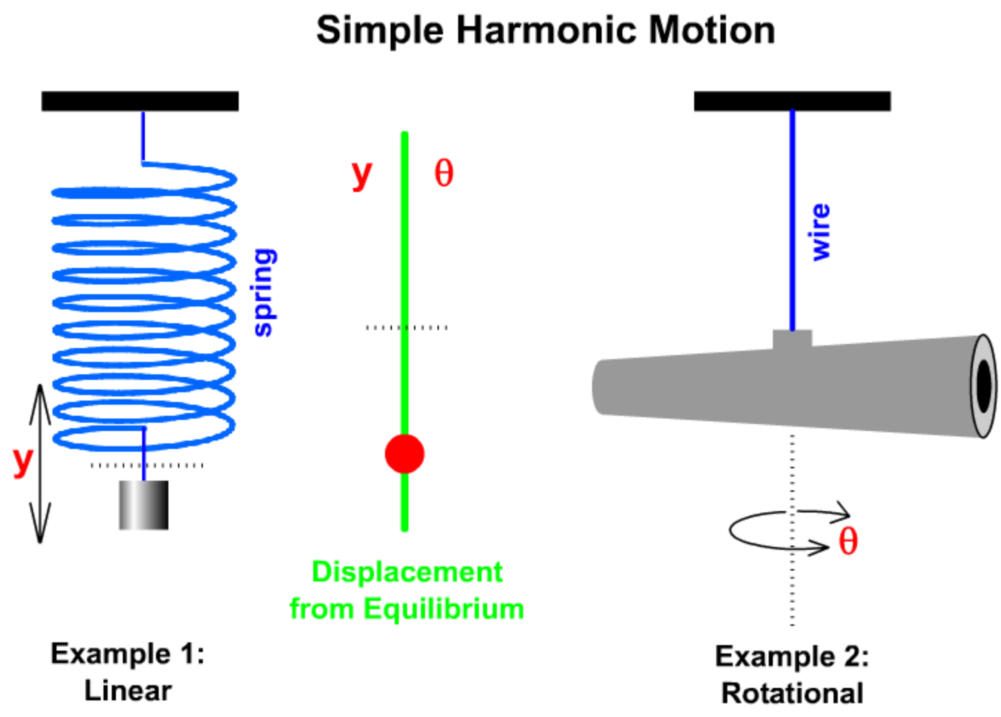
Sistemi meccanici: esempio e analisi energetica

- Sistema massa-molla *puro* (idealmente senza attriti e senza gravità)



- Se la molla è inizialmente compressa (o estesa), la forza elastica imprime una accelerazione alla massa
- Quando la molla arriva alla sua lunghezza di riposo, la velocità della massa non si annulla, quindi quest'ultima si muoverà fino alla posizione pari a quella di compressione (o estensione) iniziale della molla, MA di segno opposto
- Il ciclo si ripete con tutte le variabili di segno opposto…

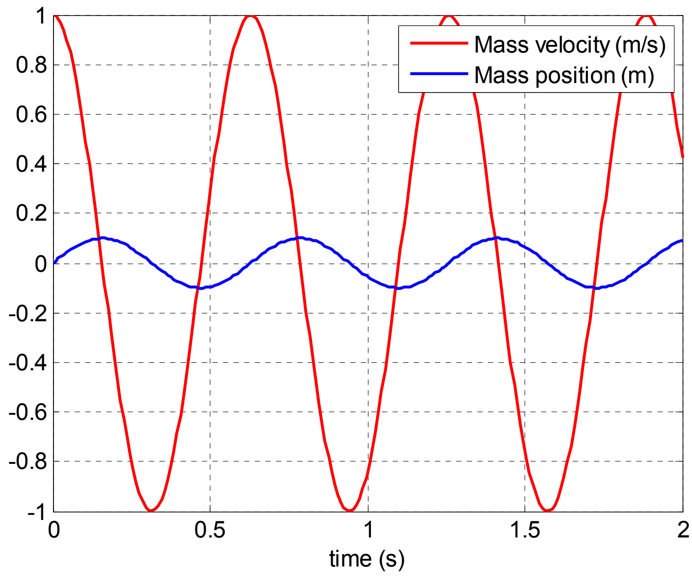
Sistemi meccanici: esempio e analisi energetica - a



http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/

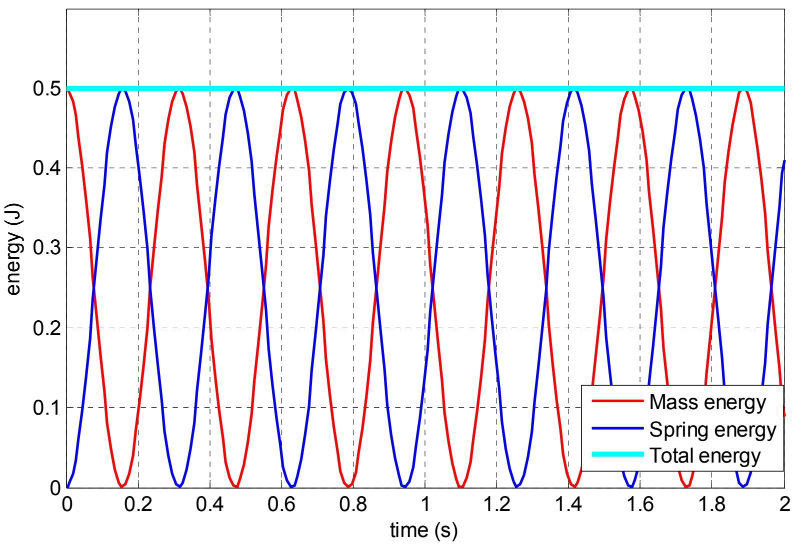
Sistemi meccanici: esempio e analisi energetica - 1

- Andamento sinusoidale/cosinusoidale di posizione e velocità della massa



Sistemi meccanici: esempio e analisi energetica - 2

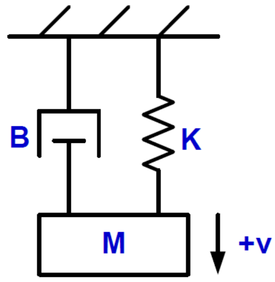
- Andamento di energia cinetica della massa ed energia potenziale della molla



NOTA: l'energia totale è perfettamente costante, **MA** *rimbalza* tra la massa e la molla!

Sistemi meccanici: esempio e analisi energetica - 3

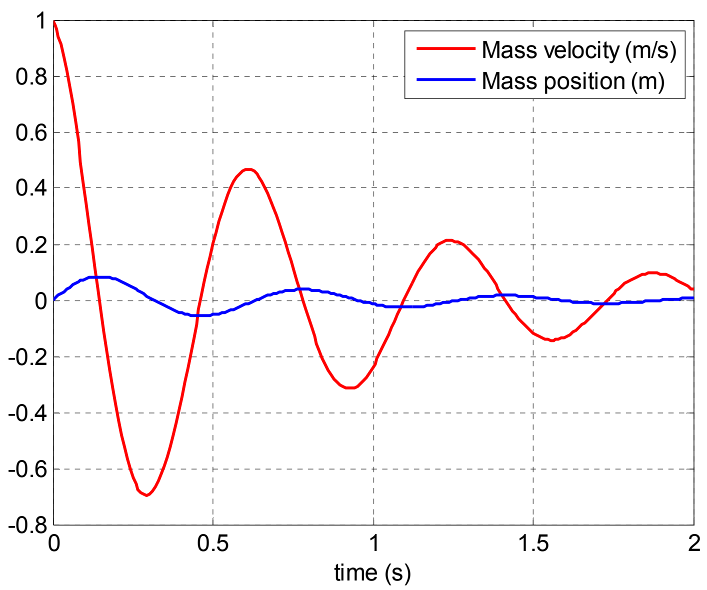
- Introducendo un elemento dissipativo…



- Lo smorzatore riduce la forza impressa dalla molla e quindi l'accelerazione, in misura tanto maggiore quanto più è elevata la velocità della massa
- Pertanto, la massa non riuscirà ad estendere (o comprimere) la molla nella stessa misura in cui essa è compressa (o estesa) inizialmente

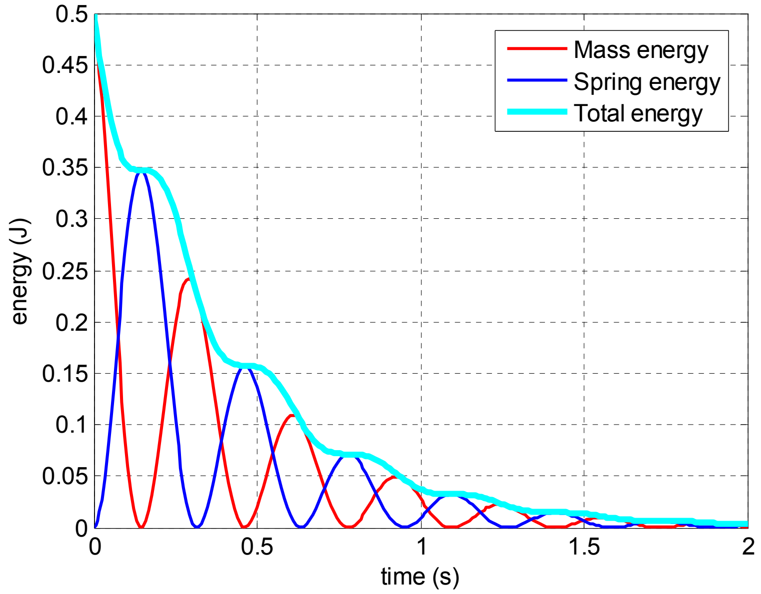
Sistemi meccanici: esempio e analisi energetica - 4

- L'andamento di posizione e velocità tende a zero per t → ∞



Sistemi meccanici: esempio e analisi energetica - 5

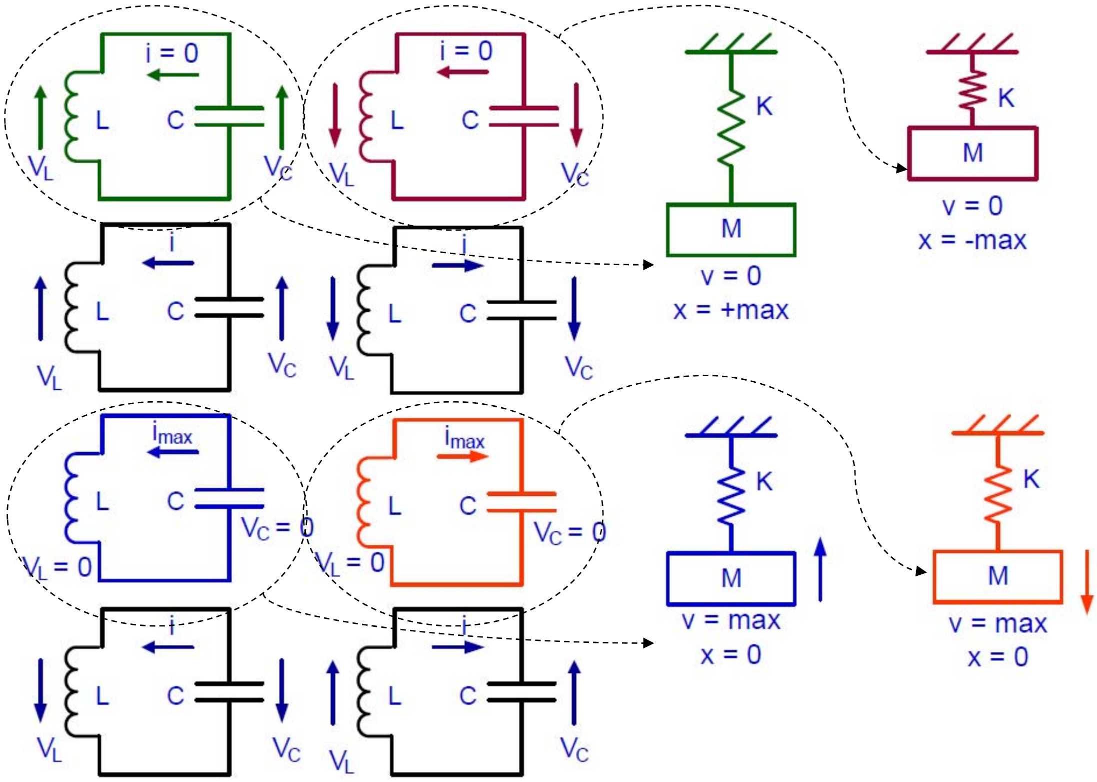
- L'energia totale nel sistema tende anch'essa a 0



Sistemi meccanici: analisi energetica e stabilità

- Cosa è successo? Ovviamente l'energia mancante si disperde nello smorzatore, il cui attrito provoca dissipazione termica
- Come per i circuiti LC/RLC, possiamo dire:
  – massa-molla: **semplicemente stabile**
  – massa-molla-smorzatore: **asintoticamente stabile**
- In generale, **la stabilità asintotica si ottiene grazie agli effetti dissipativi dell'attrito**, senza i quali un sistema meccanico è al più semplicemente stabile
- L'instabilità di un sistema meccanico può essere causata dalla gravità (che infatti fa cadere gli aerei ☹)

Analogia circuito LC e sistema massa-molla

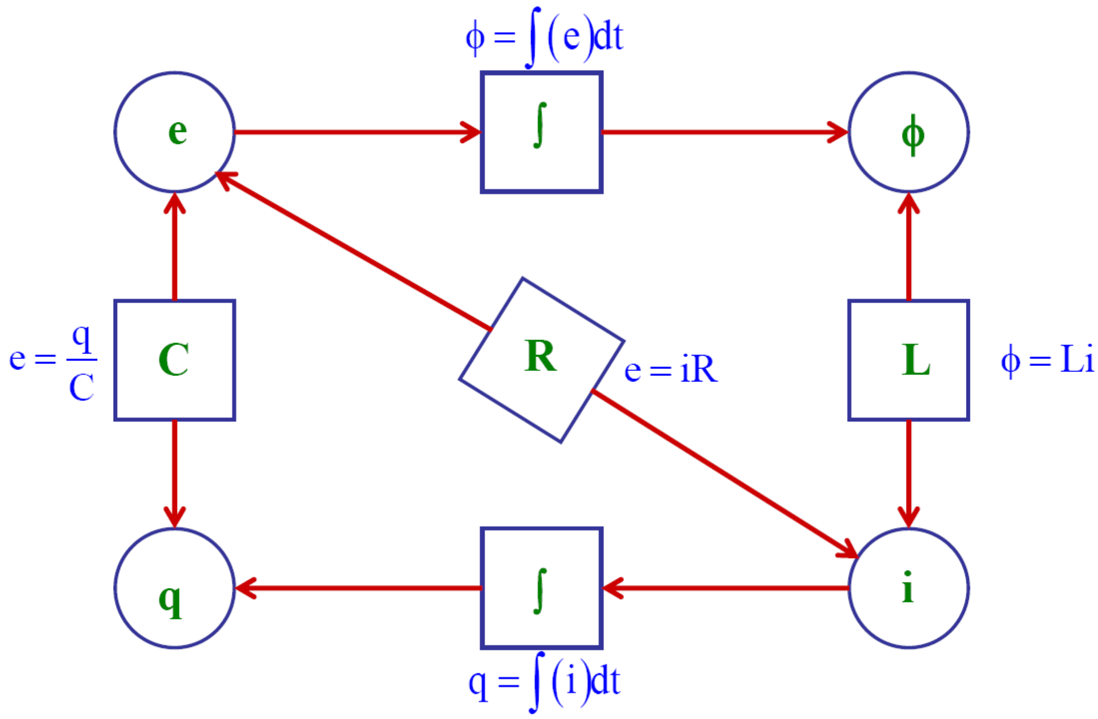


Elenco completo di analoghi elettrici / meccanici

- Forza ←→ Tensione
- Velocità ←→ Corrente
- Traslazioni/Rotazioni ←→ Carica elettrica
- Quantità di moto ←→ Flusso magnetico
- Smorzatori ←→ Resistenze
- Masse ←→ Induttori
- Molle ←→ Condensatori

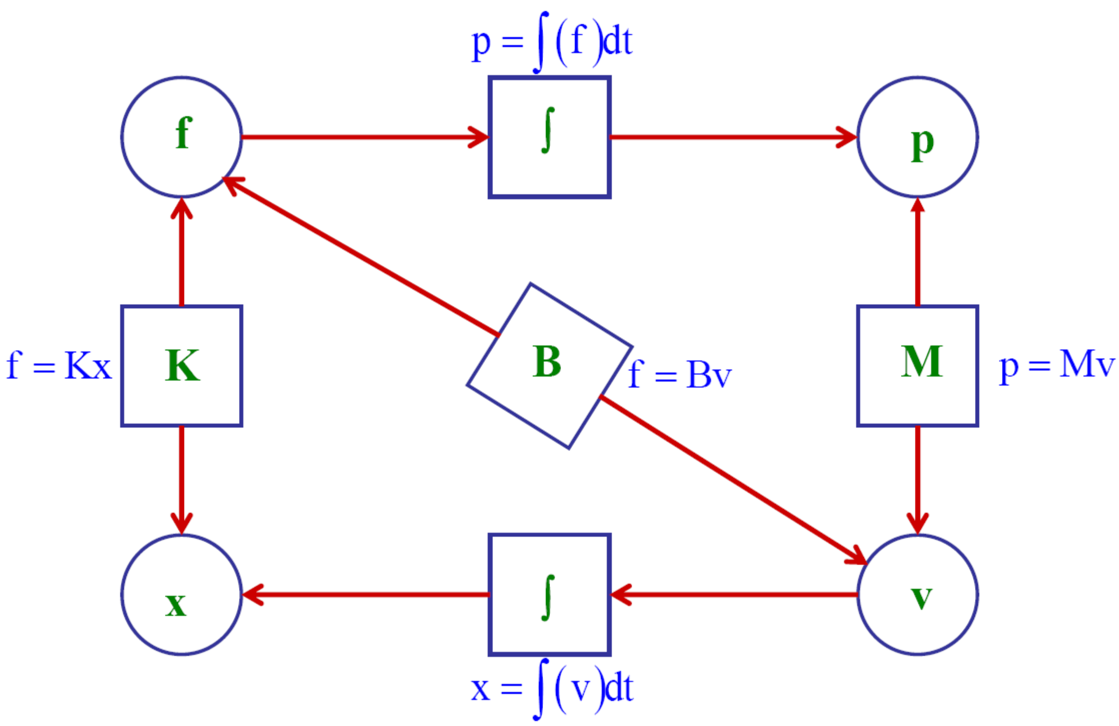
Analogie tra modelli di sistemi fisici

- Struttura generale per la modellazione di **circuiti elettrici**:



Analogie tra modelli di sistemi fisici - 1

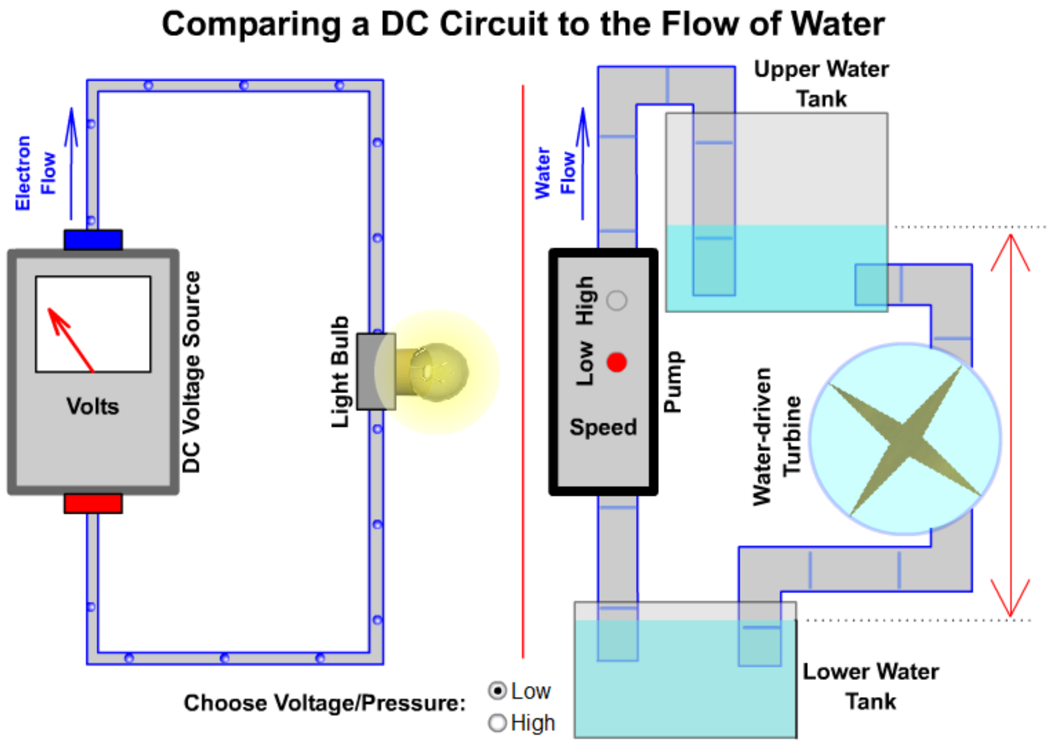
- Struttura generale per la modellazione di **sistemi meccanici**:



Analogie tra modelli di sistemi fisici - 2

- Le analogie e la struttura delle relazioni tra gli elementi di base di una certa tipologia di sistemi fisici, basate come detto su considerazioni energetiche, si estendono a qualunque contesto fisico (termodinamica, fluidodinamica,..)
- Ad esempio, nei sistemi fluidodinamici si evidenzia l'analogia tra:
  - **Tensione** (forza) → **Pressione**
  - **Corrente** (velocità) → **Portata** (o *flusso*)
- Il prodotto di queste due grandezze è ancora una potenza, esiste la resistenza fluidica e l'accumulo di pressione e portata (serbatoi)

Analogia tra circuiti elettrici ed idraulici



http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/

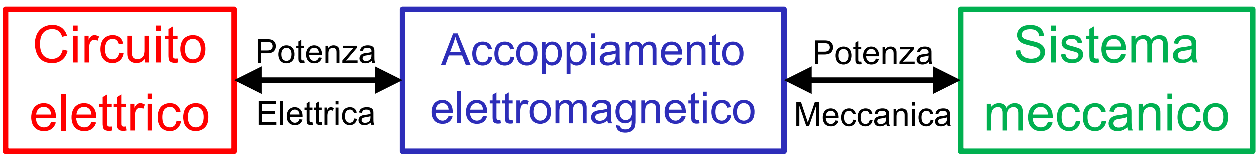
Analogie tra modelli di sistemi fisici - 3

- La metodologia di modellazione basata su tali analogie è supportata dalla notazione grafica detta ***Bond Graphs*** (qui non trattati, ma valida alternativa degli schemi a blocchi)
- Nei *Bond Graphs*, le interconnessioni tra gli elementi sono attraversate da due soli tipi di variabili, sempre accoppiate:
  - *Effort* (tensione, forza, pressione,…)
  - *Flow* (corrente, velocità, flusso,…)

  ed esistono solo tre elementi di base:
  - Dissipatori (tipo R: resistenze, smorzatori,…)
  - Accumulatori di *flow* (tipo C: condensatori, molle, …)
  - Accumulatori di *effort* (tipo I: induttori, masse,…)
- Tale metodologia di modellazione si estende anche <u>oltre</u> ai *semplici* casi di parametri concentrati e relazioni lineari…

Interconnessione tra sistemi elettrici e meccanici

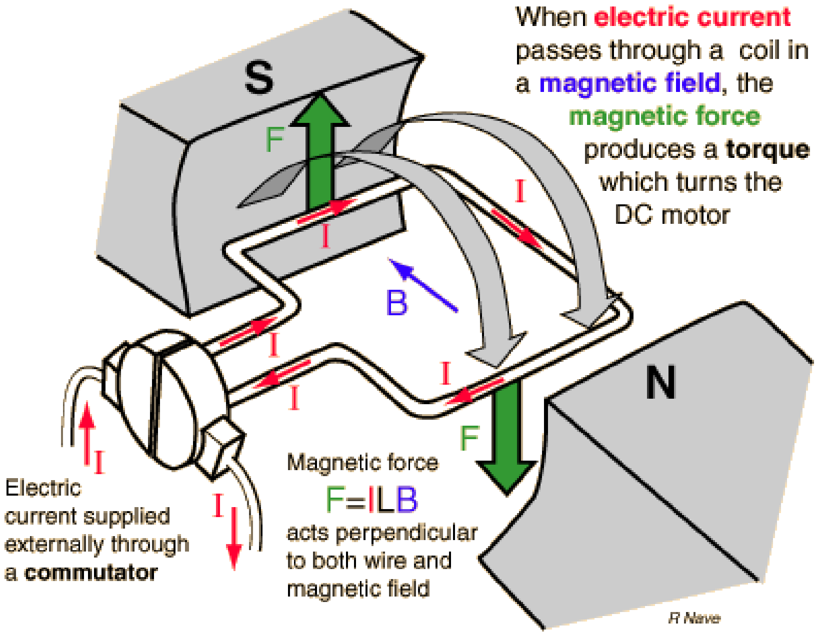
- Oltre alle analogie, è noto che tramite motori e generatori elettrici è possibile lo **scambio energetico** tra i due contesti fisici:



- L'accoppiamento elettromagnetico avviene grazie alla presenza simultanea di cariche elettriche in movimento (corrente) e di un campo magnetico perpendicolare alla direzione di tale movimento

Interconnessione tra sistemi elettrici e meccanici - 1

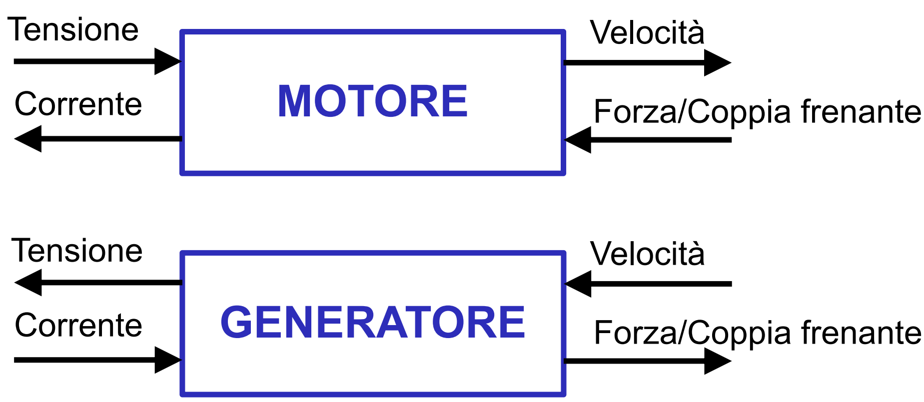
- Principio base di una macchina elettrica a corrente continua:



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/magnetic/motdc.html

Interconnessione tra sistemi elettrici e meccanici - 2

- Macchina a corrente continua ideale ➔ **giratore**
- **Giratore:** elemento simile a trasformatori/riduttori, ma che trasforma la potenza *girando* il rapporto tra le variabili associate: **NON** tensione/forza (analogia al trasformatore elettrico tensione/tensione), **MA** tensione/velocità, ecc.



Interconnessione tra sistemi elettrici e meccanici - 3

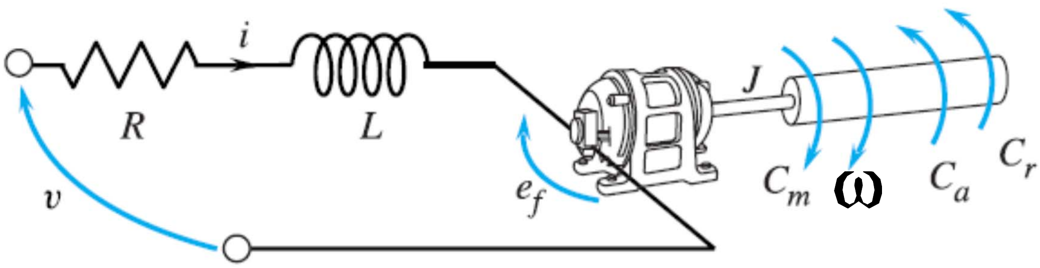
- Relazioni caratteristiche del **giratore ideale** (caso rotativo):

$$e_f(t) = k_m \, \dot{\theta}(t) \qquad C_m(t) = k_m \, i(t)$$

- e_f : tensione contro-elettromotrice (Back ElectroMotive Force, **BEMF**)
- C_m : coppia meccanica del motore
- Il parametro k_m (per ip. costante) è detta indifferentemente costante di coppia o anche costante di BEMF

Interconnessione tra sistemi elettrici e meccanici - 4

- Nel caso reale un motore elettrico a corrente contiene intrinsecamente un circuito elettrico (resistenza / induttanza) ed una struttura meccanica (inerzia ed attrito):



Interconnessione tra sistemi elettrici e meccanici - 5

- Modello matematico completo del motore elettrico a corrente continua ($\omega(t) = \dot{\theta}(t)$):
  - e_f = BEMF e C_m = coppia motrice (giratore ideale)
  - C_a = coppia di attrito (viscoso) $= B\dot{\theta}(t) = B\omega(t)$
  - C_r = coppia di carico (ingresso di disturbo)
  - Applicando la legge di Kirchhoff alla maglia + il bilancio delle coppie all'albero meccanico:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{k_m}{L}\omega(t) + \frac{1}{L}v(t)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k_m}{J}i(t) - \frac{B}{J}\omega(t) - \frac{1}{J}C_r(t)$$

Interconnessione tra sistemi elettrici e meccanici - 6

- Modello matematico del motore elettrico a corrente continua in forma matriciale: $x_1=i$, $x_2=\omega$, $u=[v\ C_r]^T$

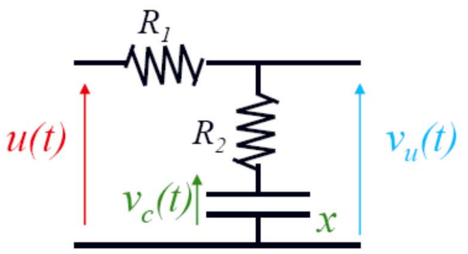
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \overset{A}{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k_m}{L} \\ \frac{k_m}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \overset{B}{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix}} u(t)$$

- Le uscite?? Generalmente sia velocità che corrente sono misurabili, quindi:

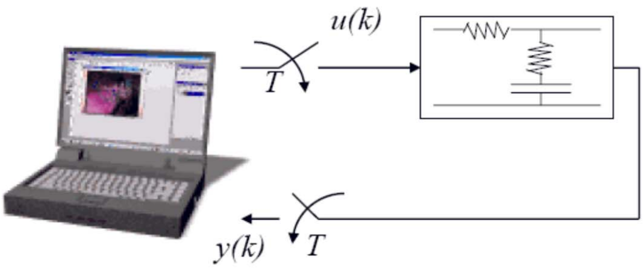
$$y(t) = x(t) = \underset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Modellazione di sistemi a tempo discreto

- Si ottengono ad esempio (**MA NON SOLO**) quando un sistema fisico (a tempo continuo) viene accoppiato ad un sistema di controllo costituito da un **elaboratore digitale**

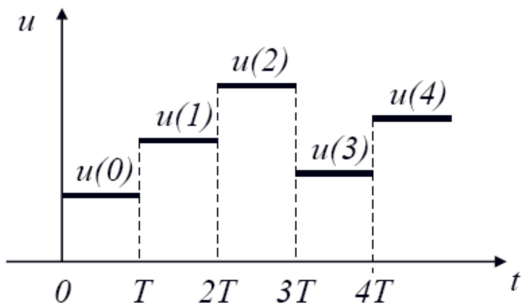


$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t)+bu(t) \\ y(t) &= cx(t)+du(t) \end{aligned}$$



Modellazione di sistemi a tempo discreto - 1

- **Discretizzazione (campionamento):** si suppone che all'ingresso venga applicata una funzione costante a tratti e che l'uscita venga campionata negli stessi istanti kT in cui l'ingresso varia



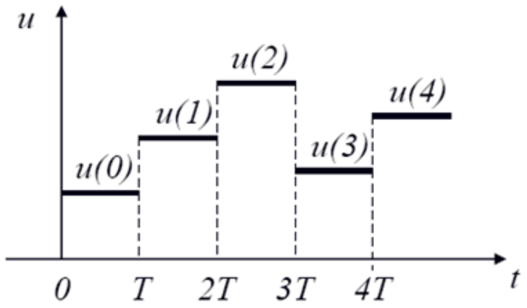
$$\begin{aligned} x(k+1) &= a_d x(k)+b_d u(k) \\ y(k) &= c_d x(k)+d_d u(k) \end{aligned}$$

- I valori di a_d, b_d, c_d e d_d, dipendono da quelli del sistema continuo (ma ovviamente <u>non sono gli stessi</u>) in base alla soluzione della corrispondente equazione differenziale, calcolata nel periodo T.

Modellazione di sistemi a tempo discreto - 2

- Nel caso **MIMO**:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \\ y(k) = C_d x(k) + D_d u(k) \end{cases}$$

Modellazione di sistemi a tempo discreto - 3

- Esistono anche sistemi discreti, generalmente di natura più astratta, per i quali **NON esiste** un corrispondente sistema a tempo continuo o **NON è utile** modellarlo
- **Es**. Variazione annuale della popolazione studentesca all'anno k:
  - $x_1(k)$, $x_2(k)$, $x_3(k)$: iscritti al primo, secondo, terzo anno
  - $u(k)$, $y(k)$: matricole e laureati
  - p_i, r_i: % di ammessi/non ammessi all'anno successivo

$$\begin{cases} x_1(k+1) = r_1 x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = p_1 x_1(k) + r_2 x_2(k) \\ x_3(k+1) = p_2 x_2(k) + r_3 x_3(k) \\ y(k) = p_3 x_3(k) \end{cases}$$

Modellazione di sistemi a tempo discreto - 4

- **Es**. Variazione annuale della popolazione studentesca all'anno k, modello matriciale

$$\begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + B_D u(k) \\ y(k) = C_d x(k) + D_d u(k) \end{cases}$$

$$A_d = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ p_1 & r_2 & 0 \\ 0 & p_2 & r_3 \end{bmatrix} \qquad B_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix} \qquad D_d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Modellazione di sistemi discreti a stati finiti

- Le variabili di un sistema discreto, ottenuto per campionamento di un sistema continuo tramite calcolatore digitale, diventano a **valori finiti** se memorizzati tramite stringhe di bit (es: 8 bit ➔ 2^8 valori = 256)
- Per tali sistemi è comunque conveniente per fini di calcolo mantenere la rappresentazione matriciale
- Altri tipi sistemi discreti a stati finiti, generalmente ottenuti tramite modelli logici, richiedono altre tipologie di rappresentazione, come **grafi o tabelle di transizione**
- **Es.** Logica di funzionamento di un distributore di *energy drink:* il distributore accetta monete da 1 e 0,5 euro, la bibita costa 2,50 euro ed il resto erogabile è 0,5 euro.

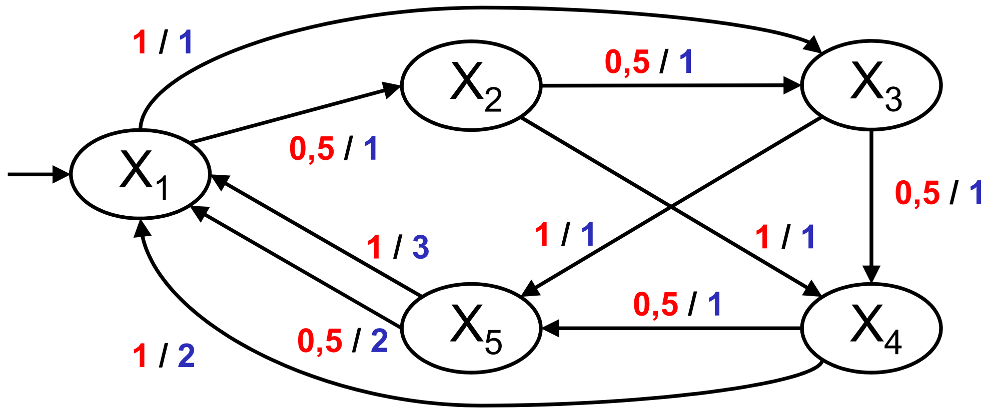
Modellazione di sistemi discreti a stati finiti - 1

- **Es.** Logica di funzionamento di un distributore di *energy drink*: ingressi e uscite:

U = {0,5; 1}, ***Y*** = {1; 2; 3}

(1: richiede altre monete, 2: eroga bibita, 3: eroga bibita e resto)

X = vedi grafo delle transizioni



Modellazione di sistemi discreti a stati finiti - 2

- **Es.** Logica di funzionamento di un distributore di *energy drink*: tabelle di transizioni ed uscite

STATO	U = 0,5	U = 1
X_1	X_2	X_3
X_2	X_3	X_4
X_3	X_4	X_5
X_4	X_5	X_1
X_5	X_1	X_1

STATO	U = 0,5	U = 1
X_1	1	1
X_2	1	1
X_3	1	1
X_4	1	2
X_5	2	3

$x(k+1) = f(x(k),u(k))$ $y(k) = g(x(k),u(k))$

ELEMENTI DI TEORIA DEI SISTEMI
- Definizioni
- Modelli di sistemi ingegneristici

FINE