



Fondamenti di Automatica

Progetto di controllo e reti correttrici

Prof. Marcello Bonfè

Dipartimento di Ingegneria - Università di Ferrara

Tel. +39 0532 974839

E-mail: marcello.bonfe@unife.it



Università
degli Studi
di Ferrara



Progetto di controllo e reti correttrici SPECIFICHE DI PROGETTO



Requisiti per il sistema controllato

- **Stabilità ad anello chiuso:** primo e irrinunciabile obiettivo!
- **Linee guida** per il progetto orientato alla stabilità:
 - **Luogo delle radici:** fornisce indicazioni sulla tendenza all'instabilità del sistema chiuso in retroazione
 - **Criterio di Routh:** strumento ausiliario al luogo delle radici per trovare i valori di uno o più parametri compatibili con la stabilità ad anello chiuso
 - **Criterio di Nyquist e margini di stabilità/ampiezza:** fornisce indicazioni sulla **robustezza** della condizione di stabilità, rispetto all'incertezza del modello del sistema e/o dei suoi parametri

slide 3

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttive



Requisiti per il sistema controllato

- **Prestazioni:**
 - **Precisione statica:** errore a regime rispetto al riferimento e/orispetto ai disturbi
 - **Precisione dinamica:**
 - Specifiche nel dominio del tempo: tempo di assestamento e massima sovraelongazione
 - Specifiche nel dominio della frequenza: banda passante e/o pulsazione di risonanza, picco di risonanza

slide 4

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttive



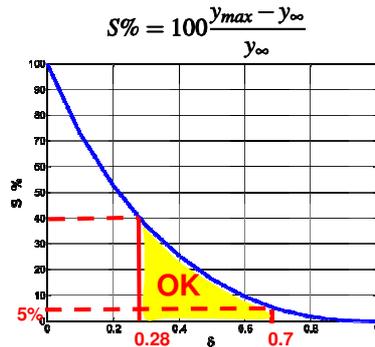
Requisiti per il sistema controllato

► **NOTA:** le specifiche dinamiche sono correlate a parametri della FdT ad anello chiuso nelle ipotesi di poli dominanti reali (costante di tempo τ) o complessi (δ e/o ω_n)

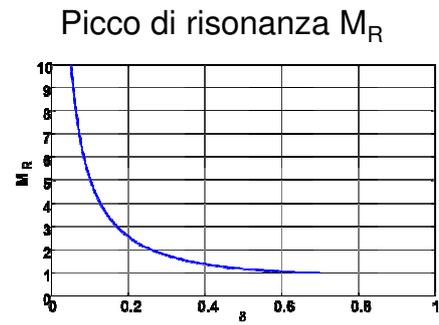
$$T_a = 3\tau$$

$$T_a = \frac{3}{\delta\omega_n} \quad \text{SE } 0 < \delta < 0.7$$

$$T_a = \frac{4.5\delta}{\omega_n} \quad \text{SE } \delta \geq 0.7$$



v. slide 56 in FdA-2.2

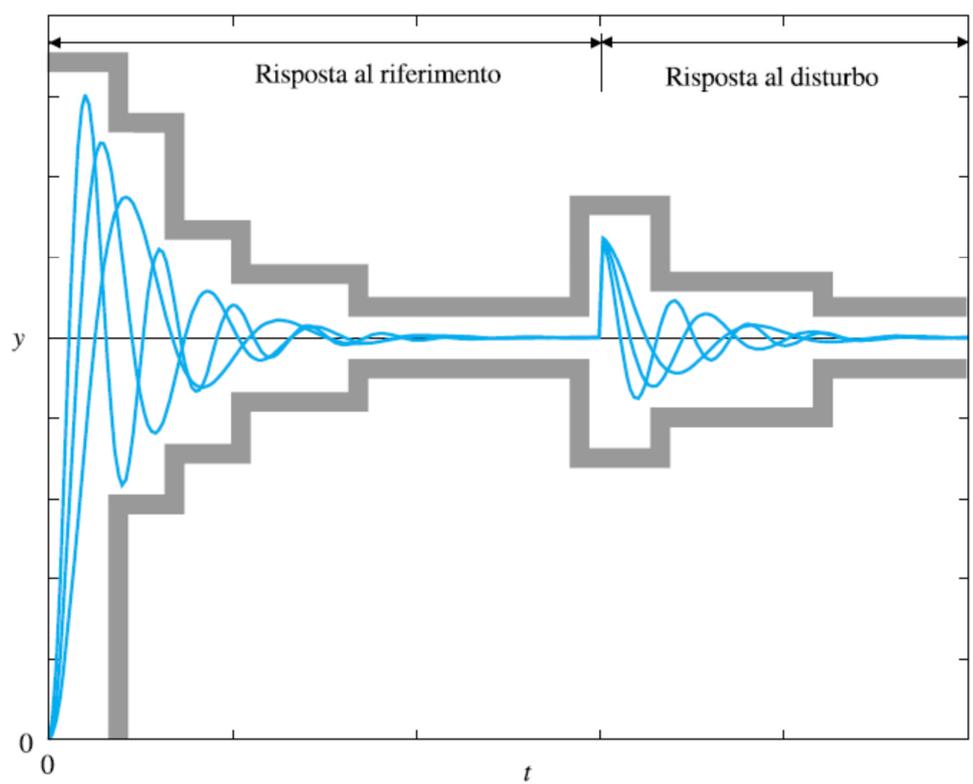


v. slide 50 in FdA-2.3

slide 5



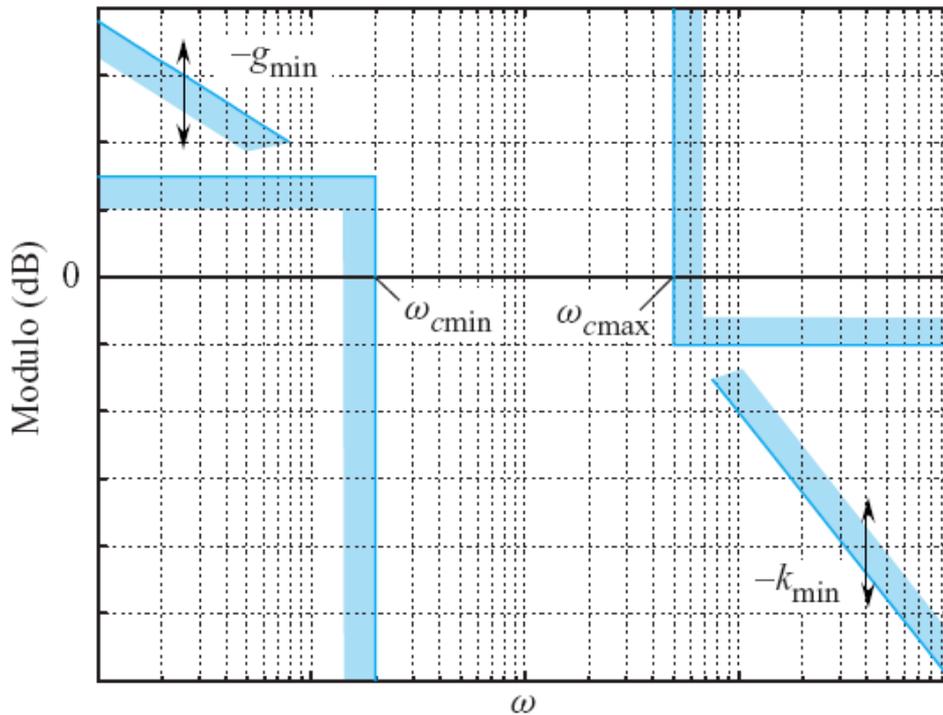
Specifiche nel dominio del tempo



slide 6



Specifiche nel dominio della frequenza



slide 7

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Specifiche nel dominio della frequenza - 1

➔ **NOTA:** Il diagramma precedente indica un esempio di vincoli di progetto imposti sui grafici di Bode per la FdT ad anello aperto:

- **Pendenza iniziale** (i.e. per $\omega \rightarrow 0$): imposta dalle specifiche su errore a regime per ingressi a gradino o rampa (i.e. *tipo del sistema* o molteplicità del polo in 0)
- **Pulsazione di incrocio ω_c** : tipicamente legata alla banda passante ω_b ad anello chiuso, secondo la relazione

$$\omega_c \leq \omega_b \leq 2 * \omega_c$$

slide 8

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Specifiche nel dominio della frequenza - 2

- **NOTA:** in questo contesto la banda passante è ancora una specifica dinamica, legata al tempo di assestamento. Infatti, per una FdT del **primo ordine**:

$$\omega_b = 1/T \rightarrow T_a = 3T$$

Per una FdT del **secondo ordine**, con δ “accettabile”:

$$\omega_b \text{ “vicina” a } \omega_n$$

$$\rightarrow T_a \text{ sempre funzione di } 1/\omega_n$$

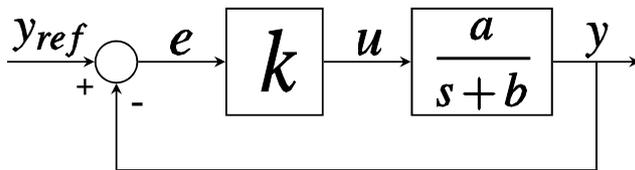
In pratica, **umentare la banda passante** ad anello chiuso significa sempre **diminuire il tempo di assestamento!**

Specifiche nel dominio della frequenza - 3

- **Margine di fase M_F e/o margine di ampiezza M_A :** altre specifiche determinate dai diagrammi di Bode (o di Nyquist...) della FdT ad anello aperto
- Oltre alla robustezza della stabilità, M_F influenza anche le caratteristiche dei poli dominanti. È difficile dimostrare relazioni esatte, ma si possono dare i seguenti risultati:
- Se $M_F \geq 90^\circ$, il sistema ad anello chiuso ha polo dominante reale e banda passante $\omega_b \approx \omega_c$
 - Se $60^\circ \leq M_F < 90^\circ$, il sistema ad anello chiuso ha poli dominanti complessi
 - Se $M_F < 60^\circ$, il sistema ad anello chiuso ha poli dominanti complessi ed in più $\delta \approx M_F/100$

Specifiche e progetto: controllo proporzionale

- ➔ Un semplice controllo proporzionale non permette di rispettare **TUTTE** le specifiche
- ➔ **Esempio:** sistema da controllare del primo ordine



$$G_{cl}(s) = \frac{ka}{s + \underbrace{b + ka}_{\text{nuovo polo}}}$$

al crescere di k:

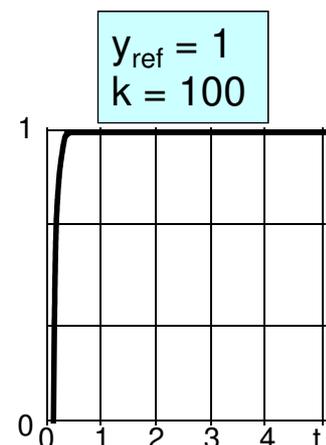
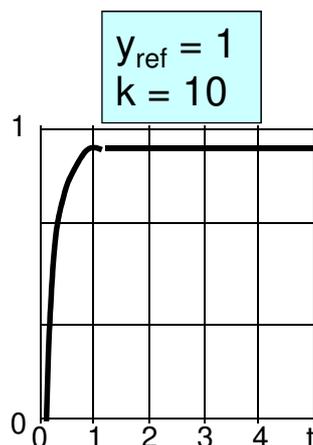
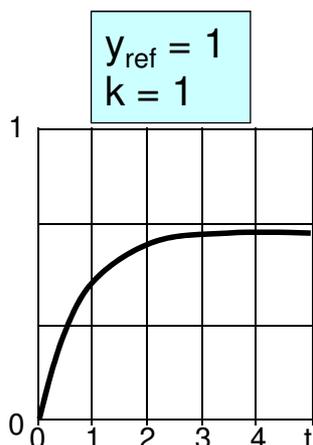
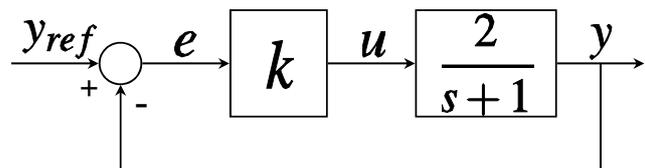
- **il guadagno statico tende ad 1**
- **il polo (reale) si sposta a sinistra**

nuovo polo

Specifiche e progetto: controllo proporzionale - 1

- ➔ **Esempio:** sistema del primo ordine (continuo)

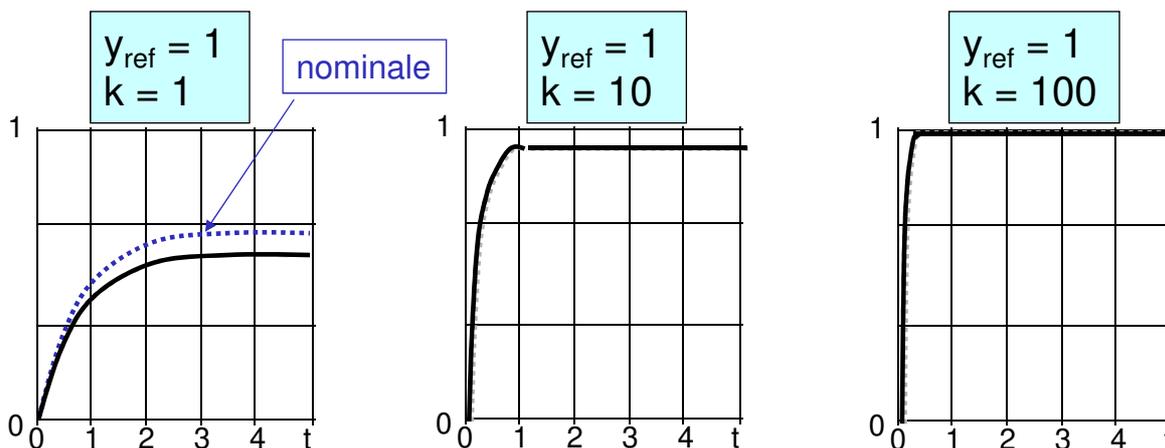
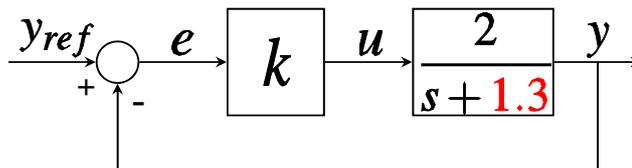
Condizioni nominali:



Specifiche e progetto: controllo proporzionale - 2

► **Esempio:** sistema del primo ordine (continuo)

Condizioni perturbate:



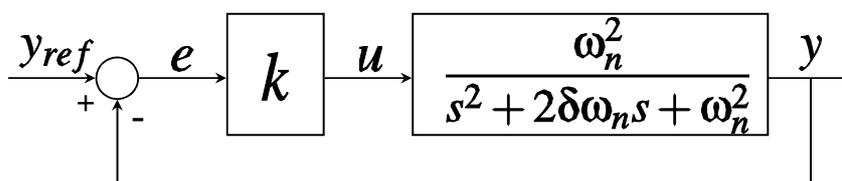
slide 13

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttici



Specifiche e progetto: controllo proporzionale - 3

► **Esempio:** sistema del secondo ordine



$$G_{cl}(s) = \frac{k \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}}{1 + k \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 + k\omega_n^2}$$

slide 14

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttici



Specifiche e progetto: controllo proporzionale - 4

► **Esempio:** sistema del secondo ordine (continuo)

$$G_{cl}(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + (1+k)\omega_n^2} = \frac{\frac{k}{(1+k)}\bar{\omega}_n^2}{s^2 + 2\bar{\delta}\bar{\omega}_n s + \bar{\omega}_n^2}$$

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{\sqrt{1+k}}$$

$$\bar{\omega}_n = \omega_n \sqrt{1+k}$$

al crescere di k:

- **il guadagno statico tende ad 1**
- $\bar{\delta} \rightarrow 0$ e $\bar{\omega}_n \rightarrow \infty$

slide 15

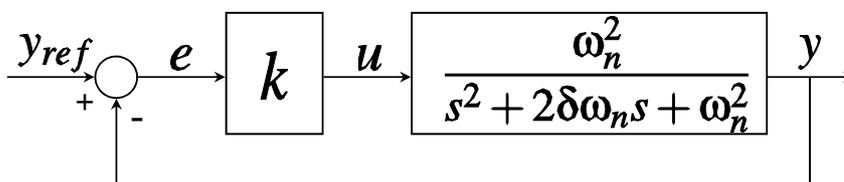
Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttici



Specifiche e progetto: controllo proporzionale - 5

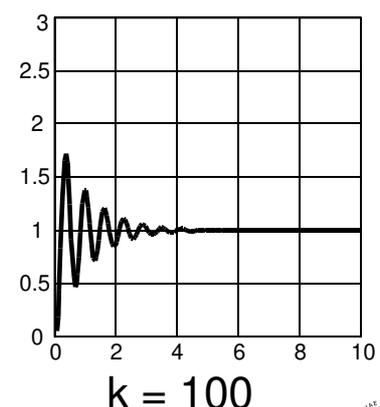
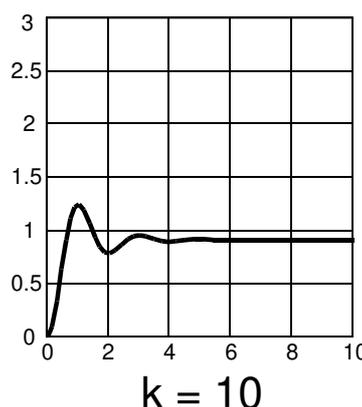
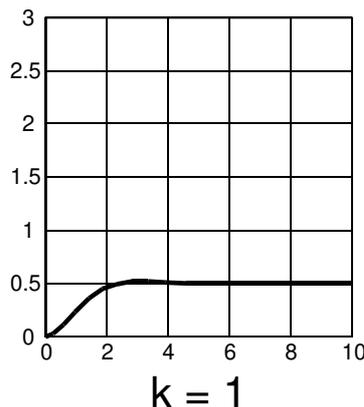
► **Esempio:** sistema del secondo ordine (continuo)

Condizioni nominali:



$$\delta = 1$$

$$\omega_n = 1$$



slide 16

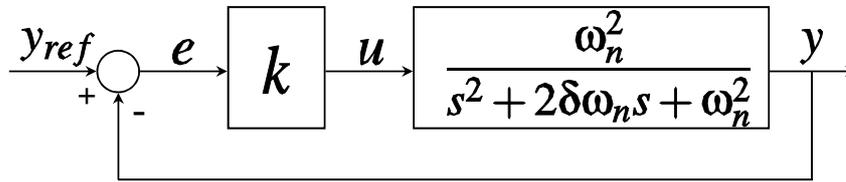
Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttici



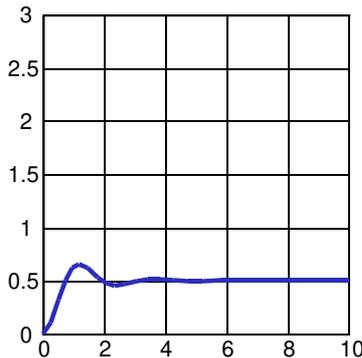
Specifiche e progetto: controllo proporzionale - 6

► **Esempio:** sistema del secondo ordine (continuo)

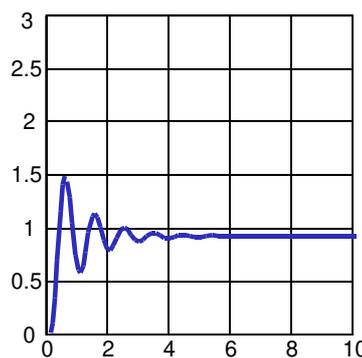
Condizioni perturbate:



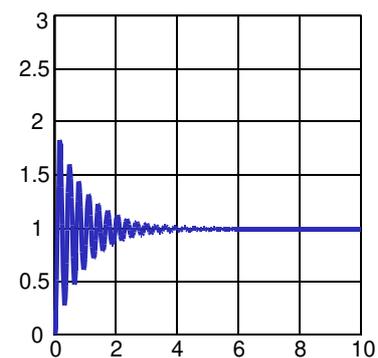
$$\delta = 1$$
$$\omega_n = 2$$



$k = 1$



$k = 10$



$k = 100$

slide 17

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttici



Specifiche e progetto: riassumendo

► Specifiche sull'errore a regime possono richiedere il progetto di un controllo proporzionale con guadagno **troppo elevato**, che può portare il sistema in retroazione ad essere **instabile!**

NOTA: In tutti gli esempi precedenti il sistema controllato è di tipo 0 (i.e. errore a regime $\neq 0$ in risposta al gradino), ma non può diventare instabile con solo controllo proporzionale (i.e. fase al più di -180° per il caso del secondo ordine!)

► Inserire un **polo nell'origine** nel controllore (se non presente nel sistema da controllare) annulla l'errore a regime, ma diminuisce di altri 90° la fase per $\omega \rightarrow \infty$: **stabilità a rischio!!!**

slide 18

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttici



Progetto di controllo e reti correttrici

RETI CORRETRICI

slide 19

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Reti correttrici

- Quando il controllo proporzionale, generalmente utile per soddisfare **solo** le specifiche di precisione statica (errore a regime), **non permette** di soddisfare le specifiche sulle prestazioni dinamiche o la stabilità, è necessario ricorrere a sistemi di controllo in grado di modificare la FdT d'anello ed i relativi diagrammi di Bode (o luogo delle radici!)
- Le strutture di controllo tipicamente impiegate allo scopo sono chiamate **reti correttrici**, in quanto analoghe a circuiti elettrici (aventi determinate FdT) storicamente utilizzati per realizzare *controllori analogici*:
 - Rete **ritardatrice** (*phase lag*)
 - Rete **anticipatrice** (*phase lead*)
 - Rete **a ritardo e anticipo** (*lead-lag*)

slide 20

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici

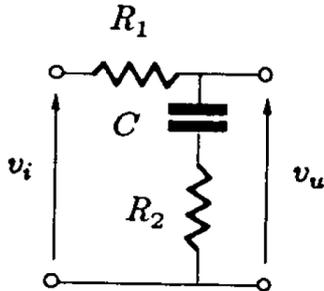


Rete ritardatrice (*phase lag*)

► Funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s}$$

► Possibile realizzazione:



$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{1 + R_2 C s}{1 + (R_1 + R_2) C s}$$

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1; \quad \tau = (R_1 + R_2) C$$

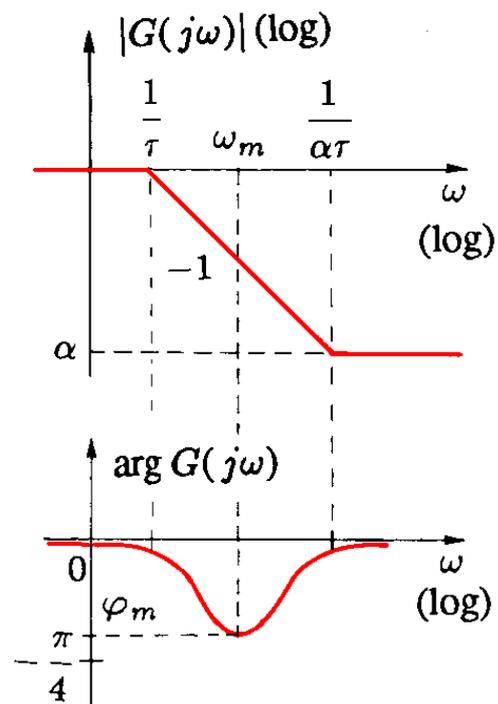
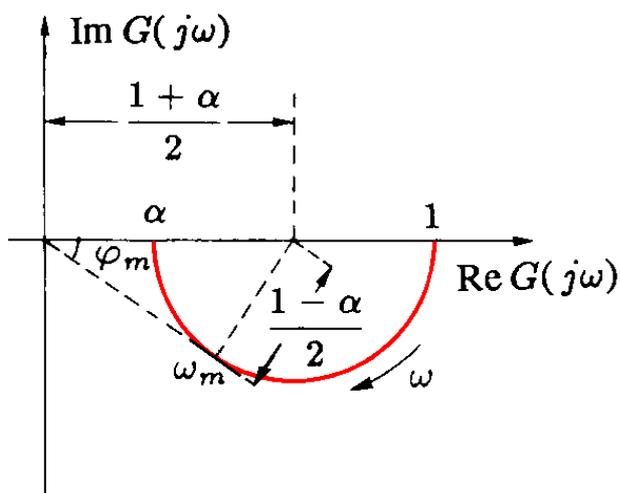
slide 21

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttici



Rete ritardatrice (*phase lag*) - 1

► Diagrammi di Nyquist e Bode:



slide 22

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttici



Rete ritardatrice (*phase lag*) - 1a

- ➔ **NOTA 1:** il diagramma di Bode mostrato nella slide precedente è l'approssimazione asintotica del diagramma reale. In quest'ultimo, il modulo di G è sempre strettamente < 1 .
- ➔ **NOTA 2:** analogamente, la fase è sempre strettamente negativa, il che significa che la rete ritardatrice introduce un ritardo di fase per ogni pulsazione ω , tra 0 e ∞

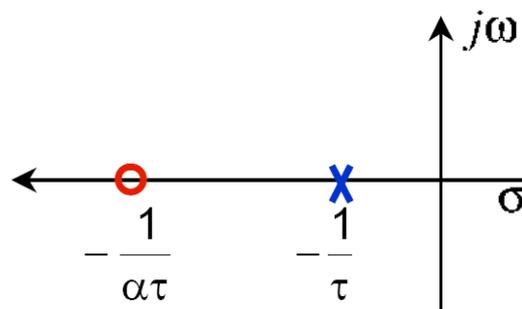
slide 23

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttive



Rete ritardatrice (*phase lag*) - 2

- ➔ Mappa poli/zeri: il **polo** è associato a pulsazione inferiore a quella dello **zero** (il polo *agisce prima* dello zero)



- ➔ Ritardo di fase: $\arg[G(j\omega)] = \arctan(\alpha\tau\omega) - \arctan(\tau\omega)$
– punto di massimo: $\left. \frac{d \arg[G(j\omega)]}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_m} = 0$

slide 24

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttive



Rete ritardatrice (*phase lag*) - 3

➔ Ritardo di fase massimo:

$$\left. \frac{d \arg[G(j\omega)]}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_m} = \frac{\alpha\tau}{1 + \alpha^2\tau^2\omega_m^2} - \frac{\tau}{1 + \tau^2\omega_m^2} = 0$$

➔ $\omega_m^2 = \frac{1}{\alpha\tau^2} \Rightarrow \omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$

➔ $\arg[G(j\omega_m)] = \varphi_m = -\arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$

➔ $\alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m}$

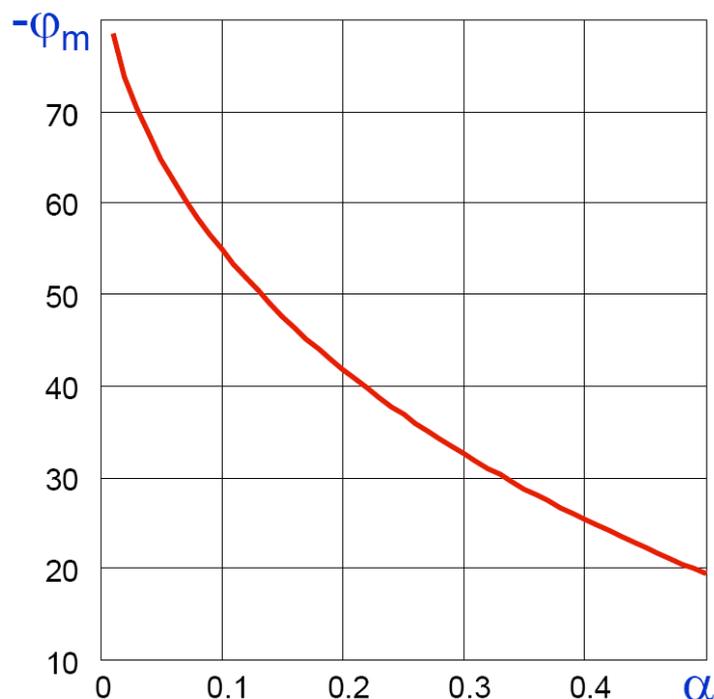
slide 25

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttive



Rete ritardatrice (*phase lag*) - 4

➔ Ritardo di fase in funzione di α :



slide 26

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttive



Rete ritardatrice (*phase lag*) - 5

- ▶ Caratteristiche per il progetto di controllo:
 - attenua il modulo per $\omega > 1/\tau$ (effetto utile)
 - riduce il margine di fase se vicino a $\omega = \omega_m$ (effetto negativo, collaterale)
- ▶ L'attenuazione di modulo si può sfruttare:
 1. Per poter aumentare il guadagno d'anello alle basse frequenze (e migliorare la precisione statica), senza modificare troppo il guadagno alle alte frequenze
 2. Per poter ridurre il guadagno alle alte frequenze ed abbassare quindi la pulsazione di incrocio ω_c , al fine di migliorare il margine di fase (riducendo però anche la banda passante)

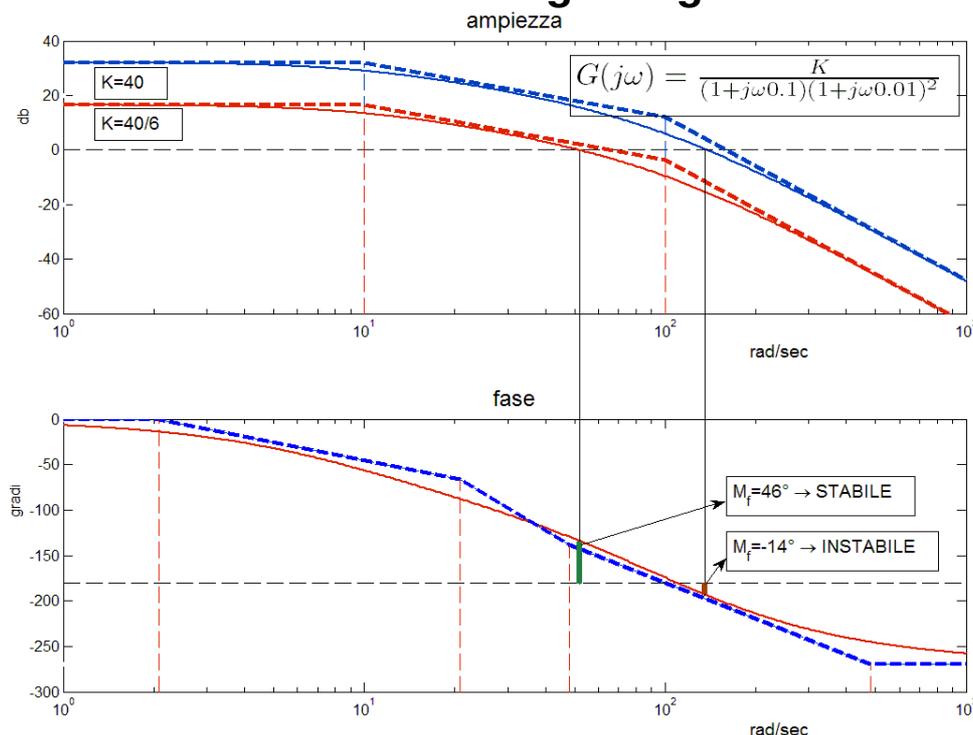
slide 27

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Rete ritardatrice: esempio di progetto

- ▶ Stabilizzazione con **riduzione guadagno**



slide 28

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Rete ritardatrice: esempio di progetto - 1

- Stabilizzazione con **riduzione guadagno**:
 - Riducendo il guadagno, tutto il diagramma di Bode delle ampiezze si sposta verso il basso
 - In questo modo la pulsazione ω_c , incrocio del diagramma di Bode con la retta a guadagno unitario, diminuisce
 - Pertanto, la nuova pulsazione di incrocio corrisponderà ad un valore di fase maggiore (*meno negativo*) e quindi ad un migliore margine di fase
 - Tuttavia, in tal modo si è diminuita non solo la banda passante, ma anche il guadagno statico, il che determina in generale peggiore precisione statica e minore prontezza di risposta del sistema controllato

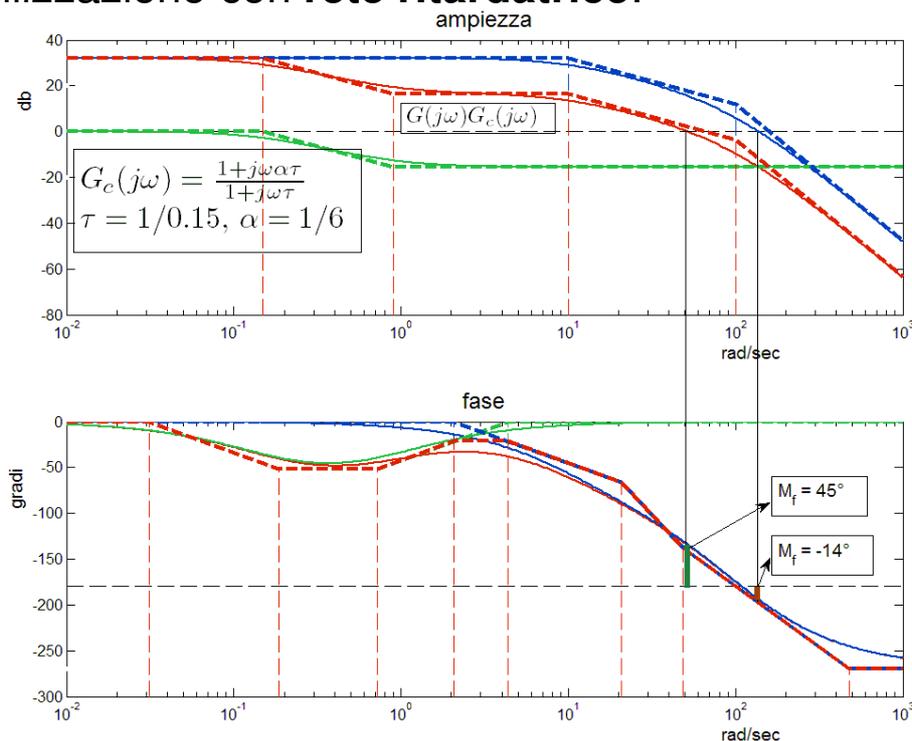
slide 29

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Rete ritardatrice: esempio di progetto - 2

- Stabilizzazione con **rete ritardatrice**:



slide 30

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Rete ritardatrice: esempio di progetto - 2a

- Tentativo di stabilizzazione con **rete ritardatrice**:
 - L'effetto di attenuazione alle alte frequenze aiuta a migliorare il margine di fase, per effetto analogo a quella della riduzione del guadagno statico
 - Il guadagno alle basse frequenze è però invariato, perciò i relativi effetti benefici sulla precisione statica sono preservati
 - La banda passante è però diminuita, pertanto anche la prontezza di risposta del sistema controllato
 - E' bene che il ritardo di fase introdotto dalla rete sia a pulsazioni inferiori di una decade rispetto a quella di incrocio ω_c del sistema da controllare, per evitare che esso influisca sul margine di fase $\rightarrow \alpha\tau < 10/\omega_c$

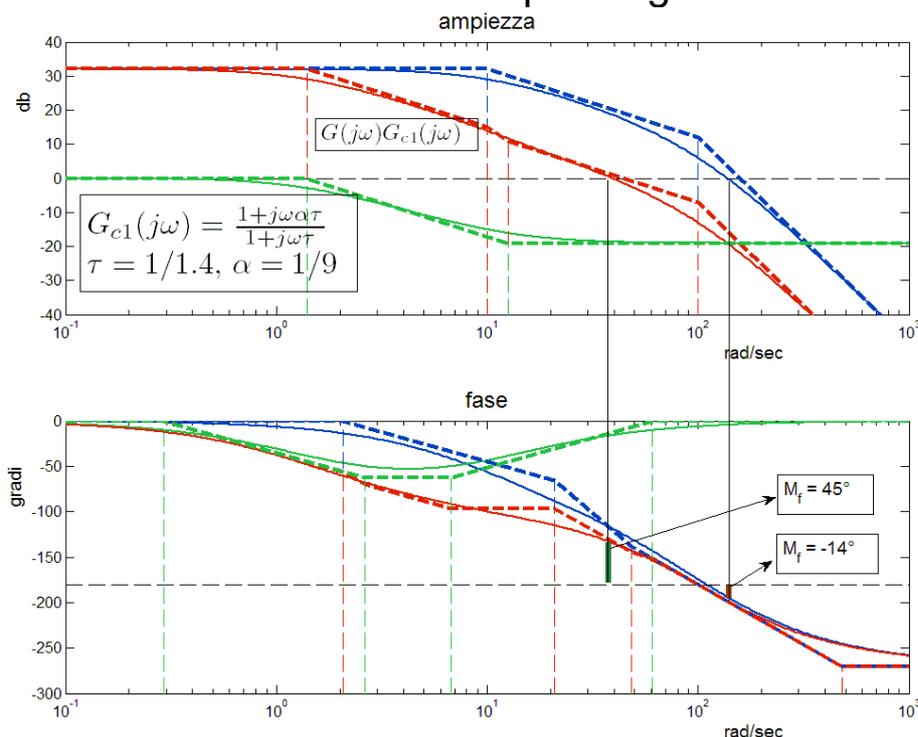
slide 31

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Rete ritardatrice: esempio di progetto - 3

- Modifica della **rete ritardatrice** per migliorare la banda:



slide 32

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Rete ritardatrice: esempio di progetto - 3a

- Modifica della **rete ritardatrice** per migliorare la banda:
 - Si è cercato di spostare l'inizio del benefico effetto di attenuazione della rete a pulsazioni più elevate
 - In tal modo la banda passante è aumentata, pertanto anche la prontezza di risposta del sistema controllato
 - E' necessario verificare che il ritardo di fase introdotto dalla rete non influisca sul margine di fase
 - Si tratta di un metodo di progetto per tentativi

slide 33

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Rete ritardatrice: procedura *empirica* di progetto

1. Si determina sul diagramma di Bode (fase) del sistema da controllare (non compensato) la pulsazione alla quale corrisponderebbe il margine di fase M_F desiderato
2. Si considera un ulteriore margine di sicurezza su M_F di 5° oppure si sceglie una pulsazione ω^* inferiore del 20% di quella ottenuta al passo 1
3. Si determina sul diagramma di Bode (ampiezza) del sistema non compensato l'attenuazione necessaria α affinché il modulo sia unitario a ω^*
4. Si ricava la costante di tempo τ del polo, ponendo:

$$\frac{1}{\alpha\tau} = \frac{\omega^*}{10}$$

Così si avranno sia polo che zero della rete ad una decade di distanza dalla *nuova* ω_c

5. Si **verifica** M_F e se sia possibile migliorare la banda

slide 34

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici

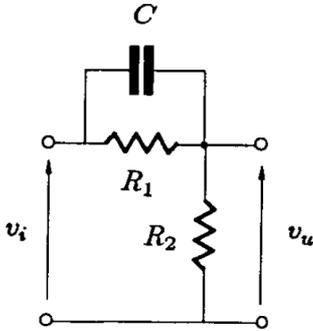


Rete anticipatrice (*phase lead*)

► Funzione di trasferimento:

$$G(s) = \alpha \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$$

► Possibile realizzazione:



$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{R_2(1 + R_1 C s)}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 C s}$$

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1; \quad \tau = R_1 C$$

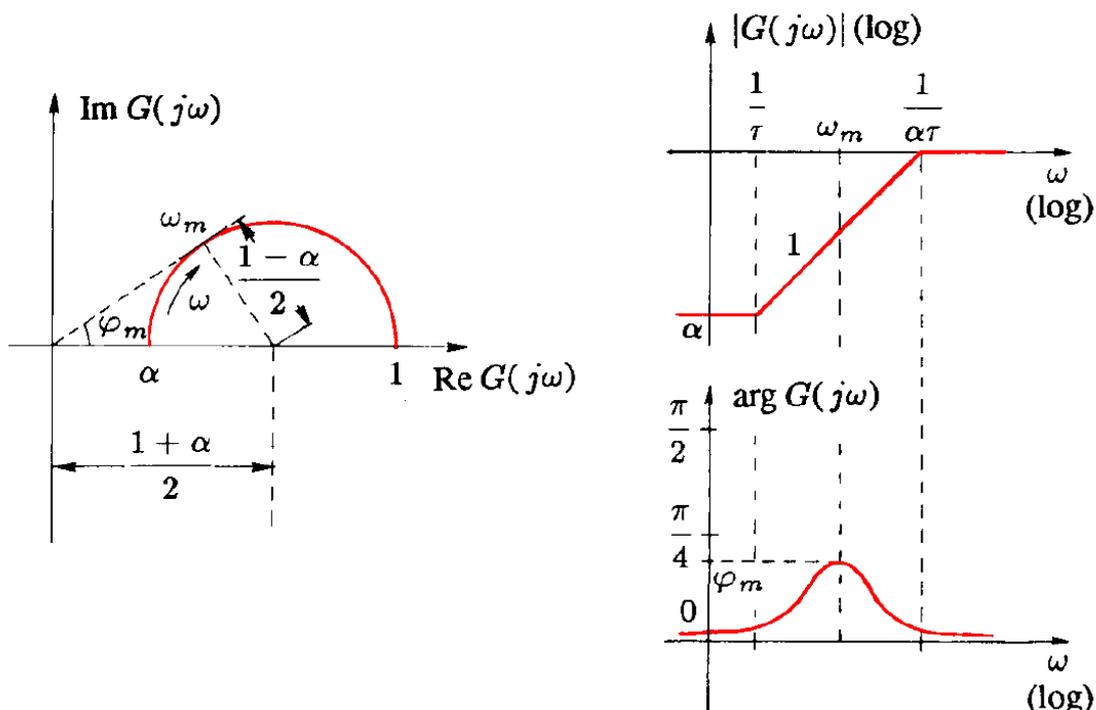
slide 35

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Rete anticipatrice (*phase lead*) - 1

► Diagrammi di Nyquist e Bode:



slide 36

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Rete anticipatrice (*phase lead*) - 1a

- ➔ **NOTA 1:** il diagramma di Bode mostrato nella slide precedente è l'approssimazione asintotica del diagramma reale. In quest'ultimo, il modulo di G è sempre strettamente < 1 .
- ➔ **NOTA 2:** analogamente, la fase è sempre strettamente positiva, il che significa che la rete anticipatrice introduce un anticipo di fase per ogni pulsazione ω , tra 0 e ∞

slide 37

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttive

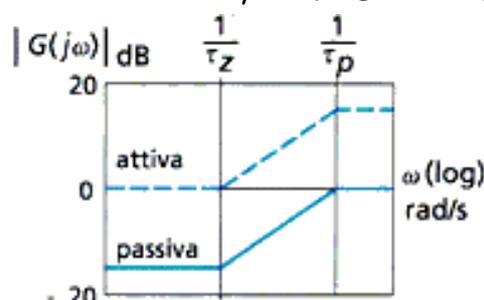


Rete anticipatrice (*phase lead*) - 1a

- ➔ Funzione di trasferimento alternativa (detta attiva), con guadagno statico unitario:

$$G(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$$

- ➔ L'effetto più utile della rete è l'anticipo di fase, perciò tale modifica non influenza molto il metodo di progetto
- ➔ Va considerato che tale versione ha **guadagno > 1** e fino al massimo $1/\alpha$ (il guadagno aumenta per $\omega > 1/\tau$)



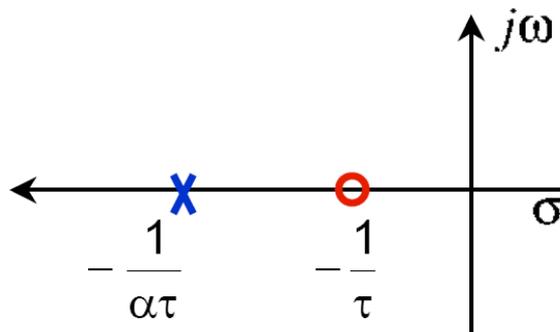
slide 38

Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttive



Rete anticipatrice (*phase lead*) - 2

- ➔ Mappa poli/zeri: il **polo** è associato a pulsazione superiore a quella dello **zero** (il polo *agisce dopo* lo zero)



- ➔ Anticipo di fase massimo:

$$\varphi_m = \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

$$\omega_m = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}}$$

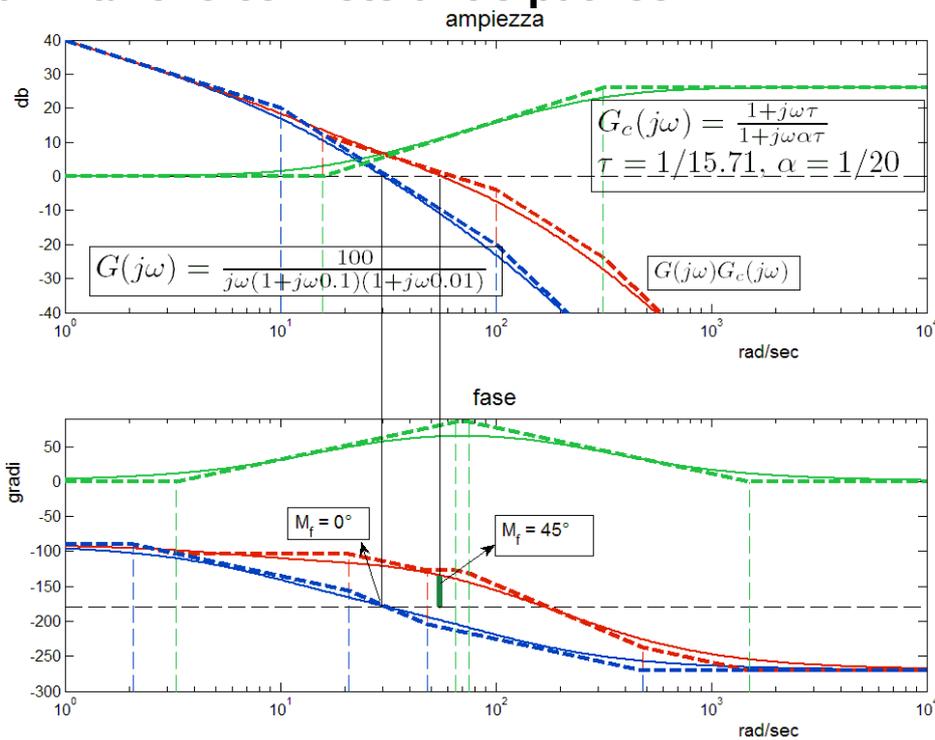
N.B.: media geometrica tra il polo e lo zero

Rete anticipatrice (*phase lead*) - 3

- ➔ Caratteristiche per il progetto di controllo:
 - migliora il margine di fase vicino a $\omega = \omega_m$ (effetto utile)
 - aumenta il guadagno per $\omega > 1/\tau$:
 - Può aumentare la banda passante (effetto utile)
 - Può peggiorare l'effetto di disturbi ad alta frequenza (effetto collaterale)

Rete anticipatrice: esempio di progetto

► Stabilizzazione con **rete anticipatrice**:



slide 41

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Rete anticipatrice: esempio di progetto - 1

► Stabilizzazione con **rete anticipatrice**:

- L'anticipo di fase introdotto dalla rete determina un aumento del margine di fase
- L'aumento del guadagno alle alte frequenze aumenta anche la pulsazione di incrocio ω_c
- Di conseguenza, migliora la banda passante e la prontezza di risposta del sistema

slide 42

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Rete anticipatrice: procedura *empirica* di progetto

1. Si determina sul diagramma di Bode (fase) del sistema da controllare (non compensato) l'attuale margine di fase M_f e la pulsazione di incrocio ω_c
2. Si determina l'anticipo di fase φ_m necessario per ottenere un margine di fase M_f^* desiderato più un ulteriore margine di sicurezza (es. 5°)
3. Si determina il parametro α della rete anticipatrice:

$$\varphi_m = \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{1 - \sin \varphi_m}{1 + \sin \varphi_m}$$

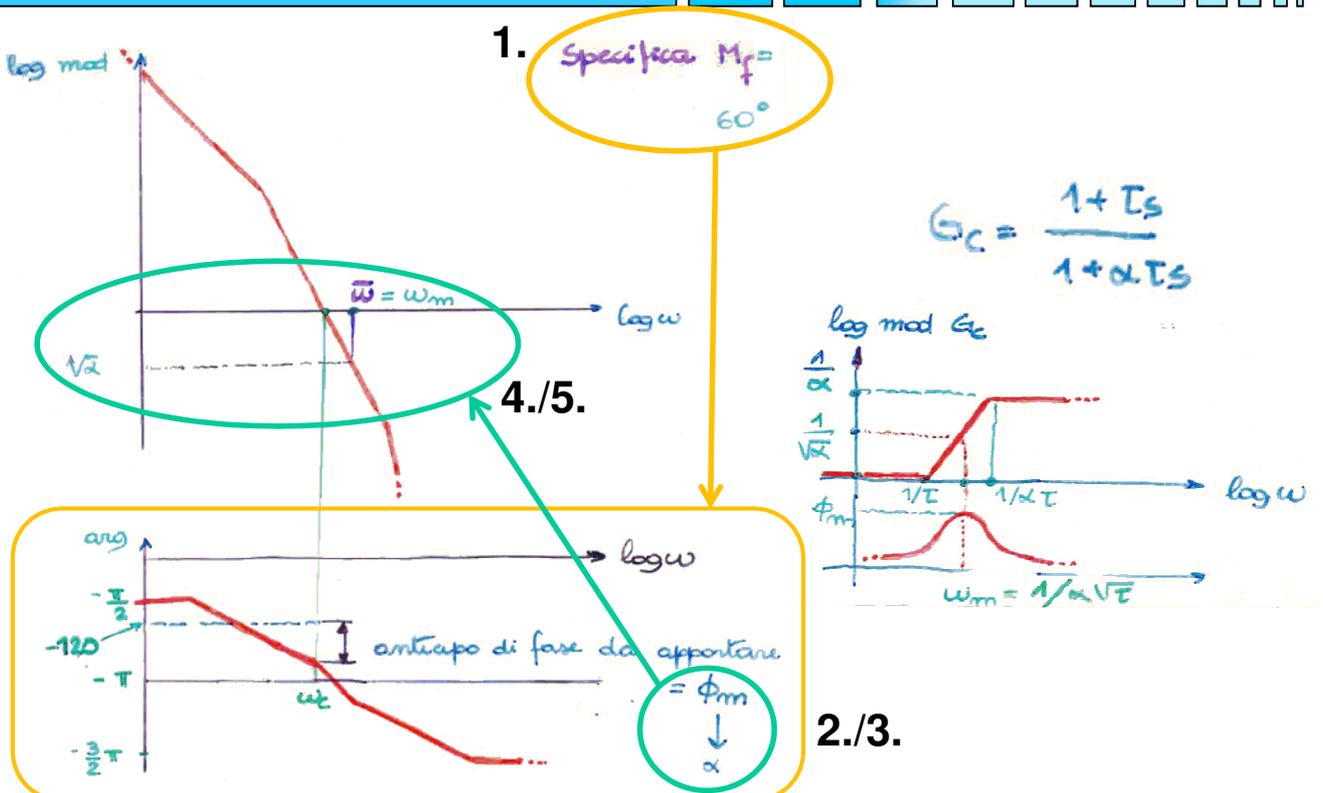
4. Si determina la pulsazione $\bar{\omega}$ a cui il modulo del sistema non compensato vale $-20 \log(1/\sqrt{\alpha})$
5. Si ricava la costante di tempo τ del polo da $\bar{\omega} = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$
6. **Verifica di M_f ...**

slide 43

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttive



Rete anticipatrice: procedura *empirica* di progetto



slide 44

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttive



Rete anticipatrice: progetto per cancellazione

- Il progetto della **rete anticipatrice** si semplifica, a scapito però della flessibilità della compensazione, nei casi in cui sia possibile posizionare lo zero della rete in corrispondenza di un polo reale del sistema non compensato ➔ **cancellazione polo/zero**
- Infatti, essendo il polo della rete più lontano dall'asse reale rispetto allo zero, ciò equivale ad allontanare dall'asse reale il polo proprio del sistema non compensato (con un rapporto da 1 a $1/\alpha$), il cui modo diventa quindi più veloce
- **N.B.:** nella pratica le cancellazioni polo/zero non sono mai perfette, per via di inevitabili incertezze parametriche ➔ non è possibile cancellare un polo a parte reale positiva con uno zero del controllore, oppure uno zero a parte reale positiva con un polo del controllore

slide 45

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttive



Rete anticipatrice: progetto per cancellazione - 1

- **Esempio:** sistema non compensato $G(s) = \frac{K}{s(1 + \tau s)}$

Con $\tau = 1$, il sistema in retroazione ha:

$$G_{cl}(s) = \frac{K}{\tau s^2 + s + K} = \frac{1}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

Supponendo come specifiche di progetto:

- Costante di velocità $K_v = 10 \Rightarrow K = 10$
- Picco di risonanza $M_r = 1.3$

Con tale valore di K si ha: $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{\tau}} = 3.16$ $\delta = \frac{1}{2\sqrt{K\tau}} = 0.16$

cui corrisponde un picco di risonanza $M_r = 3.2$

slide 46

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttive



Rete anticipatrice: progetto per cancellazione - 2

Per avere il picco di risonanza desiderato è necessario imporre un coefficiente di smorzamento $\delta' = 0.45$

Si può ottenere tale risultato con una rete anticipatrice che cancelli il polo del sistema non compensato:

$$G'(s) = G(s)G_c(s) = \frac{K(1 + \tau s)}{s(1 + \tau s)(1 + \alpha \tau s)}$$

Nella nuova FdT del sistema in retroazione si ha quindi:

$$\omega'_n = \sqrt{\frac{K}{\alpha \tau}} \quad \delta' = \frac{1}{2\sqrt{K\alpha\tau}}$$

Essendo $\tau = 1$ fissato dalla cancellazione, il valore di progetto per avere lo smorzamento richiesto è $\alpha = 0.125$

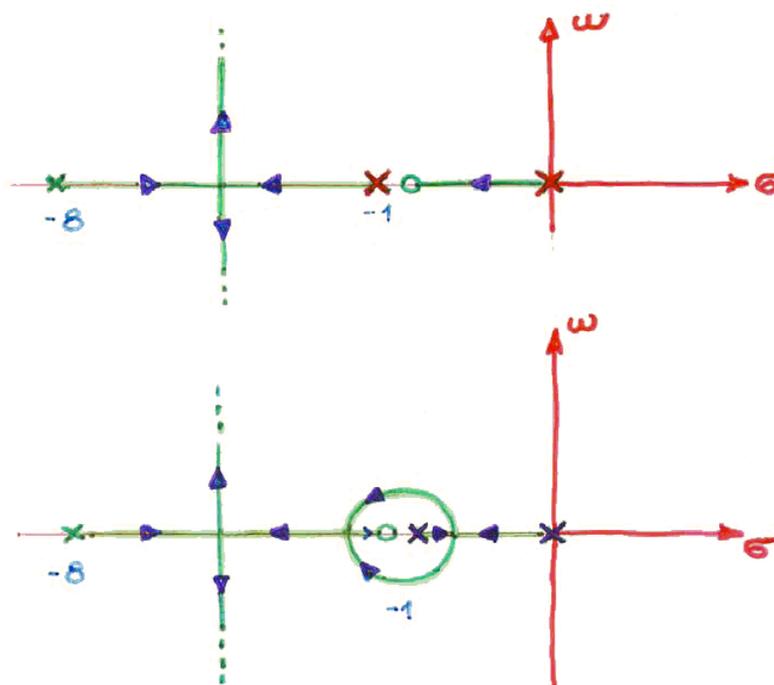
slide 47

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttive



Rete anticipatrice: progetto per cancellazione - 3

N.B.: effetti della non perfetta cancellazione polo/zero



slide 48

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttive

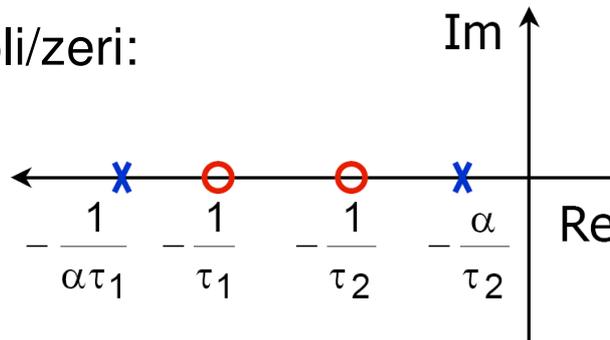


Rete a ritardo e anticipo (*lead-lag*)

► Funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_1 s)+\tau_{12} s} \\
 &= \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\tau_a s)(1+\tau_b s)} \\
 &= \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\alpha\tau_1 s)(1+\frac{\tau_2}{\alpha} s)}
 \end{aligned}$$

► Mappa poli/zeri:



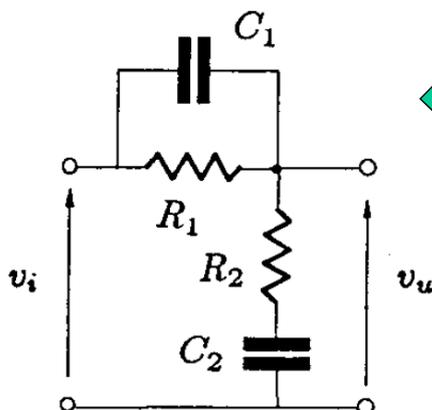
slide 49

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Rete a ritardo e anticipo (*lead-lag*) - 1

► Possibile realizzazione:



$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R_2 + \frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{(1/R_1) + C_1 s}} \\
 &= \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)+\tau_{12} s}
 \end{aligned}$$

con: $\tau_1 = R_1 C_1, \quad \tau_2 = R_2 C_2, \quad \tau_{12} = R_1 C_2$

oppure: $\tau_1 \tau_2 = \tau_a \tau_b, \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_{12} = \tau_a + \tau_b$

e con: $\tau_1 < \tau_2, \quad \tau_a < \tau_b, \quad \frac{\tau_a}{\tau_1} = \frac{\tau_2}{\tau_b} = \alpha < 1$

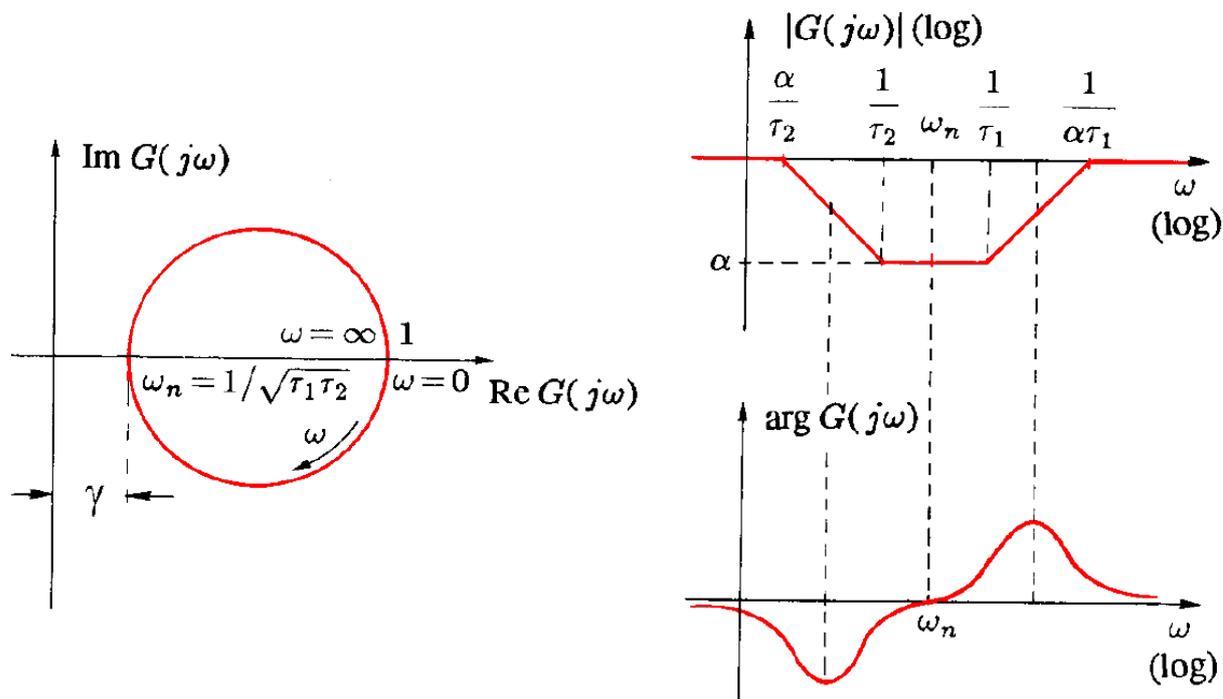
slide 50

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Rete a ritardo e anticipo (*lead-lag*) - 2

► Diagrammi di Nyquist e Bode:



slide 51

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Rete a ritardo e anticipo (*lead-lag*) - 4

► Caratteristiche per il progetto di controllo:

- consente di aumentare il guadagno statico senza pregiudicare la banda passante e il margine di fase (effetto utile)
- attenua il modulo a $\omega = \omega_n = 1/\sqrt{\tau_1\tau_2}$, ma senza introdurre né anticipo né ritardo di fase a tale pulsazione (effetto utile)

► In sostanza, elimina gli effetti collaterali unendo i benefici delle reti ritardatrice e anticipatrice

slide 52

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Rete a ritardo e anticipo: procedure di progetto

- Specifica sul **margin**e di fase M_F :
 - Si determina sui diagrammi di Bode del sistema non compensato la pulsazione ω_n alla quale la fase vale $-180^\circ + M_F$ e l'attenuazione α da introdurre per avere modulo 0 dB a ω_n
- Specifica sul **margin**e di ampiezza M_A :
 - Si determina sui diagrammi di Bode del sistema non compensato la pulsazione ω_n alla quale la fase vale -180° e l'attenuazione α da introdurre per avere il margin M_A voluto per l'ampiezza alla pulsazione ω_n

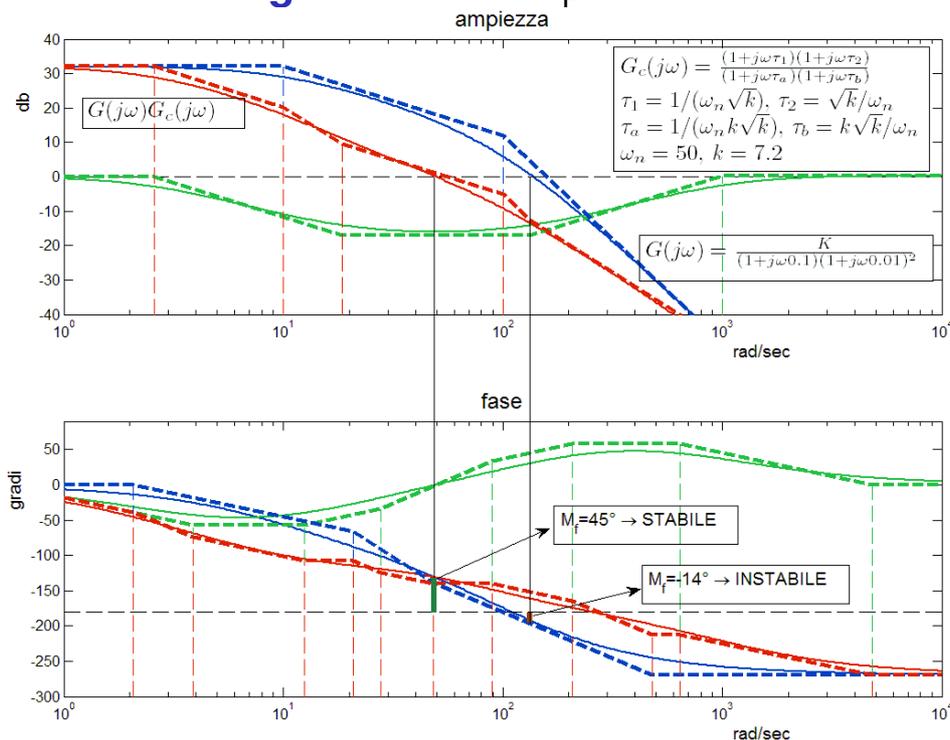
slide 53

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Rete a ritardo e anticipo: esempi di progetto

- Specifica sul **margin**e di fase M_F :



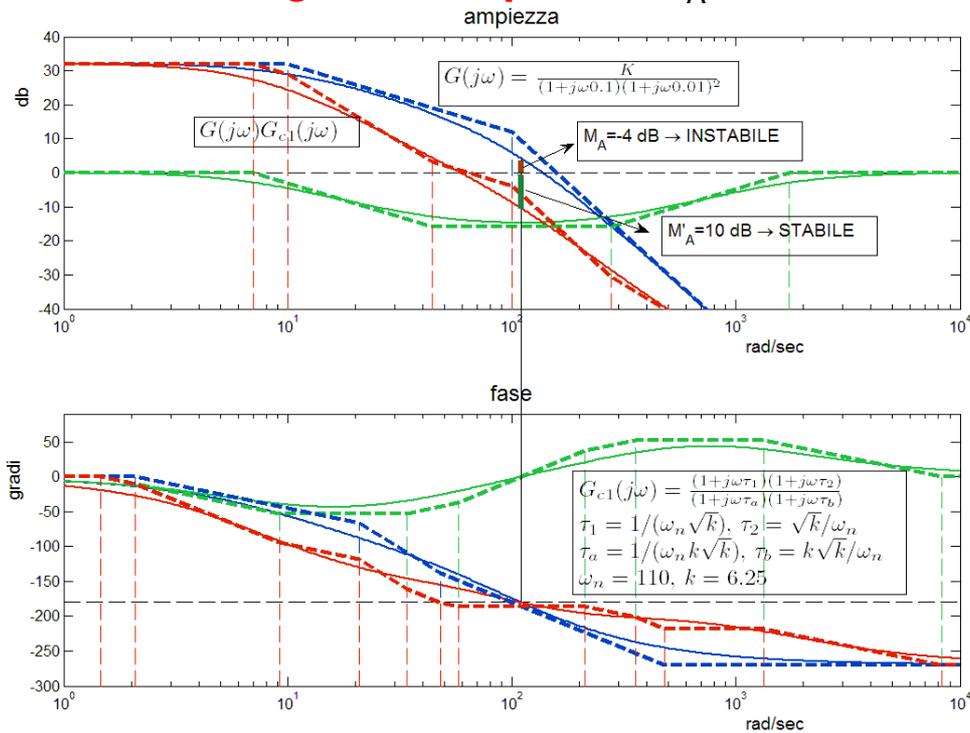
slide 54

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Rete a ritardo e anticipo: esempi di progetto - 1

► Specifica sul **margine di ampiezza M_A** :



slide 55

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Progetto di controllo e reti correttrici PROGETTO CON FORMULE DI INVERSIONE

slide 56

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Formule di inversione per reti correttrici

- ➔ Le procedure empiriche per la taratura delle reti **anticipatrice** e **ritardatrice** si semplificano ulteriormente, ricorrendo all'uso delle cosiddette **formule di inversione**
- ➔ Tali formule si ottengono appunto invertendo la funzione di risposta armonica della rete, per una certa ω^* , rispetto ai parametri τ_1 e τ_2 di polo/zero:

$$F(\tau_1, \tau_2) = M^* e^{j\varphi^*} = \frac{1 + j\tau_1\omega^*}{1 + j\tau_2\omega^*}$$

Rete ritardatrice se $\tau_1 < \tau_2$ (i.e. $\alpha = \tau_1 / \tau_2 < 1$)
Rete anticipatrice se $\tau_1 > \tau_2$ (i.e. $\alpha = \tau_2 / \tau_1 < 1$)

Formule di inversione per reti correttrici - 1

- ➔ Invertendo la formula precedente si ottengono quindi le **formule di inversione per M^* e φ^***

$$\tau_1 = \frac{M^* - \cos \varphi^*}{\omega^* \sin \varphi^*}$$
$$\tau_2 = \frac{\cos \varphi^* - \frac{1}{M^*}}{\omega^* \sin \varphi^*}$$

Formule di inversione per reti correttrici - 2

Per una rete ritardatrice, il progetto con le *formule di inversione* richiede di:

1. Determinare l'attenuazione necessaria M^* per la FdT $G(s)$, al fine di ottenere il margine di fase M_F voluto alla pulsazione opportuna ω^* :

$$M^* = 1 / |G(j\omega^*)|$$

2. Determinare la conseguente variazione (ritardo) di fase φ^* introdotta dalla rete e compatibile con il margine M_F

$$\varphi^* = -180^\circ + M_F - \arg[G(j\omega^*)]$$

Formule di inversione per reti correttrici - 3

► Condizioni di realizzabilità:

– Affinchè la rete sia effettivamente di tipo ritardatrice, occorre che:

$$M^* < 1 \quad -90^\circ < \varphi^* < 0$$

– Inoltre, la correzione progettata è realizzabile se $0 < \alpha < 1$, il che implica:

$$M^* < \cos \varphi^*$$

Formule di inversione per reti correttrici - 3a

- Esempio (rete ritardatrice): si consideri la FdT

$$G(s) = \frac{20}{(1 + \frac{s}{6})(1 + \frac{s}{3})(1 + \frac{s}{2})}$$

e si fissi il **margin di fase desiderato in 45°**

- Il relativo diagramma di Bode evidenzia che ponendo tale FdT in retroazione unitaria, la FdT ad **anello chiuso** risulterebbe **instabile**, con:
- $M_A = -6 \text{ dB} < 1$
 - $M_F = -19^\circ < 0$

Formule di inversione per reti correttrici - 3b

- Esempio (rete ritardatrice):

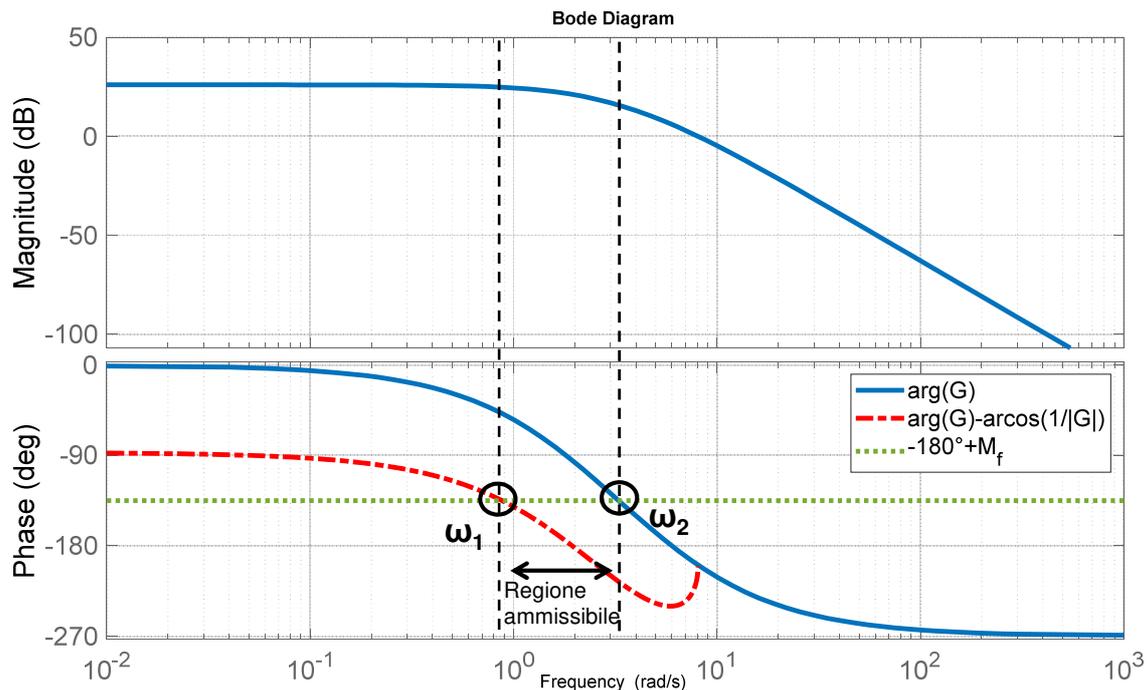
Allo scopo di facilitare l'identificazione di valori M^*/φ^* compatibili con una rete ritardatrice realizzabile, è d'aiuto sovrapporre al diagramma di Bode della fase il grafico della funzione:

$$R(\omega) = \arg[G(j\omega)] - \arccos(1/|G(j\omega)|)$$

Tale grafico (insieme ad una linea orizzontale in $-180 + M_F$) aiuta a definire l'intervallo $[\omega_1, \omega_2]$ entro il quale si può fissare ω^* compatibilmente con le condizioni di realizzabilità:

- ω_1 : pulsazione minima tale che $R(\omega) < -180 + M_F$
- ω_2 : pulsazione massima t.c. $\arg[G(j\omega)] > -180 + M_F$

Formule di inversione per reti correttrici - 3c



slide 63

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Formule di inversione per reti correttrici - 3d

➔ Esempio (rete ritardatrice): dai diagrammi di Bode (verificare in Matlab) si trova: $\omega_1 = 0,88$ e $\omega_2 = 3,23$

➔ una possibile scelta per ω^* è 2 rad/s, con la quale

$$\mathbf{M}^* = 1 / |G(j\omega^*)| = -20,9 \text{ dB} = 0,09$$

$$\boldsymbol{\varphi}^* = -180^\circ + \mathbf{M}_F - \arg[G(j\omega^*)] = -38^\circ$$

Applicando le formule di inversione si ottiene:



$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0,5568 \\ \tau_2 &= 8,368 \end{aligned}$$

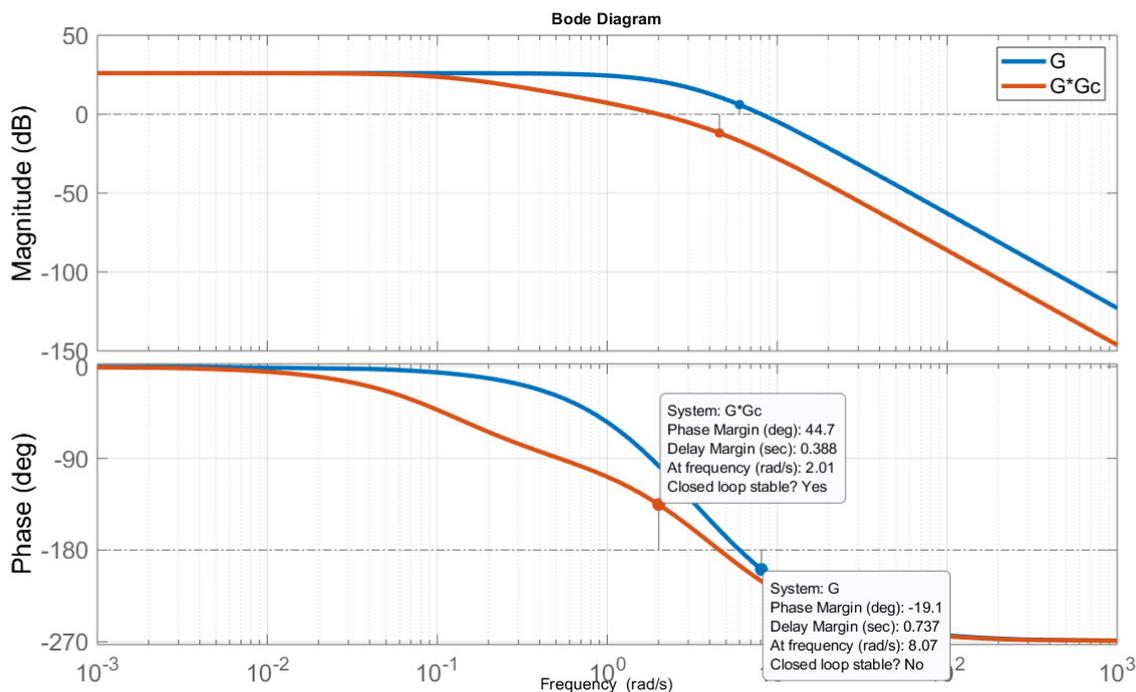
NOTA: in effetti $\tau_1 < \tau_2$, quindi la rete è ritardatrice con costante di tempo del polo $\tau = \tau_2$ e costante di tempo dello zero $\alpha\tau = \tau_1$ (i.e. $\alpha = 0,0677$)

slide 64

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Formule di inversione per reti correttrici - 3e



slide 65

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Formule di inversione per reti correttrici - 4

Per una rete anticipatrice, il progetto con le *formule di inversione* richiede di:

1. Determinare l'anticipo di fase necessario φ^* per la FdT $G(s)$, al fine di ottenere il margine di fase M_F voluto alla pulsazione opportuna ω^* :

$$\varphi^* = -180^\circ + M_F - \arg[G(j\omega^*)]$$

2. Determinare la conseguente amplificazione M^* introdotta dalla rete, compatibile con M_F

$$M^* = 1 / |G(j\omega^*)|$$

slide 66

Fondamenti di Automatica – 3.1 Progetto / Reti correttrici



Formule di inversione per reti correttrici - 5

► Condizioni di realizzabilità:

- Affinchè la rete sia effettivamente di tipo anticipatrice, occorre che:

$$M^* > 1 \quad 0 < \varphi^* < 90^\circ$$

- Inoltre, la correzione progettata è realizzabile se $0 < \alpha < 1$, il che implica:

$$(1 / M^*) < \cos \varphi^*$$

Formule di inversione per reti correttrici - 5a

► Esempio (rete anticipatrice): si consideri la FdT

$$G(s) = \frac{200}{s(1 + \frac{s}{5})(1 + \frac{s}{150})}$$

e si fissi il **margin di fase desiderato in 45°**

- Il relativo diagramma di Bode evidenzia che ponendo tale FdT in retroazione unitaria, la FdT ad **anello chiuso** risulterebbe **instabile**, con:

- $M_A = -2,21 \text{ dB} < 1$
- $M_F = -2,58^\circ < 0$

Formule di inversione per reti correttrici - 5b

► Esempio (rete anticipatrice):

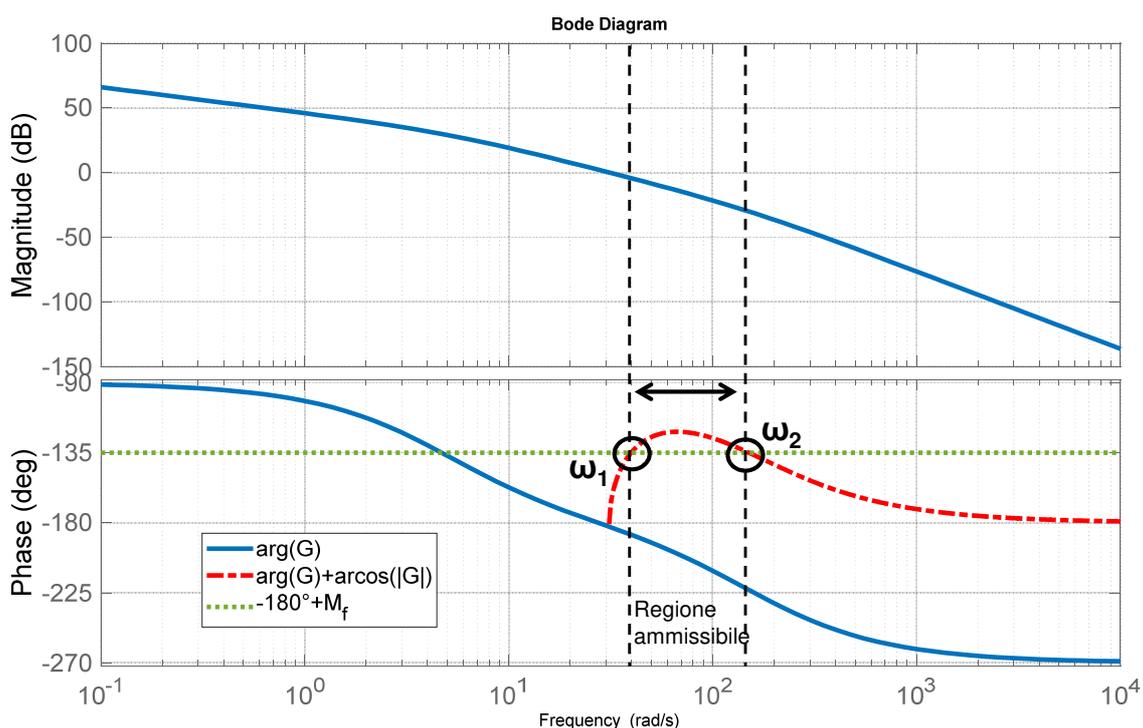
Allo scopo di facilitare l'identificazione di valori M^*/φ^* compatibili con una rete ritardatrice realizzabile, è d'aiuto sovrapporre al diagramma di Bode della fase il grafico della funzione:

$$R(\omega) = \arg[G(j\omega)] + \arccos(|G(j\omega)|)$$

Tale grafico (insieme ad una linea orizzontale in $-180 + M_F$) aiuta a definire l'intervallo $[\omega_1, \omega_2]$ entro il quale si può fissare ω^* compatibilmente con le condizioni di realizzabilità:

- ω_1 : pulsazione minima tale che $R(\omega) > -180 + M_F$
- ω_2 : pulsazione massima t.c. $R(\omega) > -180 + M_F$

Formule di inversione per reti correttrici - 5c



Formule di inversione per reti correttrici - 5d

► Esempio (rete anticipatrice): dai diagrammi di Bode (verificare in Matlab) si trova: $\omega_1 = 40$ e $\omega_2 = 140$

➔ una possibile scelta per ω^* è 60 rad/s, con la quale

$$\mathbf{M}^* = 1 / |G(j\omega^*)| = 12 \text{ dB} = 4$$

$$\boldsymbol{\varphi}^* = -180^\circ + \mathbf{M}_F - \arg[G(j\omega^*)] = 62^\circ$$

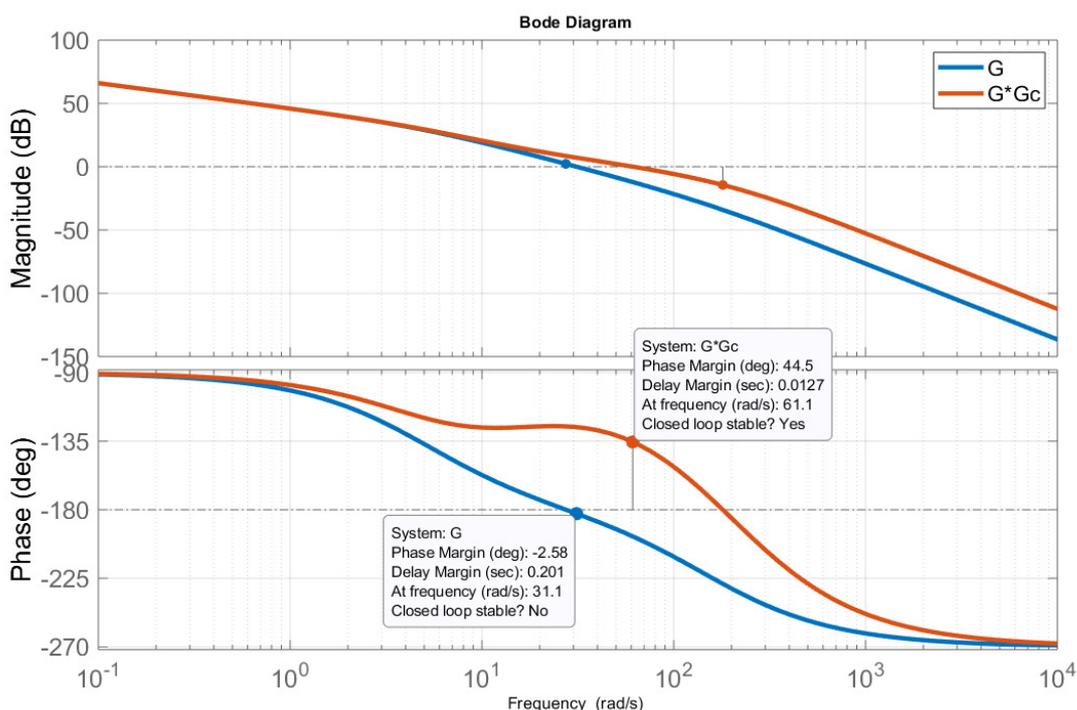
Applicando le formule di inversione si ottiene:



$$\tau_1 = 0,0663$$
$$\tau_2 = 0,0041$$

NOTA: in effetti $\tau_1 > \tau_2$, quindi la rete è anticipatrice con costante di tempo del polo $\alpha\tau = \tau_2$ e costante di tempo dello zero $\tau = \tau_1$ (i.e. $\alpha = 0,0622$)

Formule di inversione per reti correttrici - 5e





PROGETTO di CONTROLLO e RETI CORRETTRICI

- Specifiche di progetto**
- Reti corretttrici**
- Esempi di progetto**

FINE