Fondamenti di Automatica

Elementi di Teoria dei Sistemi

Prof. Marcello Bonfè
Dipartimento di Ingegneria - Università di Ferrara
Tel. +39 0532 974839
E-mail: marcello.bonfe@unife.it

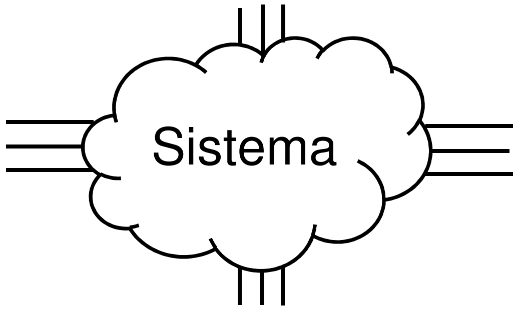
Department of Engineering Ferrara

Università degli Studi di Ferrara

Elementi di Teoria dei Sistemi
DEFINIZIONI

Sistemi e Segnali

- **SISTEMA** (o **PROCESSO**): oggetto o dispositivo o fenomeno il cui comportamento si manifesta attraverso la variazione nel tempo di un certo numero di attributi misurabili



- **VARIABILI MISURABILI**: caratteristiche di un sistema che si possono esprimere con uno o più numeri (interi, reali o complessi)

Sistemi e Segnali - 1

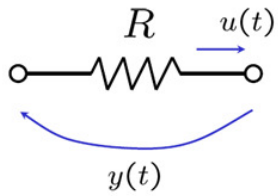
- **MODELLO MATEMATICO**: relazioni che intercorrono tra le variabili misurabili di un sistema
- **SISTEMA ORIENTATO**: sistema le cui variabili misurabili si distinguono in:
  - **Cause, o stimoli, o INGRESSI**
  - **Effetti, o risposte, o USCITE**

$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_r \end{pmatrix} = u(t)$: **INGRESSO** $\qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = y(t)$: **USCITA**

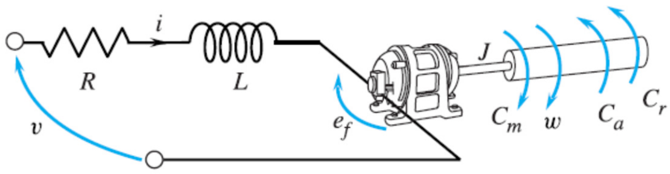
Sistemi e Segnali - 1a

- **NOTA:** non sempre la classificazione delle variabili misurabili in **Cause o INGRESSI** ed **Effetti o USCITE** (classificazione detta appunto **scelta della causalità**) è univoca…

Es.: INGRESSO di una resistenza: tensione.. o corrente?



Es.: Motore elettrico.. o generatore elettrico?



Sistemi e Segnali - 2

- **SISTEMA ORIENTATO**: rappresentazione grafica con segnali vettoriali (**N.B.**: il tempo è <u>continuo</u>)

$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_r \end{pmatrix}$ = u(t): **VETTORE DI INGRESSO (o VETTORE DEGLI INGRESSI)** $\in \mathbb{R}^r$

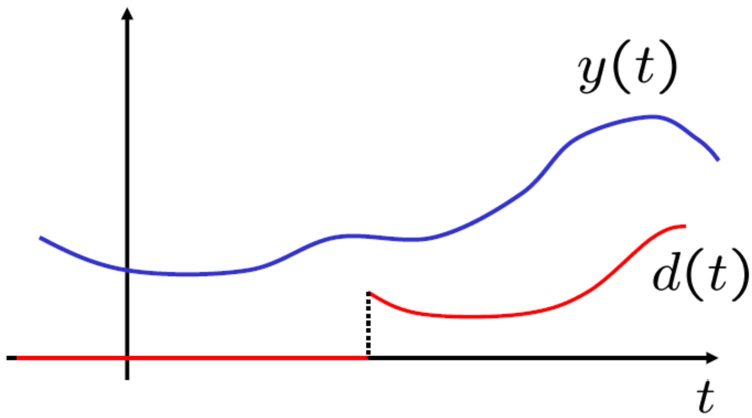
$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}$ = y(t): **VETTORE DI USCITA (o VETTORE DELLE USCITE)** $\in \mathbb{R}^m$

Sistemi e Segnali - 3

- **SEGNALI *ANALOGICI***: rappresentati da numeri reali associati ad un istante del tempo (il <u>tempo</u> è variabile in modo <u>continuo</u>)

Variabili reali a tempo continuo

$$t \in \mathbb{R}$$
$$y(t) \in \mathbb{R}$$
$$d(t) \in \mathbb{R}$$
$$\vdots$$

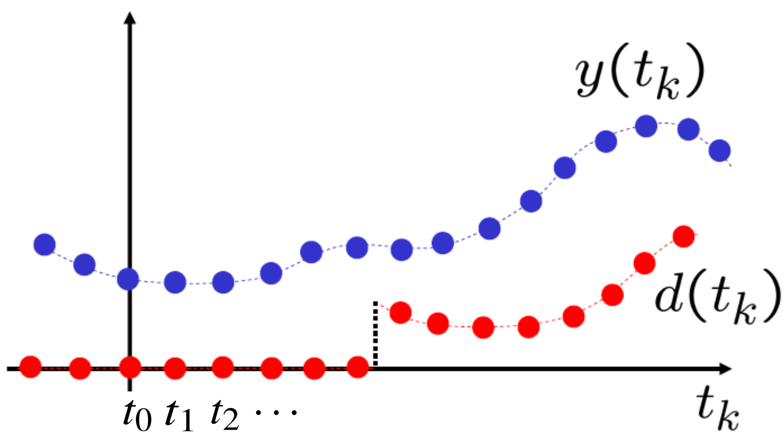


Sistemi e Segnali - 3

- **SEGNALI *DISCRETI***: rappresentati ancora da numeri reali, ma associati ad una <u>successione</u> di istanti di numeri interi, *rappresentativi* del tempo

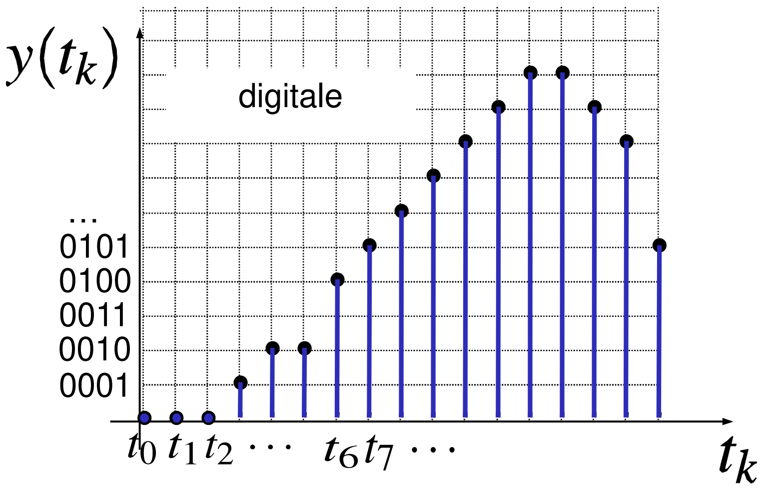
Variabili reali a tempo discreto

$$t_k \in \mathbb{Z}$$
$$y(t_k) \in \mathbb{R}$$
$$d(t_k) \in \mathbb{R}$$
$$\vdots$$



Sistemi e Segnali - 4

- **SEGNALI *DIGITALI***: segnali discreti ed inoltre rappresentati da numeri interi, così da poter essere memorizzati in stringhe di bit (*digit*)



Sistemi e Segnali - 5

- **SISTEMA DISCRETO**: i segnali misurabili sono associati ad una successione di numeri interi detti **PASSI**, generalmente (ma non necessariamente) rappresentativi di istanti di tempo multipli di un intervallo fissato, detto periodo di campionamento: $\{t_k = kT_s \quad k \in \mathbb{Z}\}$

$u(t_k)$ (o semplicemente $u(k)$): **VETTORE DI INGRESSO**

$y(t_k)$ (o semplicemente $y(k)$): **VETTORE DI USCITA**

Sistemi e Segnali - 6

- **NOTAZIONE**:
  - Derivata di un segnale rispetto al tempo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t); \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t); \quad \ldots$$

  - Ove necessario, per semplificare si userà anche:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Dx(t) \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = D^2x(t) \quad \frac{d^ix(t)}{dt^i} = D^ix(t)$$

  - Integrazione di un segnale rispetto al tempo ($x(t_0)=0$):

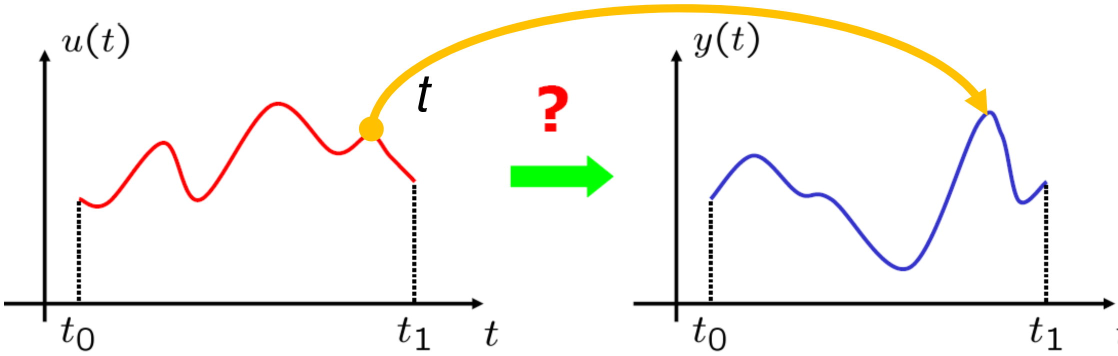
$$\int_{t_0}^{t} x(\tau)d\tau = \frac{1}{D}x(t)$$

Teoria dei Sistemi

- Disciplina complementare ai Controlli Automatici, che studia i modelli matematici dei sistemi e le loro proprietà:
  - deduzione del modello matematico:
    - modellistica (applicazione di leggi fisiche, biologiche, ecc.)
    - identificazione (applicazione di algoritmi numerici *data-driven*)
  - utilizzo del modello matematico:
    - analisi della risposta
    - analisi di controllabilità e osservabilità
    - analisi di stabilità
- Controlli Automatici:
  - utilizzo del modello matematico:
    - sintesi di una funzione di ingresso (catena aperta)
    - sintesi di un controllore in catena chiusa

Sistemi *Dinamici* (a tempo continuo)

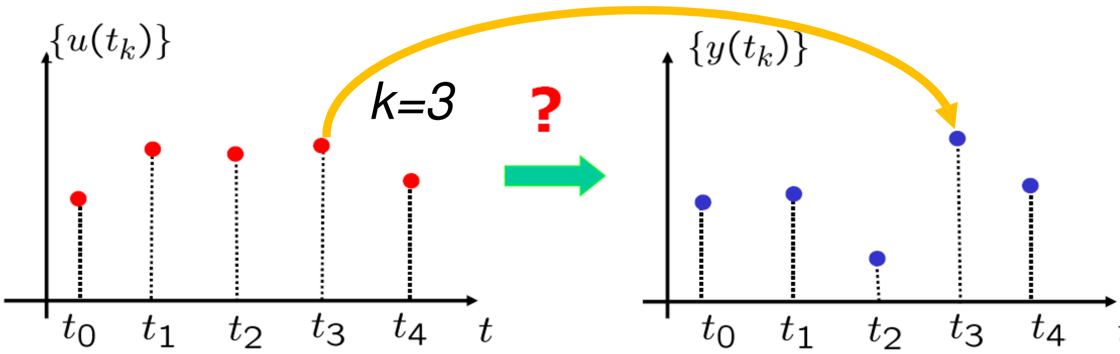
- La risposta ***y(t)*** di un sistema ad un certo istante di tempo ***t*** è univocamente determinata dall'ingresso ***u(t)*** allo stesso istante di tempo ***t***, **SÌ** o **NO**?



- **Se la risposta è NO, è un SISTEMA DINAMICO!**
- Se la risposta è NO, cos'altro serve per determinare ***y(t)***?
- Tipicamente, serve conoscere il valore passato di ***u***, cioè in ogni istante compreso tra t_0 e t

Sistemi *Dinamici* (a tempo discreto)

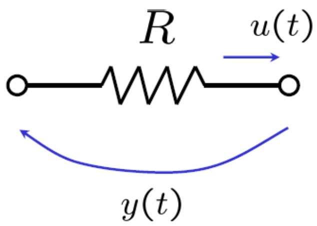
- La risposta ***y(k)*** di un sistema ad un certo *passo* ***k*** è univocamente determinata dall'ingresso ***u(k)*** allo stesso *passo* **SÌ** o **NO**?



- **Se la risposta è NO, è un SISTEMA DINAMICO!**
- Se la risposta è NO, cos'altro serve per determinare ***y(k)***?
- Tipicamente, serve conoscere il valore passato di ***u***, cioè per ogni *passo* compreso tra **0** e ***k***

Sistemi Dinamici (e non..)

- E quando la risposta ai quesiti precedenti è **SÌ**? Il sistema viene detto **privo di memoria** o **puramente algebrico** (o combinatorio, nel caso *digitale*)
- Esempio 1: Resistenza elettrica (**N.B.**: qui ingresso *u* = corrente)



$$y(t) = R \cdot u(t)$$

Non dinamico

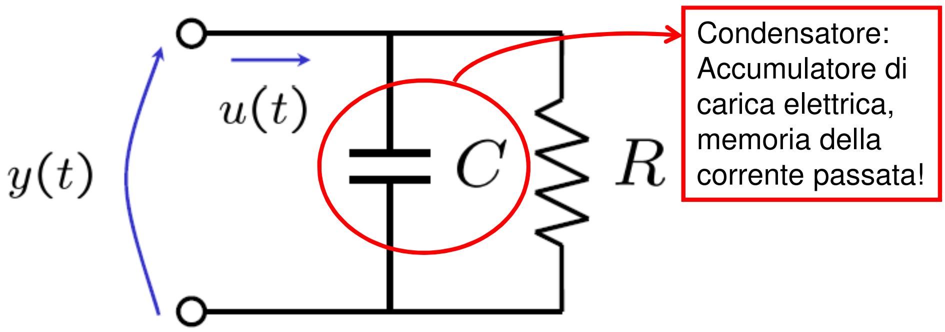
- Esempio 2: *Le spese dell'anno k sono proporzionali al reddito dello stesso anno..*

$$y(k) = \alpha \cdot u(k)$$

Non dinamico

Sistemi Dinamici (e non..) - 1

- Se invece il sistema è **dinamico**, viene detto **dotato di memoria** (appunto), perché la sua risposta dipende anche dall'andamento degli ingressi agli istanti precedenti
- Esempio 1:



- Esempio 2: *Le scorte di magazzino del mese k dipendono da quelle del mese k-1, dalla quantità di merce prodotta e dalla quantità venduta..*

Sistema dinamico: variabili di stato

- La **memoria** del sistema dinamico viene definita **stato** ed è l'informazione da conoscere in t_0 per determinare $y(t), t \geq t_0$ in relazione a $u(t), t \geq t_0$
- Lo **stato** rappresenta l'effetto della storia passata, cioè precedente a t_0, sul comportamento futuro
- In generale lo stato è costituito da variabili raggruppate in un vettore, la cui dimensione ***n*** viene definita **ordine del sistema** ed al quale è associato uno spazio detto **spazio degli stati**:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = x(t): \ \textbf{VETTORE DI STATO} \in \mathbb{R}^n$$

Alcune definizioni importanti

- Modello di un **sistema dinamico** nello **spazio degli stati**:
  - insieme dei tempi ***T***
  - insieme degli ingressi ***U***
  - insieme delle funzioni di ingresso U_f
  - insieme degli stati ***X***
  - insieme delle uscite ***Y***
- Per sistemi a tempo continuo ($T = \mathbb{R}$) si usano equazioni differenziali, in generale **NONLINEARI**:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

x(t), *u(t)* e *y(t)* sono vettori e *f(.)* e *g(.)* sono vettori di funzioni nonlineari.

f() è detta **funzione di velocità di transizione dello stato**

g() è detta **funzione di uscita**

Modelli differenziali vettoriali

$$\begin{cases} \boxed{\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)} \\ \boxed{y(t) = g(x(t), u(t), t)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t), t) \\ \ldots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t), t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t), t) \\ \ldots \\ y_m(t) = g_m(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t), t) \end{cases}$$

Modelli differenziali vettoriali - 1

I vettori:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \ldots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \qquad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \ldots \\ y_m(t) \end{bmatrix}$$

sono, rispettivamente, i vettori di

- ***Stato (dimensione n)***: x(t) $\in$ ***X***, ***X***=R^n
- ***Ingresso (dimensione r)***: u(t) $\in$ ***U***, ***U***=R^r
- ***Uscita (dimensione m)***: y(t) $\in$ ***Y***, ***Y***=R^m

all' istante t $\in$ ***T***=R

Esempio: sistema dinamico (nonlineare) di ordine 3

Funzioni nonlineari: *sin*(), *cos*(), $x_i x_j$ o $x_i u_j$, x_i^2, ecc.
Nonstazionarietà: compaiono funzioni di t (che non siano x_i o u_i)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \boxed{10t\,sin(x_1(t)) + 4x_2(t)x_3(t) + t^2\sqrt{u_1(t)}} & f_1(..) \\ \dot{x}_2(t) = \boxed{x_1(t)cos(x_3(t)) - x_2(t)u_2(t)} & f_2(..) \\ \dot{x}_3(t) = \boxed{[x_1(t)]^2 + t\,x_2(t)} & f_3(..) \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x(t),u(t),t) \\ f_2(x(t),u(t),t) \\ f_3(x(t),u(t),t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \boxed{x_1(t) + \frac{6t}{x_2(t)} + x_3(t)cos(u_1(t))} \quad g(..)$$

$y(t) \in \mathbb{R}$ (*scalare*)

Alcune definizioni importanti - 1

- Per sistemi a tempo discreto (***T*** $= \mathbb{Z}$) si usano equazioni alle differenze finite: $\begin{cases} x(k+1) = f(x(k),u(k),k) \\ y(k) = g(x(k),u(k),k) \end{cases}$

x(k), u(k) e *y(k)* sono vettori e *f(.)* e *g(.)* sono vettori di funzioni nonlineari.
f() è detta **funzione dello stato futuro**
g() è detta **funzione di uscita**

- Sistemi **puramente algebrici** (senza stato, si elimina *x(t)* o *x(k)*):

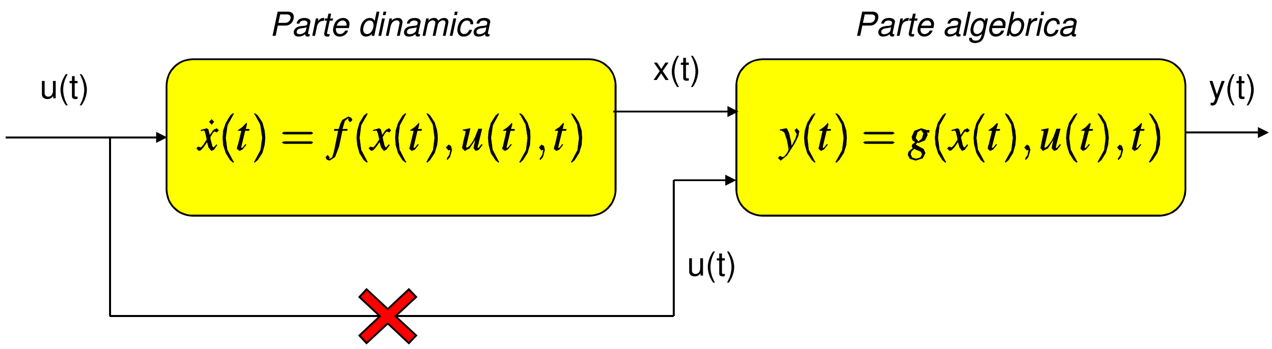
$$y(t) = g(\cancel{x(t)}, u(t), t) \quad \text{o} \quad y(k) = g(\cancel{x(k)}, u(k), k)$$

- Sistemi **puramente dinamici** (si toglie *u* nella funzione di uscita):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t) \\ y(t) = g(x(t),\cancel{u(t)},t) \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x(k+1) = f(x(k),u(k),k) \\ y(k) = g(x(k),\cancel{u(k)},k) \end{cases}$$

Alcune definizioni importanti - 1a

- Proprietà di *separazione* nelle parti dinamica (equazione differenziale) e algebrica



COLLEGAMENTO MANCANTE nei <u>sistemi puramente dinamici</u>

Parte dinamica: permette di riassumere la storia passata del sistema tramite le sue *variabili di stato* ad un certo istante t

Parte algebrica del sistema: esprime l'*uscita* del sistema utilizzando tutte le informazioni note all'istante t

Alcune definizioni importanti - 2

- Sistemi dinamici **stazionari** (o tempo-invarianti): le funzioni di stato / uscita <u>non dipendono esplicitamente dal tempo</u>

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \cancel{t}) \\ y(t) = g(x(t), u(t), \cancel{t}) \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), \cancel{k}) \\ y(k) = g(x(k), u(k), \cancel{k}) \end{cases}$$

- Sistemi dinamici **lineari**: ***U***, ***U**$_f$*, ***X***, ***Y***, sono spazi vettoriali definiti sullo stesso campo (es. $\mathbb{R}$) e <u>le funzioni *f*() e *g*() sono **lineari** rispetto a *x* e *u* per ogni *t*</u>, quindi sono esprimibili con prodotti tra matrici e vettori:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{cases}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \; u \in \mathbb{R}^r, \; y \in \mathbb{R}^m$$

Alcune definizioni importanti - 2a

- **NOTA BENE:** per la definizione di sistema lineare si richiede la seguente proprietà di linearità (i.e. assenza di *termini costanti* o *affini*)

$$f(\alpha x' + \beta x'') = \alpha f(x') + \beta f(x'')$$

analoga per *f*()/*g*() e rispetto sia a *x* che ad *u*

- Una funzione *affine* del tipo:

$$f(x) = mx + b$$

NON è quindi ammessa, poichè (qui α = β = 1):

$$\underline{f(x'+x'')} = mx' + mx'' + b \neq \underline{f(x') + f(x'')} = mx' + b + mx'' + b$$

Alcune definizioni importanti - 3

- Matrici caratteristiche dei **sistemi lineari** (*x*(*t*) vettore di dimensione ***n***, *u*(*t*) vettore di dimensione ***r***)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

← **N.B.: unica tra le 4 ad essere sempre quadrata**

dimensione: *n*x*n* (moltiplicata per vettore di dimensione *n*, deve dare vettore di dimensione *n*)

$$B(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1r}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) & \dots & b_{nr}(t) \end{bmatrix}$$

dimensione: *n*x*r* (moltiplicata per vettore di dimensione *r*, ecc..)

Alcune definizioni importanti - 3

- Matrici caratteristiche dei **sistemi lineari** ($x(t)$ e $u(t)$ come prima, $y(t)$ vettore di dimensione $\boldsymbol{m}$)

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1}(t) & \dots & c_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

dimensione: *m*x*n*
(moltiplicata per vettore di dimensione *n*, deve dare vettore di dimensione *m*)

$$D(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \dots & d_{1r}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1}(t) & \dots & d_{mr}(t) \end{bmatrix}$$

dimensione: *m*x*r*
(moltiplicata per vettore di dimensione *r*, deve dare vettore di dimensione *m*)

Alcune definizioni importanti - 4

- Sistemi dinamici **lineari e stazionari** (o **lineari tempo-invarianti, LTI**): matrici A,B,C,D costanti nel tempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

- Matrici caratteristiche dei **sistemi LTI** (notare le dimensioni!)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix}$$

Alcune definizioni importanti - 4a

Esplicitando i termini (omettendo la dipendenza dal tempo per $x_i(t)$ e $u_j(t)$)

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \cdots + b_{1r}u_r \\
\dots \\
\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \cdots + b_{nr}u_r
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\boxed{\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)} \\
\boxed{y(t) = Cx(t) + Du(t)}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \cdots + d_{1r}u_r \\
\dots \\
y_m = c_{m1}x_1 + c_{n2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n + d_{m1}u_1 + d_{m2}u_2 + \cdots + d_{mr}u_r
\end{cases}
$$

NOTARE che il secondo membro di ogni equazione (scalare) contiene solo prodotti tra un coefficiente costante e un elemento del vettore di stato o di ingresso!

Alcune definizioni importanti - 5

- Sistemi Multi-Ingresso Multi-Uscita (in inglese, Multi-Input Multi-Output, **MIMO**) o sistemi **multivariabile**

$$\boldsymbol{m} > 1 \text{ e } \boldsymbol{r} > 1$$

➔ verranno trattati nella prima parte del corso, usando metodi di analisi per equazioni differenziali nella forma LTI descritta nelle slide precedenti

- Sistemi Singolo-Ingresso Singola-Uscita (Single-Input Single-Output, **SISO**)

$$\boldsymbol{m} = 1 \text{ e } \boldsymbol{r} = 1$$

➔ verranno trattati nella seconda parte del corso, usando metodi di analisi per le cosiddette *trasformate di Laplace*

Riassumendo: classificazione dei modelli

- **Lineare**

Da ora in avanti, unici trattati nel corso

Stazionario

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t)\\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t)\end{aligned}$$

➔ **o Lineare Tempo-Invariante (LTI)**

Non Stazionario

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t)\\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}$$

Con $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ continue a tratti

- **Non lineare**

Stazionario

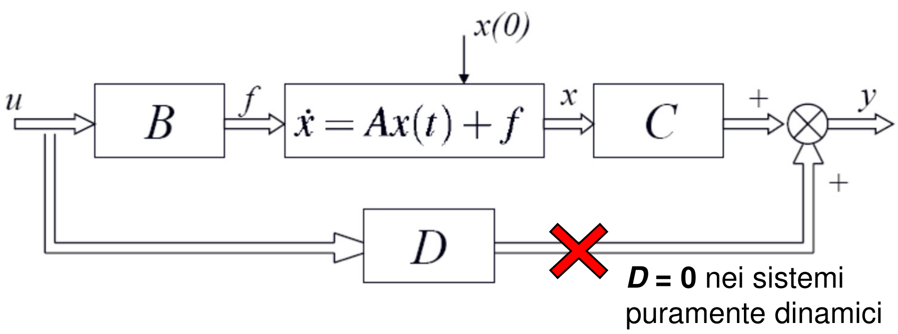
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t))\\ y(t) &= g(x(t), u(t))\end{aligned}$$

Non Stazionario

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t)\\ y(t) &= g(x(t), u(t), t)\end{aligned}$$

Riassumendo: LTI classe di modelli più *apprezzata*

- Un sistema lineare stazionario (caso particolare) è rappresentato:
  - nel caso MIMO da 4 matrici (A, B, C, D)
  - nel caso SISO da (A, b, c, d).



u : ingresso; y : uscita; f : azione forzante; x : stato

A : matrice del sistema
B : matrice di distribuzione degli ingressi
C : matrice di distribuzione delle uscite
D : matrice del legame algebrico ingresso/uscita

Risposta di un sistema dinamico (a tempo continuo)

- La soluzione dell'equazione differenziale:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t); \quad x(t_0) = x_0$$

che si suppone esista e sia unica, è del tipo:

$$x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$$

e si definisce **funzione di transizione dello stato**

- Tale funzione ha le seguenti proprietà:
  - **Orientamento nel tempo**: è definita per $t \geq t_0$, non necessariamente per $t < t_0$

  vale a dire che *è sempre possibile calcolare lo stato nel futuro, ma non è detto che sia possibile calcolarlo nel passato..*

Risposta di un sistema dinamico - 1

- Proprietà della funzione di transizione dello stato (cont.):
  - **Consistenza**: $\phi(t, t, x, u(\cdot)) = x$

  vale a dire che *se l'istante iniziale coincide con quello finale, la funzione di transizione dello stato fornisce un valore coincidente con lo stato iniziale.*

  (Proprietà ovvia, ma formalmente necessaria..)

Risposta di un sistema dinamico - 2

- Proprietà della funzione di transizione dello stato (cont.):
  - **Causalità**: se $u'_{[t_0,t)}(\cdot) = u''_{[t_0,t)}(\cdot)$ allora

$$\phi(t, t_0, x(t_0), u'(\cdot)) = \phi(t, t_0, x(t_0), u''(\cdot))$$

anche se fosse $u'(t^*) \neq u''(t^*)\ \forall\, t^* \notin [t_0, t)$

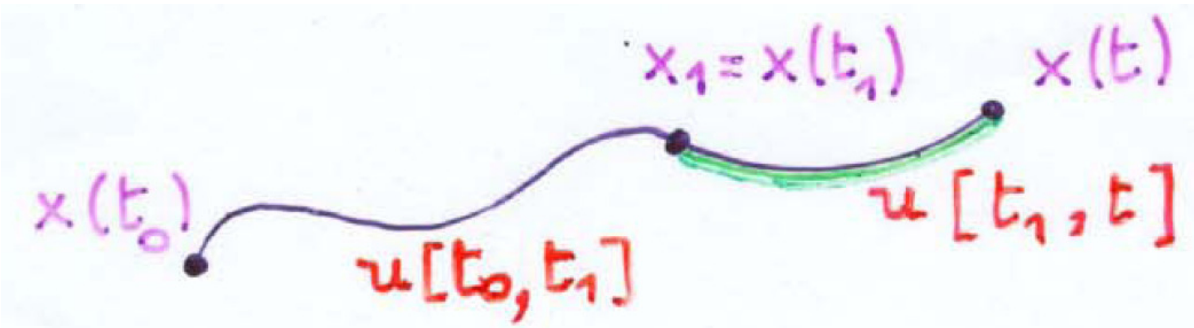
vale a dire che *ciò che interessa della funzione di ingresso, per calcolare la transizione dello stato in un certo intervallo* $[t_0,t)$, *è solo il suo andamento all'interno dello stesso intervallo* $[t_0,t)$ *e non altrove*

Risposta di un sistema dinamico - 3

- Proprietà della funzione di transizione dello stato (cont.):
  - **Composizione**: (congruenza tra due transizioni successive)

se $x(t_1) = \phi(t_1, t_0, x(t_0), u(\cdot)); \quad t_0 \leq t_1 \leq t$

$$\Rightarrow \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)) = \phi(t, t_1, \underbrace{\phi(t_1, t_0, x(t_0), u(\cdot))}_{x(t_1)}, u(\cdot))$$



Risposta di un sistema dinamico - 3a

- Proprietà della funzione di transizione dello stato (cont.):
  – **Composizione**: (congruenza tra due transizioni successive)

  NOTA BENE: proprietà importante perché implica la possibilità di calcolare lo stato in un certo istante t applicando la funzione di transizione a partire da un qualunque istante precedente t_i (cioè $t_i < t$), purché sia noto lo stato $x(t_i)$ in quell'istante

Risposta di un sistema dinamico - 4

- Sostituendo la funzione di transizione dello stato nella **funzione di uscita:**

$$y(t) = g(\phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)), u(t), t)$$

si ottiene la funzione di risposta:

$$y(t) = \gamma(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$$

e si passa dal modello <u>differenziale</u> ingresso-stato-uscita al modello ingresso-stato-uscita nel quale sono fissate le condizioni iniziali su $x(t_0)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)) \\ y(t) = \gamma(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)) \end{cases}$$

Riassumendo: LTI classe più apprezzata, *perché*…

- La soluzione di equazioni differenziali e, pertanto, il calcolo della funzione di transizione dello stato per un sistema dinamico sono agevolati dalle proprietà di linearità e stazionarietà precedentemente descritte
- Nel seguito verranno trattati in dettaglio i sistemi con modelli appartenenti a questa classe

Elementi di Teoria dei Sistemi
MODELLAZIONE DI SISTEMI INGEGNERISTICI

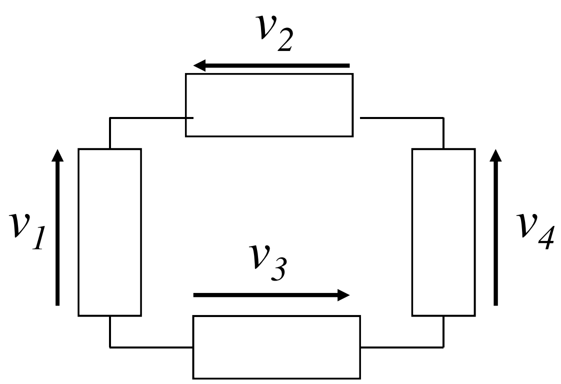
Modellazione di sistemi *ingegneristici*

- I *sistemi ingegneristici* sono costituiti da elementi fisici, possibilmente di natura eterogenea ed interagenti.
- In base alla natura del sistema si applicano le basi teoriche di molteplici discipline specifiche:
  - Circuiti elettrici ed elettronici → Elettronica/Elettrotecnica
  - Strutture meccaniche → Meccanica
  - Fluidi e trasferimenti termici → Termo-fluidodinamica
- I modelli matematici si ottengono applicando le leggi della fisica ed opportune ipotesi semplificative, ad esempio:
  - Caratteristiche fisiche (resistenze elettriche, masse, elasticità, ecc) **concentrate** (anziché **distribuite**)
  - Relazioni di proporzionalità o **lineari** (anziché **nonlineari**)

  → **Modelli lineari a parametri concentrati**

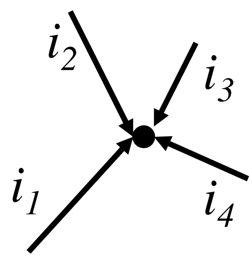
Modelli di circuiti elettrici: le leggi di Kirchhoff

1. La **somma delle tensioni** in una maglia è nulla
2. La **somma delle correnti** in un nodo è nulla



$$v_1 = v_2 + v_3 + v_4$$

maglia

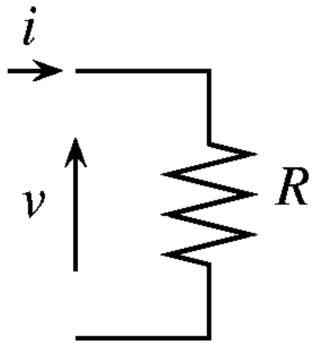


$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

nodo

Modelli di circuiti elettrici: elementi di base

- Resistenze elettriche: legge di Ohm (algebrica)



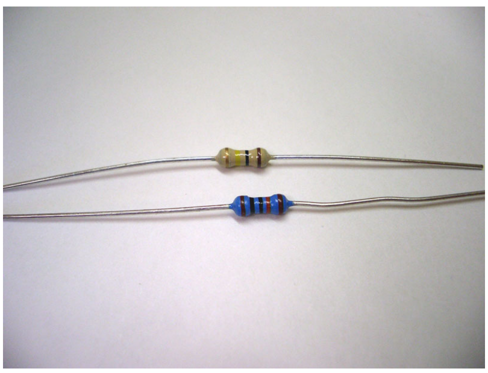
Resistenza

$$v(t) = R\,i(t)$$

- **Teoricamente**:
  - Resistenza *pura* (relazione V-I lineare)
  - Resistenza costante

Modelli di circuiti elettrici: elementi di base - 1

- **Realmente**:
  - Resistenze nonlineari
  - Capacità/induttanze parassite di collegamento
  - Resistenze variabili (es. effetti termici)



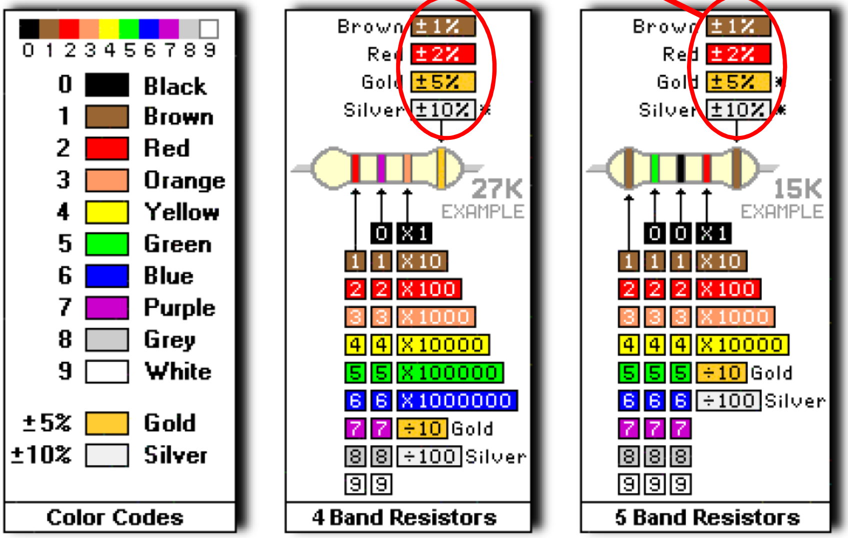
Pin Through-Hole (PTH)

Surface-Mount Device (SMD)

Modelli di circuiti elettrici: elementi di base - 2

- Codici di classificazione resistenze per colore

N.B.: tolleranze da +/-1% a +/-10%, significa che il valore effettivo di una resistenza sarà sempre diverso dal suo valore nominale! Vedi esempio nell'introduzione al corso..



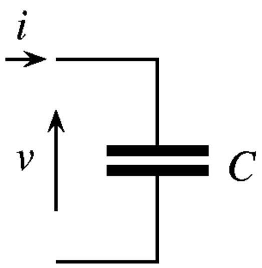
Modelli di circuiti elettrici: elementi di base - 3

- Condensatori: accumulatori di carica elettrica

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \dot{Q}(t) \quad \Rightarrow Q(t) = \int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + Q_0$$

- Tensione ai capi del condensatore (**teorica**):

$$v(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

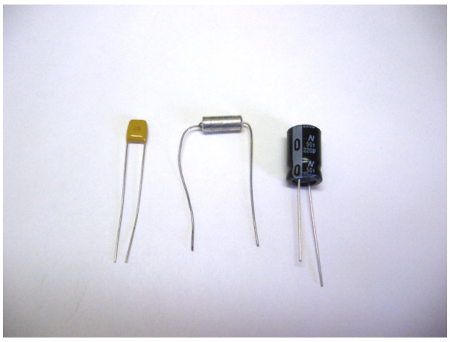


Capacità

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau + \frac{Q_0}{C} = \frac{1}{C}\frac{1}{D}i(t) + \frac{Q_0}{C}$$

Modelli di circuiti elettrici: elementi di base - 4

- Condensatori, **realmente**:
  – Capacità nonlineari
  – Resistenze/induttanze parassite di collegamento



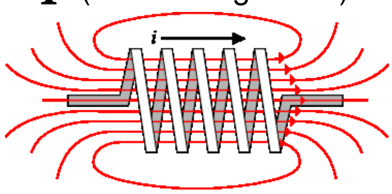
Pin Through-Hole (PTH)

Surface-Mount Device (SMD)

Modelli di circuiti elettrici: elementi di base - 5

- Induttori, legge di Faraday: $f.e.m. = \mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi(t)}{dt}$

Φ (flusso magnetico)

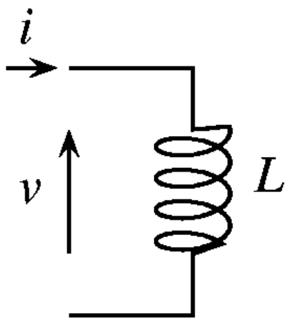


tale *forza elettromotrice* (f.e.m.) si oppone alla variazione di flusso magnetico nel circuito.

Si definisce (auto-)induttanza: $L = \dfrac{\Phi}{i}$

- Supponendo ***L* costante**: $\dfrac{d\Phi}{dt} = L\dfrac{di}{dt}$

  e la tensione indotta opposta alla f.e.m.:

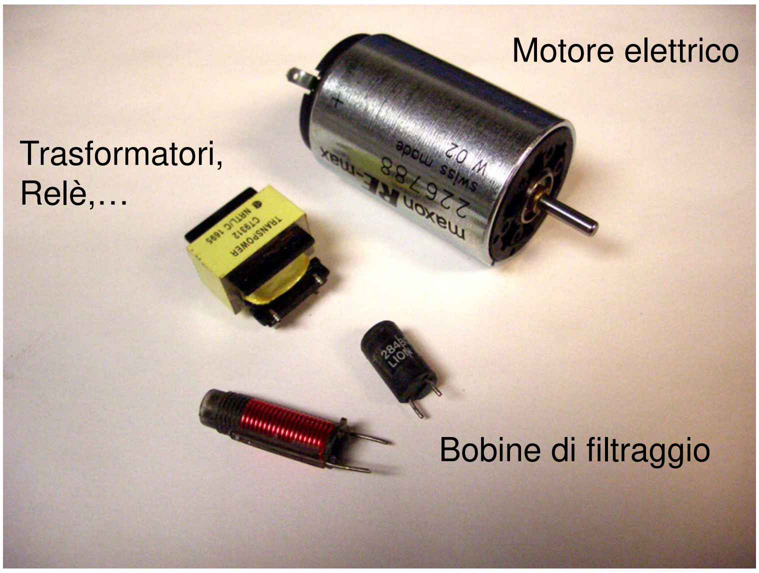


Induttanza

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} = LDi(t)$$

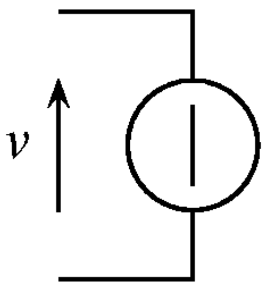
Modelli di circuiti elettrici: elementi di base - 6

- Induttori, **realmente**: qualsiasi circuito elettrico nel quale ci siano avvolgimenti di filo conduttore…



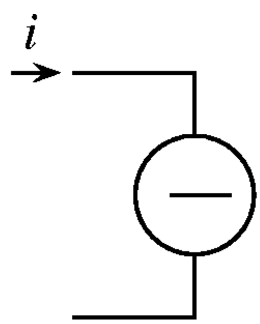
Modelli di circuiti elettrici: elementi di base - 8

- **Sorgenti ideali** di tensione e corrente:



Generatore di tensione

$$v(t) = V_0 \quad (= \text{cost.})$$



Generatore di corrente

$$i(t) = I_0 \quad (= \text{cost.})$$

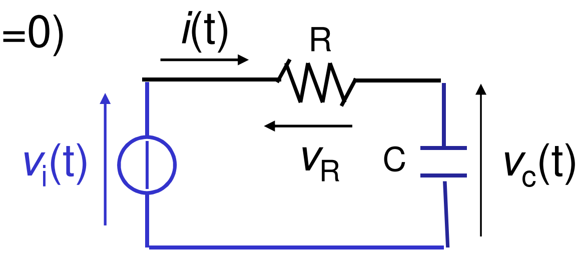
Modelli di circuiti elettrici: elementi di base - 9

Le unità di misura delle grandezze elettriche nel Sistema Internazionale (SI) sono:

- Variabili:
  - [v] = V, Volt;
  - [i] = A, Ampere;
  - [Q] = C, Coulomb;
  - [Φ] = Wb, Weber;
- Parametri:
  - [R] = Ω, Ohm;
  - [L] = H, Henry;
  - [C] = F, Farad;

Esempi di modellazione dei circuiti elettrici: RC serie

- Circuito RC serie ($v_C(t_0)=0$)



Kirchhoff alla maglia
$v_i = v_R + v_C$

$$v_R(t) = Ri(t) \qquad i(t) = C\dot{v}_C(t)$$

$$v_i(t) = RC\dot{v}_C(t) + v_C(t)$$ ← **equazione differenziale!**

- Riscrivendo quest'ultima equazione come segue:

$$\boxed{\dot{v}_C(t) = -\frac{v_C(t)}{RC} + \frac{v_i(t)}{RC}}$$

Esempi di modellazione dei circuiti elettrici: RC serie

- Si è ottenuta un'equazione (*scalare*) nella forma:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

ponendo $u=v_i$ e $x=v_C$, con i coefficienti:

$$a = -\frac{1}{RC} \quad b = \frac{1}{RC}$$

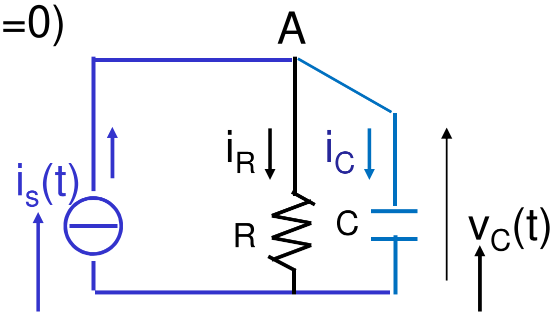
- Per l'uscita, la scelta più naturale è $y=v_C$, che corrisponde anche a $y=x$, compatibile con la forma generica $y(t) = cx(t) + du(t)$

ponendo $c = 1$ e $d = 0$ (sistema puramente dinamico)

Esempi di modellazione dei circuiti elettrici: RC par.

- Circuito RC parallelo ($v_C(t_0)=0$)

Kirchhoff al nodo A
$i_s = i_R + i_C$



$$i_R(t) = \frac{1}{R}v_C(t) \quad i_C(t) = C\dot{v}_C(t)$$

- La somma delle correnti nel nodo A è un <u>modello differenziale</u> $\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$ (con $u=i_s$, $\underbrace{y=x}$$=v_C$):

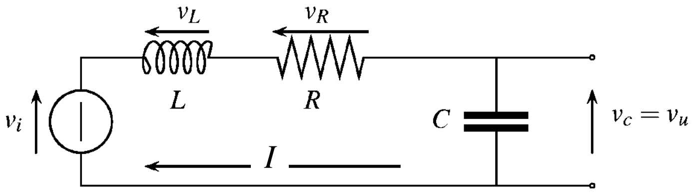
$$\dot{v}_C(t) = \underbrace{-\frac{1}{RC}}_{a}v_C(t) + \underbrace{\frac{1}{C}}_{b}i_s(t)$$

come prima, implica c=1 e d=0

Esempi di modellazione dei circuiti elettrici: RLC

- Circuito RLC serie

(Condizioni iniziali nulle)



Relazioni base di R, L e C

$$\begin{cases} v_R(t) = RI(t) \\ v_L(t) = L\dot{I}(t) \\ C\dot{v}_C(t) = I(t) \end{cases}$$

$$\underbrace{v_i(t) = v_L(t) + v_R(t) + v_C(t)}_{\text{Kirchhoff alla maglia}}$$

- Ora ci sono **due equazioni differenziali** da considerare (Kirchhoff → $\dot{I}$, condensatore → $\dot{v}_C$), che opportunamente riscritte diventano:

$$\begin{aligned} \dot{I}(t) &= -\tfrac{R}{L}I(t) - \tfrac{1}{L}v_C(t) + \tfrac{1}{L}v_i(t) \\ \dot{v}_C(t) &= \tfrac{1}{C}I(t) \end{aligned}$$

Esempi di modellazione dei circuiti elettrici: RLC

- **NOTA BENE**: le due equazioni differenziali precedenti sono entrambe del primo ordine, ciascuna rispetto ad **una** delle quantità correlate a modelli differenziali (i.e. corrente in L e tensione su C)
- Riscrivendole nella forma mostrata in precedenza, si evidenzia come possano essere accorpate in una struttura matriciale, considerando il **vettore di stato** (e l'ingresso v_i)

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}}_{\dot{x}(t)} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{1}{L}x_2(t) \\ \frac{1}{C}x_1(t) \end{pmatrix}}_{Ax(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{L}u(t) \\ \end{pmatrix}}_{Bu(t)}$$

Esempi di modellazione dei circuiti elettrici: RLC

- **NOTA BENE**: i coefficienti delle matrici A e B si ricavano ricostruendo il corretto ordine dei termini nei <u>prodotti riga per colonna</u> e soprattutto osservando che termini *mancanti* nelle equazioni differenziali corrispondono ad un coefficiente *nullo* nella matrice cercata!

$$Ax(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L}x_1(t) & -\frac{1}{L}x_2(t) \\ \frac{1}{C}x_1(t) & \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)}$$

$$Bu(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L}u(t) \\ \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

Esempi di modellazione dei circuiti elettrici: RLC

- **INOLTRE**, la scelta di porre $x_1=I$ e $x_2=v_C$ è arbitraria. Ponendo $x_1=v_C$ e $x_2=I$, si otterrebbero matrici A’ e B’ con gli stessi elementi, ma in posizione diversa (verificare per esercizio!)
- Tuttavia, come si dimostrerà più avanti nel corso, le <u>proprietà</u> di interesse controllistico del sistema <u>non cambierebbero</u>. In particolare, la matrice A vista nella slide precedente e la matrice A’ risultano **matrici simili** (rivedere tale definizione nei corsi di base su Geometria e Algebra Lineare…)

Esempi di modellazione dei circuiti elettrici: RLC

- In modo analogo, una volta definite le quantità di uscita (perchè misurabili o perchè di interesse per il controllo), si dovrà ottenere una **relazione algebrica** tra l'uscita (o il vettore di uscita), lo stato e l'ingresso, esprimibile in forma matriciale: $y(t) = Cx(t) + Du(t)$
- Per il circuito RLC già visto, l'uscita più *ragionevole* (dal punto di vista applicativo) è $y=v_C=x_2$, perciò:

$$y(t) = x_2(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{0}_{D}\, u(t)$$

Esempi di modellazione dei circuiti elettrici: RLC

- Riassumendo per il circuito RLC serie: modello in forma matriciale con $x_1=I$, $x_2=v_C$, $u=v_i$, $y=v_C$ (quindi $y=x_2$)

$$\begin{cases} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{D} u(t) \end{cases}$$

NOTA: D = 0 ➔ sistema puramente dinamico

Esempi di modellazione dei circuiti elettrici: RLC

- **NOTA BENE**: ripartendo dalla legge di Kirchhoff e dalla relazione base del condensatore, si potrebbe anche ottenere **una singola equazione differenziale del secondo ordine**:

$$v_i(t) = L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + v_C(t)$$

$$C\frac{dv_C(t)}{dt} = I(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dI(t)}{dt} = C\frac{d^2v_C(t)}{dt^2}$$

$$LC\frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = v_i(t)$$

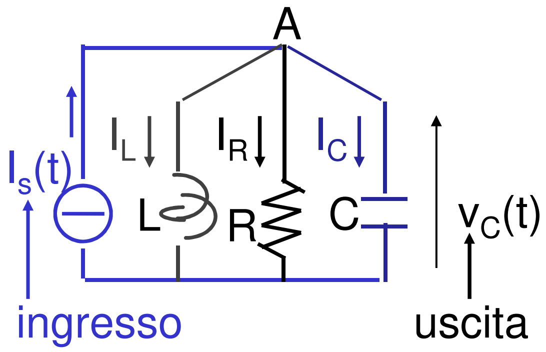
Esempi di modellazione dei circuiti elettrici: RLC

- **L'equazione differenziale del secondo ordine** della slide precedente è spesso il punto di partenza per l'analisi specifica del circuito RLC nel contesto dei corsi di base di Elettrotecnica / Circuiti Elettrici (ecc.)
- Tuttavia, il modello sistemistico basato sulle matrici A,B,C,D (più generale) è utilizzato principalmente per motivi legati alla **scalabilità dell'approccio**: il modello matriciale di <u>qualunque sistema di ordine ***n***</u> è costituito da ***n* equazioni differenziali TUTTE del primo ordine** (e rispetto ad una differente variabile di stato!!)
- Si vedrà in seguito che la soluzione dell'equazione differenziale matriciale ha una struttura caratteristica, indipendente dall'ordine ***n*** (dimensione del vettore *x(t)* e della matrice quadrata *A*)

Esempi di modellazione dei circuiti elettrici: RLC bis

- Circuito RLC parallelo

(Condizioni iniziali nulle)



Kirchhoff al nodo A
$I_s = I_L + I_R + I_C$

$$C\dot{v}_C(t) = I_C(t)$$

$$v_C(t) = v_L(t) = L\dot{I}_L(t)$$

$$\dot{v}_C(t) = -\tfrac{1}{RC}v_C(t) - \tfrac{1}{C}I_L(t) + \tfrac{1}{C}I_s(t)$$

$$\dot{I}_L(t) = \tfrac{1}{L}v_C(t)$$

Esempi di modellazione dei circuiti elettrici: RLC bis

- Circuito RLC: modello in forma matriciale

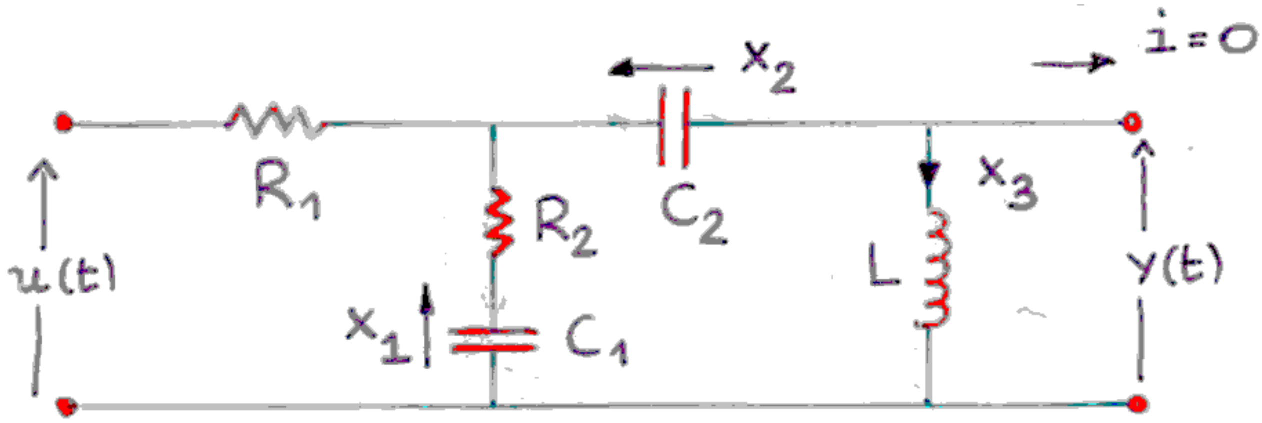
con $x_1 = v_C$, $x_2 = i_L$, $u = I_s$, $y = v_C$ (quindi $y = x_1$)

$$\begin{cases} \overbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}^{\dot{x}(t)} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}^{x(t)} + \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}}^{B} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{D} u(t) \end{cases}$$

NOTA: D = 0 → sistema puramente dinamico

Esempi di modellazione dei circuiti elettrici: multim.

- Circuito multimaglia:



$$
\begin{cases}
C_1 \dot{x}_1 = (u - x_1 - R_2 C_1 \dot{x}_1)/R_1 - x_3 \\
C_2 \dot{x}_2 = x_3 \\
L \dot{x}_3 = x_1 + R_2 C_1 \dot{x}_1 - x_2
\end{cases}
$$

$$y = L \dot{x}_3$$

Esempi di modellazione dei circuiti elettrici: multim.

- Circuito multimaglia: modello matriciale

A B

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} \frac{-1}{C_1(R_1+R_2)} & 0 & \frac{-R_1}{C_1(R_1+R_2)} \\ 0 & 0 & 1/C_2 \\ \frac{R_1}{L(R_1+R_2)} & -1/L & \frac{-R_1 R_2}{L(R_1+R_2)} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} +
\begin{bmatrix} \frac{1}{C_1(R_1+R_2)} \\ 0 \\ \frac{R_2}{L(R_1+R_2)} \end{bmatrix} u(t)
$$

$$
y(t) = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{R_1+R_2} & -1 & \frac{-R_1 R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix} u(t)
$$

C

NOTA: D ≠ 0 → sistema dinamico, **non** puramente

Considerazioni modellistiche ed energetiche

- Nei modelli matematici dei circuiti elettrici, le variabili di stato sono **sempre** associate alla presenza di **condensatori** e **induttori**
- Tali elementi **immagazzinano energia** tramite, rispettivamente, accumulo di cariche elettriche e induzione di flusso magnetico.

STATO ←→ ENERGIA

- Un condensatore carico ha una certa **energia potenziale** (*liberata* quando il condensatore si scarica)
- La corrente in un induttore ha una certa **energia cinetica** (cariche elettriche in movimento)

Considerazioni modellistiche ed energetiche - 1

- **Energia (E)**: quantità di lavoro che un certo sistema (particella di massa/carica) può svolgere
- **Lavoro (W)**: *forza* applicata (meccanica o elettrica) per spostamento (di particelle di massa o cariche elettriche), o anche variazione di energia cinetica (di masse o cariche)
- **Potenza (P)**: lavoro per unità di tempo (dW/dt)
- In ogni contesto fisico, esistono sempre due variabili il cui prodotto esprime la potenza in un certo istante (es. **P = v i**, **P = F v**, …)

Considerazioni modellistiche ed energetiche - 2

- Nelle resistenze **NON** c'è accumulo di energia, ma **dissipazione di potenza**, in quanto:

  P = v i ➔ P = i^2 R = v^2 / R

- Nella pratica, la potenza dissipata si trasforma in calore emesso dal circuito elettrico e aumento di temperatura delle resistenze (che potrebbe determinare anche una variazione di R)
- Se l'obiettivo del modello è **SOLO** il circuito elettrico, tale potenza è genericamente dispersa all'esterno del sistema considerato (e non più considerata…)

Considerazioni modellistiche ed energetiche - 3

- Nel condensatore: $dW = V dq = \frac{q}{C} dq$

$$\Rightarrow \boxed{E_C}(=W) = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \boxed{\frac{1}{2} C V^2}$$

- Nell'induttore: $dW = -\mathcal{E} i dt = L i \frac{di}{\cancel{dt}} \cancel{dt} = L i di$

$$\Rightarrow \boxed{E_L}(=W) = \int_0^I L i di = \boxed{\frac{1}{2} L I^2}$$

N.B.: Nell'induttore, ricordando $\Phi = Li$ si può esprimere l'energia anche come:

$$E_L = \int_0^\Phi \frac{\Phi}{L} d\Phi = \frac{\Phi^2}{2L}$$

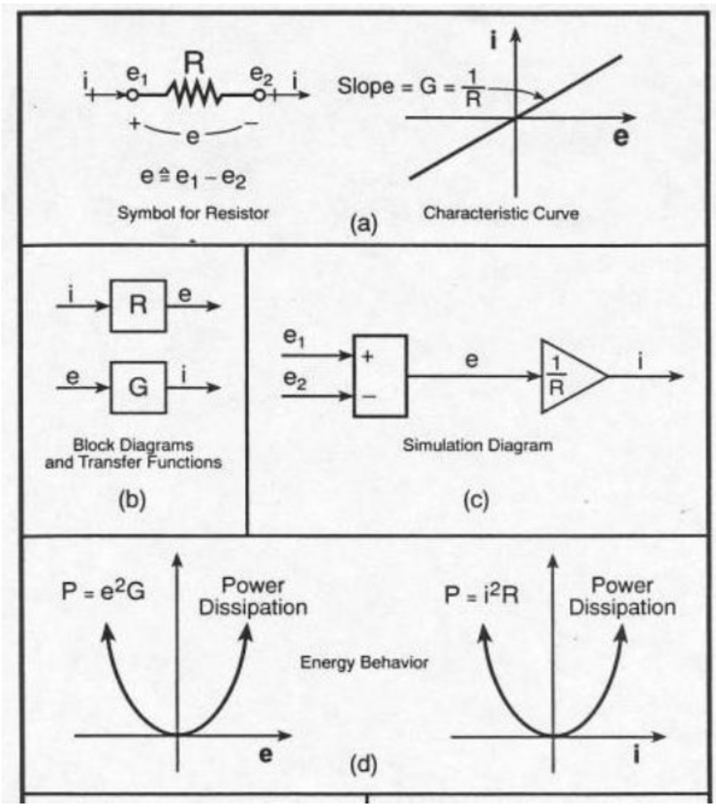
Questa formulazione più generica si applica anche in altri casi di variazione del flusso..

Considerazioni modellistiche ed energetiche - 4

- Le variabili da scegliere *preferibilmente,* dal punto di vista fisico, come stato sarebbero la **carica** nei condensatori e il **flusso** negli induttori
- Con ipotesi di linearità e per pratica ingegneristica (misure..), è più intuitivo utilizzare la **tensione** ai capi dei condensatori e la **corrente** negli induttori
- La scelta delle variabili di stato è **arbitraria**!
- Come vedremo, tale scelta **non influisce** sulle proprietà strutturali del modello matematico, ma solo sull'espressione delle sue equazioni

Circuiti elettrici: riassumendo

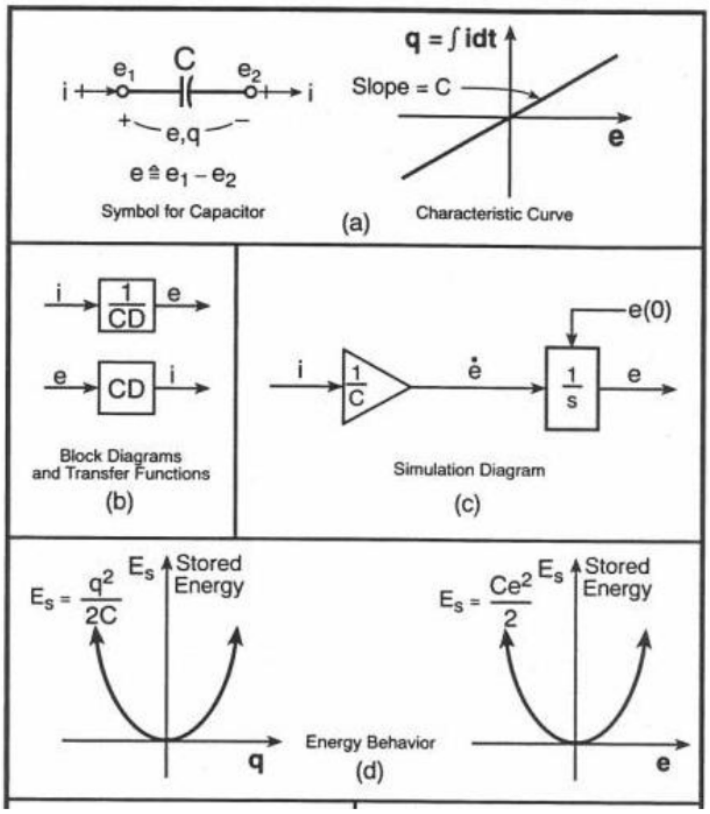
Resistenze:



NOTA:
e = tensione
i = corrente

Circuiti elettrici: riassumendo - 1

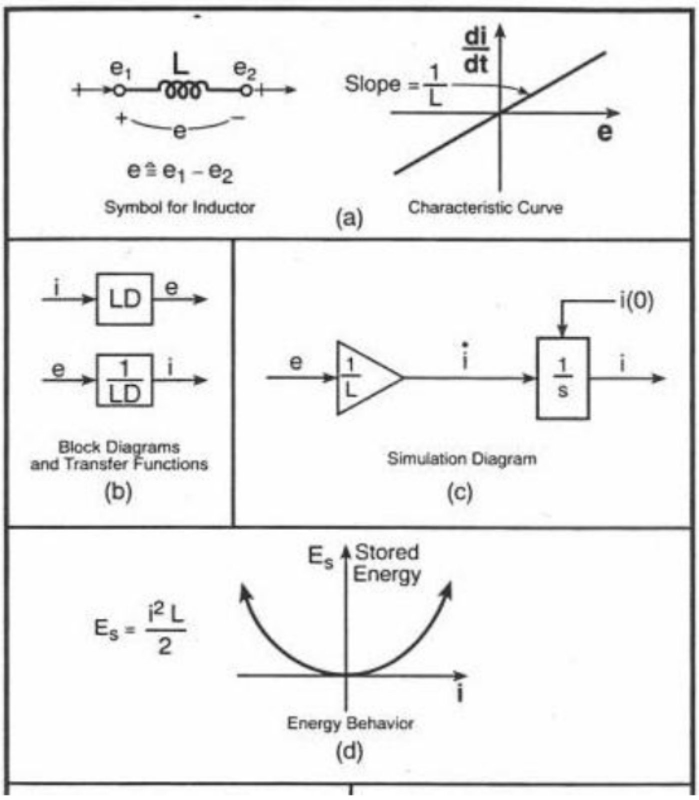
Condensatori:



NOTA:
e = tensione
i = corrente

Circuiti elettrici: riassumendo - 2

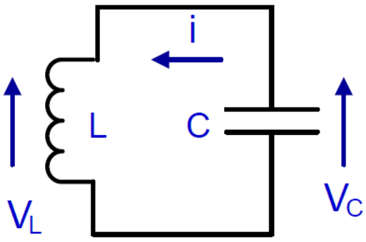
Induttori:



NOTA:
e = tensione
i = corrente

Circuiti elettrici: esempio e analisi energetica

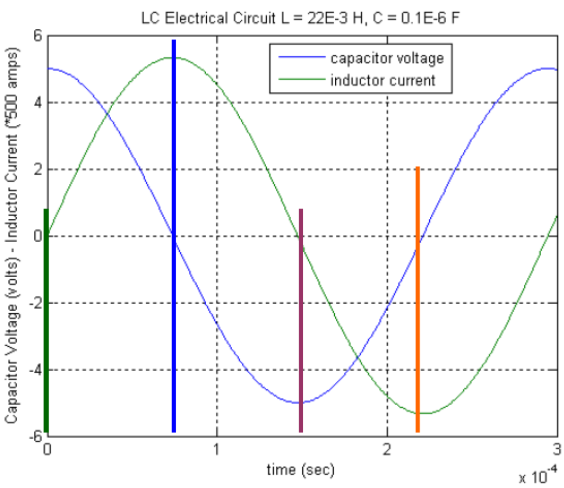
- Circuito LC *puro* (idealmente senza effetti resistivi)

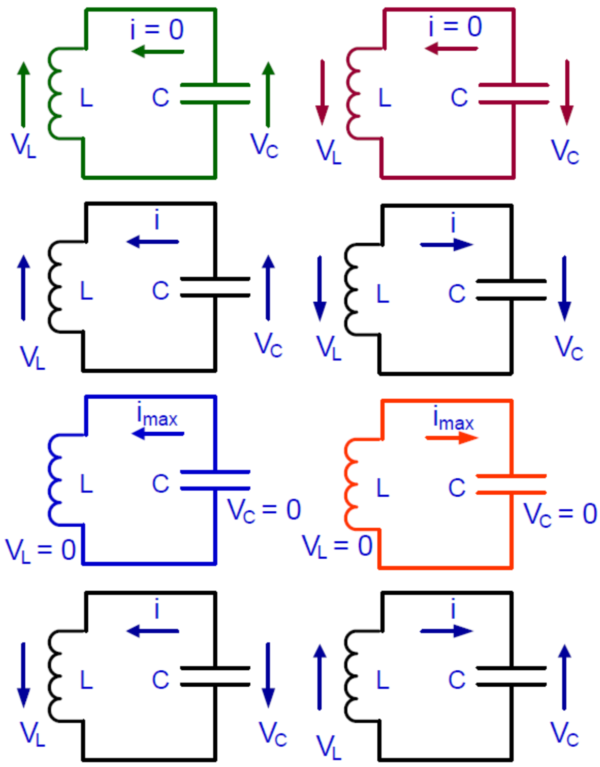


- Se il condensatore ha inizialmente una $V_c(0) \neq 0$, esso si scarica con una certa corrente verso l'induttanza
- Nell'induttanza però, la corrente non si annulla quando il condensatore è scarico, quindi quest'ultimo verrà ricaricato, MA con tensione di segno opposto (fino a $-V_c(0)$!)
- Solo a questo punto, la corrente nell'induttanza diventa nulla e il ciclo si ripete con tutte le variabili di segno opposto…

Circuiti elettrici: esempio e analisi energetica - 1

NOTA: andamento sinusoidale della tensione, andamento cosinusoidale della corrente..

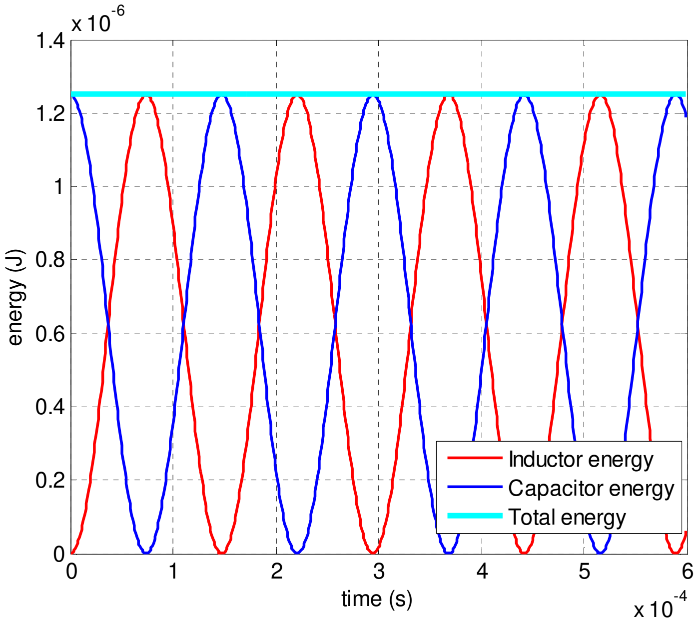




Circuiti elettrici: esempio e analisi energetica - 2

- Graficando l'energia dei due elementi:

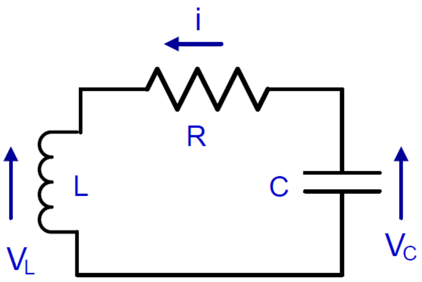
$$E_C = \frac{1}{2}CV_c^2 \qquad E_L = \frac{1}{2}Li^2 \qquad E_{tot} = E_C + E_L$$



NOTA: l'energia totale è perfettamente costante, MA *rimbalza* tra il condensatore e la induttanza!

Circuiti elettrici: esempio e analisi energetica - 3

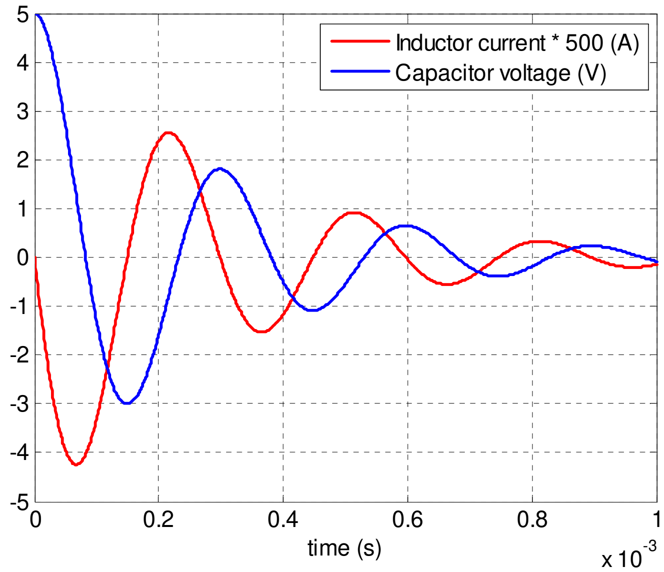
- Introducendo un elemento resistivo…



- La tensione dei due elementi accumulatori di energia non è più istantaneamente identica e la differenza è tanto maggiore quanto più è elevata la corrente sulla resistenza
- La resistenza dissipa l'energia conservata inizialmente nel condensatore, per cui il campo magnetico generatosi nell'induttanza non riuscirà a ricaricare completamente il condensatore con carica opposta a quella iniziale..

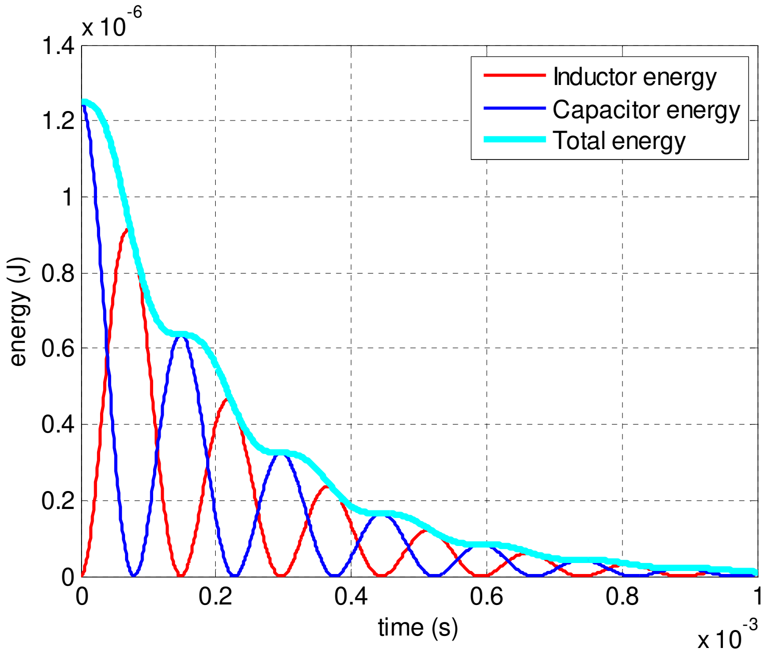
Circuiti elettrici: esempio e analisi energetica - 4

- L’andamento di tensione e corrente non è più puramente sinusoidale, ma tende a 0 per t → ∞



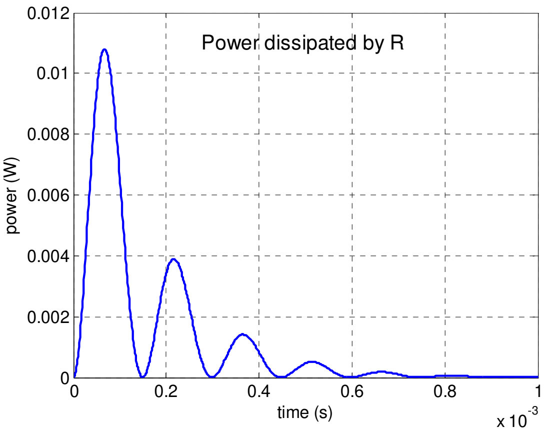
Circuiti elettrici: esempio e analisi energetica - 5

- L’energia totale del circuito tende anch’essa a 0

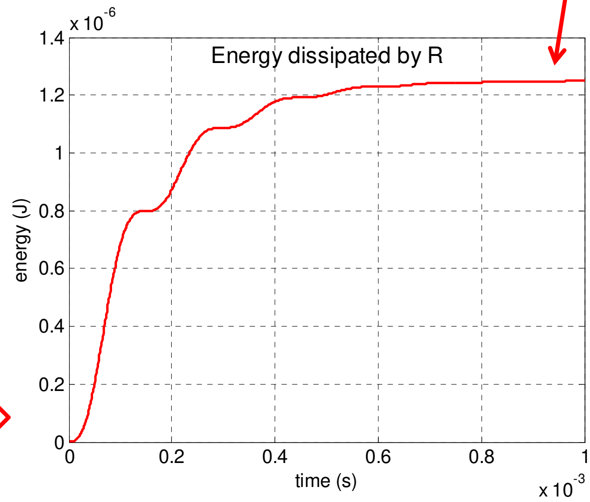


Circuiti elettrici: esempio e analisi energetica - 6

- Cosa è successo? Ovviamente l'energia mancante si disperde nella resistenza (dissipazione *termica*, non visibile dalle variabili elettriche)



Nota: tende al valore iniziale dell'energia immagazzinata nel condensatore!



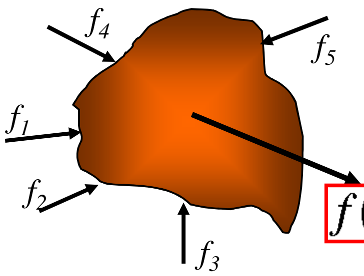
Facendo l'integrale rispetto al tempo

Analisi energetica e stabilità

- Il comportamento del circuito LC puro si può definire *stabile*, poiché **non** c'è una divergenza **verso l'infinito** delle variabili considerate
- Nel circuito RLC la stabilità è ancora più interessante, perché **tutte le variabili tendono ad un valore ben definito (zero!)** per t → ∞
- Formalmente, il circuito LC si dice **semplicemente stabile**, quello RLC **asintoticamente stabile**
- **La stabilità asintotica è ottenuta grazie agli effetti dissipativi della resistenza**
- Qualunque sia il numero di elementi di un circuito elettrico, la presenza di resistenze è sempre necessaria per garantire la stabilità asintotica!

Modelli di sistemi meccanici

- Si considerano masse in movimento traslatorio e rotatorio nello spazio, per effetto di forze applicate
- Le rotazioni sono provocate da una forza applicata a certa distanza dall'asse di rotazione (forza per distanza = momento della forza, anche detto **coppia**)
- La somma vettoriale delle forze applicate ad un corpo ne determina l'accelerazione (<u>legge di Newton</u>)

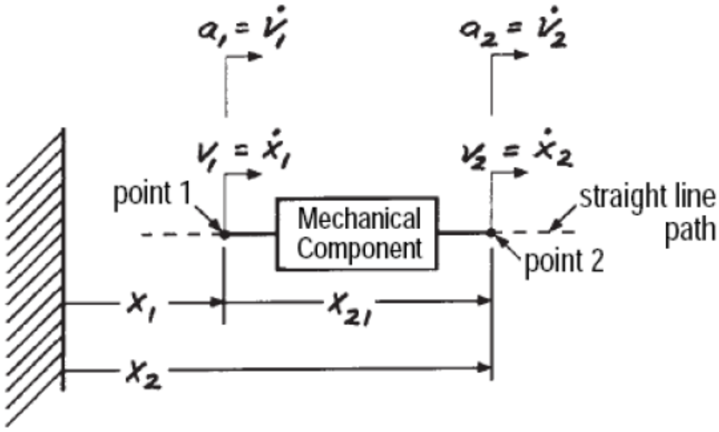


$$\boxed{f(t) = m\ddot{x}(t)}$$

➔ **Free Body Diagram (FBD)**

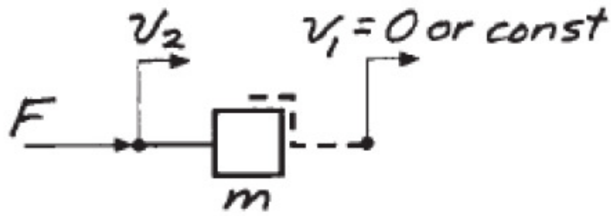
Modelli di sistemi meccanici - 1

- La legge di Newton $\sum f_i(t) = m\ddot{x}(t)$, definendo $m\ddot{x}(t)$ **forza inerziale**, è <u>analoga</u> a UNA delle due leggi di Kirchhoff! (somma delle forze = 0)
- Spostamenti traslazionali sono sempre relativi ad un riferimento fisso, evidenziabile con schema *circuitale*:



Modelli di sistemi meccanici: elementi di base

- Masse:

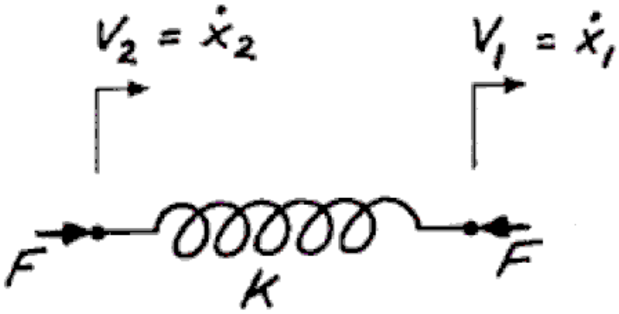


$$f(t) = M\frac{d^2x}{dt^2} = MD^2x(t)$$

- **Teoricamente**:
  - Relazione lineare
  - Massa costante e concentrata in un punto

Modelli di sistemi meccanici: elementi di base - 1

- Molle:

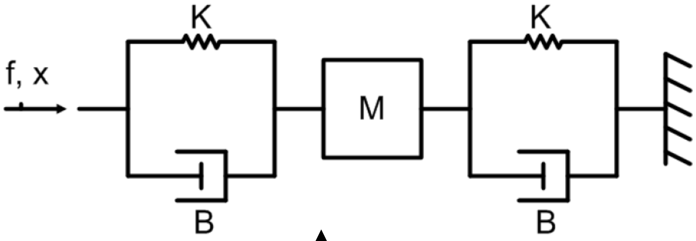


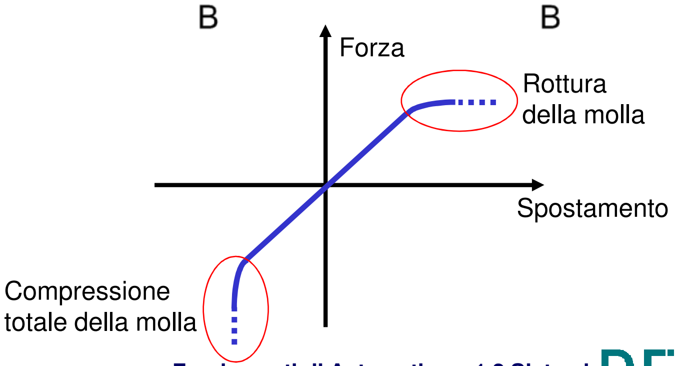
$$f(t) = K\left(x_1(t) - x_2(t)\right)$$

- **Teoricamente**:
  - Molla *pura* (senza massa o effetti di smorzamento)
  - Relazione lineare
  - **Elasticità** (K) costante

Modelli di sistemi meccanici: elementi di base - 2

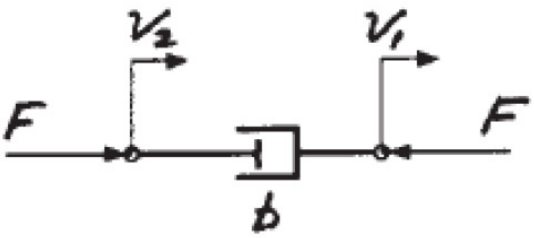
- **Realmente**:
  - La molla ha massa e smorzamento
  - K non è lineare rispetto allo spostamento





Modelli di sistemi meccanici: elementi di base - 3

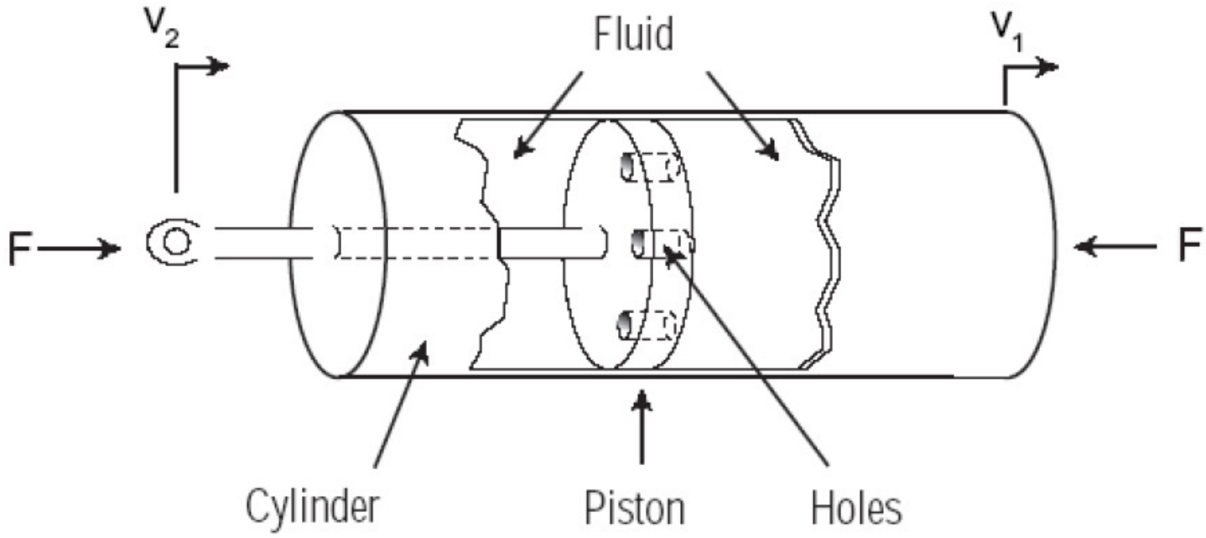
- Smorzatore (*damper*): simbologia e relazione matematica, nell'ipotesi di smorzamento *viscoso,* cioè dovuto all'**attrito** (proporzionale alla velocità)



$$f(t) = B\frac{d}{dt}\left(x_1(t) - x_2(t)\right) = BD\left(x_1(t) - x_2(t)\right)$$

Modelli di sistemi meccanici: elementi di base - 4

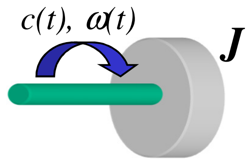
- Smorzatore (*damper*) **realmente**:
  - Il pistone ha una certa massa non trascurabile
  - Il fluido introduce effetti elastici



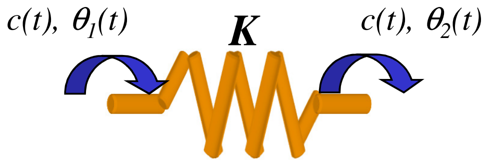
Modelli di sistemi meccanici: elementi di base - 5

- Analogamente per sistemi in moto rotatorio:
  - **Forze** ⟹ **Coppie**
  - **Masse** ⟹ **Momenti di inerzia (o Inerzie)**

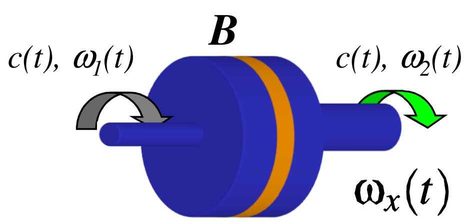
$$c(t) = J\ddot{\theta}(t)$$



$$c(t) = K[\theta_1(t) - \theta_2(t)]$$



$$c(t) = B[\omega_1(t) - \omega_2(t)]$$



$$\omega_x(t) = \dot{\theta}_x(t)$$

Modelli di sistemi meccanici: elementi di base - 8

Le unità di misura delle grandezze meccaniche nel sistema SI sono:

- Variabili:
- [f] = N, Newton;
- [x] = m, metri;
- $[\dot{x}]$ = m/sec, velocità;
- $[\ddot{x}]$ = m/sec^2, accelerazione.

Variabili (caso rotatorio):
[c] = N m;
$[\theta]$ = rad;
$[\dot{\theta}]$ = rad/sec;
$[\theta]$ = rad/sec^2.

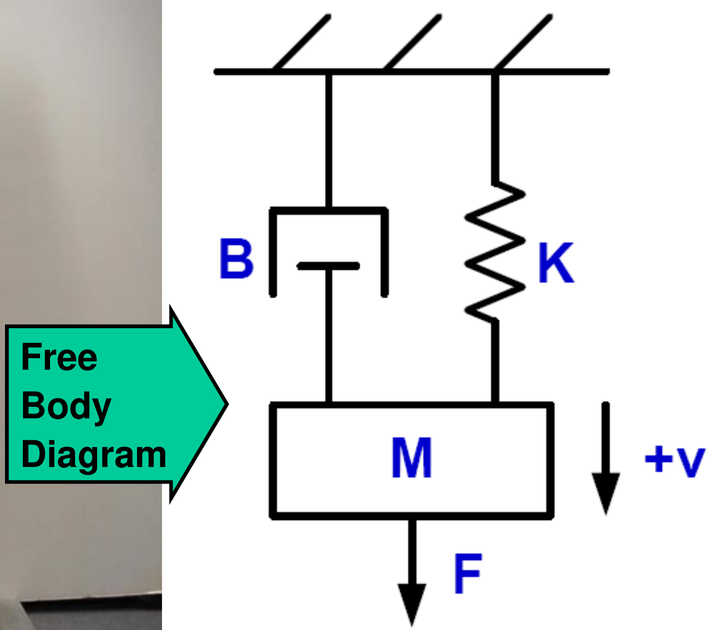
- Parametri:
- [M] = kg, chilogrammi;
- [K] = N/m, coefficiente di rigidezza;
- [B] = N sec/m, coefficiente di attrito viscoso.

Parametri (caso rotatorio):
[J] = kg m^2;
[K] = Nm /rad, coefficiente di rigidezza torsionale;
[B] = Nm sec/rad, coefficiente di attrito torsionale.

N.B.: più precisamente, i radianti sono **numeri puri** (rapporto tra lunghezza di un arco e lunghezza del raggio di tale arco), quindi <u>senza</u> unità di misura…
Nel SI sono definiti *unità di misura derivata* (o *ausiliaria*)

Esempi di modellazione di sistemi meccanici

- Gruppo massa-molla-smorzatore (verticale):



Esempi di modellazione di sistemi meccanici - 1

- Gruppo massa-molla-smorzatore (verticale, $\dot{z} = v$):

$$\underbrace{F_e = Kz}_{\text{Forza elastica}} \qquad \underbrace{F_a = Bv = B\dot{z}}_{\text{Forza dello smorzatore}}$$

$$\underbrace{F - F_e - F_a = M\ddot{z}}_{\text{Legge di Newton}} \;\Rightarrow\; M\ddot{z} + B\dot{z} + Kz = F$$

- Si è ottenuta **una singola equazione differenziale del secondo ordine**, che va ricondotta a **due equazioni del primo ordine** per arrivare al modello sistemistico A,B,C,D (di ordine 2)

(Perché di ordine 2? Oltre che analizzare le equazioni, è bene contare gli elementi *accumulatori di energia*: <u>masse</u> e <u>molle</u>. In questo caso c'è appunto 1 massa + 1 molla = 2 variabili di stato!)

Esempi di modellazione di sistemi meccanici - 1

- Si noti ora che ponendo $\dot{z} = v$ l'equazione fornita dalla legge di Newton è del primo ordine rispetto a *z*, ma in funzione di *z* e *v* (non derivate):

$$M\dot{v} + Bv + Kz = F$$

- D'altra parte, la <u>stessa assegnazione $\dot{z} = v$ è una equazione differenziale</u>..
- La scelta delle variabili di stato che permettono la riscrittura del modello in forma matriciale è quindi $x_1 = z,\ x_2 = v$

(**NOTA BENE**: in questo come in tutti gli esempi precedenti o successivi, l'ordine dei pedici assegnati alle variabili di stato è indifferente, purchè mantenuto poi con coerenza..)

Esempi di modellazione di sistemi meccanici - 1

- Considerando inoltre la forza *F* come ingresso e lo spostamento *z* come uscita: $u = F$ e $y = z = x_1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) & \longleftrightarrow \quad \dot{z} = v \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{K}{M}x_1(t) - \frac{B}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}u(t) & \longleftrightarrow \quad \text{Legge di Newton} \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

- **NOTA BENE**: si osservi che la prima riga del modello *contiene* un termine *mancante* (!?).. riscrivendola così

$$\dot{x}_1(t) = 0\,x_1(t) + 1\,x_2(t)$$

sarebbe più evidente la struttura matriciale cercata

Esempi di modellazione di sistemi meccanici - 2

- Gruppo massa-molla-smorzatore (verticale), modello matriciale:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{D}\,u(t) \end{cases}$$

N.B.: l'ingresso (la forza F) nel caso considerato sarà sempre diverso da zero, per via della forza peso F = M g, dovuta all'accelerazione di gravità g…

Esempi di modellazione di sistemi meccanici - 2a

- **NOTA BENE**: per i sistemi meccanici con masse connesse a parti elastiche (i.e. molle) è tipico definire coppie di variabili di stato costituite da uno spostamento e dalla relativa velocità, quindi tali per cui la derivata della prima corrisponde alla seconda:

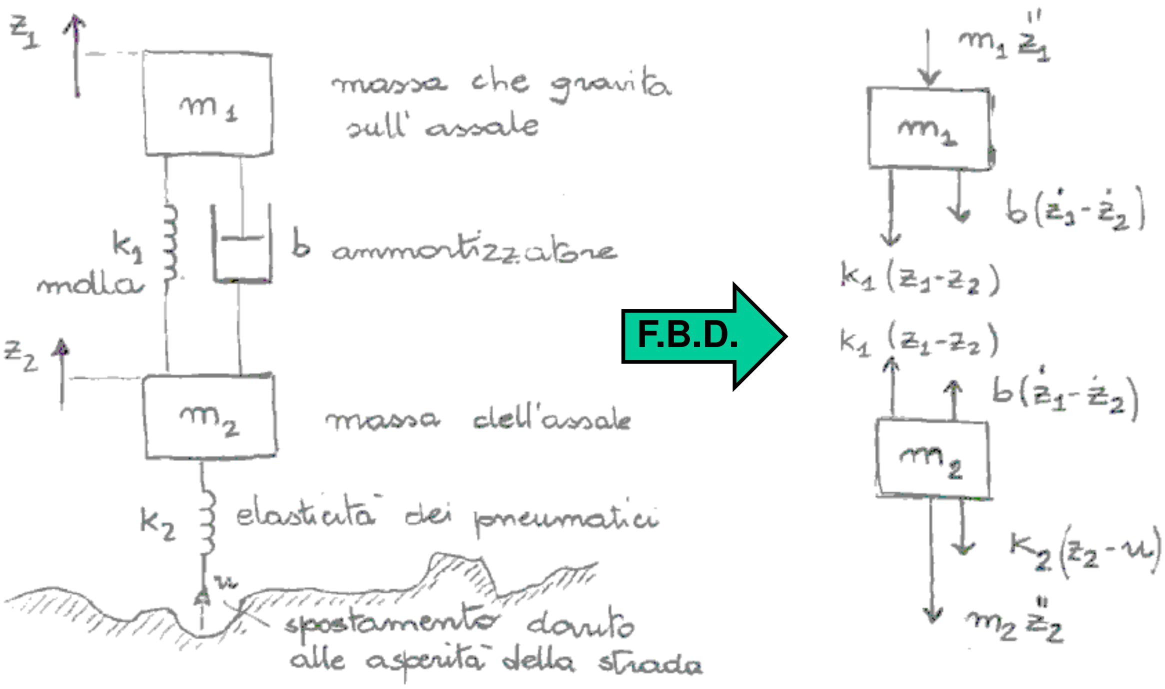
$$x_1 = z \qquad x_2 = \dot{z} = v$$

$$\boxed{\dot{x}_1 = x_2}$$ equazione differenziale!

- Come osservato, la scelta stessa delle variabili di stato determina una delle equazioni differenziali caratteristiche del modello, prima ancora che l'applicazione delle leggi della fisica..

Esempi di modellazione di sistemi meccanici - 3

- Sospensione di un autoveicolo:



Esempi di modellazione di sistemi meccanici - 4

- Sospensione di un autoveicolo:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + b(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_1 (z_1 - z_2) = 0 \\ m_2 \ddot{z}_2 - b(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_1 (z_1 - z_2) + k_2 (z_2 - u) = 0 \end{cases}$$

- Ponendo $x_1 = z_1$, $x_2 = \dot{z}_1$, $x_3 = z_2$, $x_4 = \dot{z}_2$ e $y = [z_1\ z_2]^T$

$$\begin{cases} m_1 \dot{x}_2 + b(x_2 - x_4) + k_1 (x_1 - x_3) = 0 \\ m_2 \dot{x}_4 - b(x_2 - x_4) - k_1 (x_1 - x_3) + k_2 (x_3 - u) = 0 \end{cases}$$

+ ovviamente: $\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_3 = x_4$

Esempi di modellazione di sistemi meccanici - 5

- Sospensione di un autoveicolo, modello matriciale:

$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix}}^{A} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix}}^{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x$$

NOTA: D = 0 → sistema puramente dinamico

Considerazioni modellistiche ed energetiche

- Nei modelli matematici dei sistemi meccanici, la legge di Newton impone equazioni differenziali di secondo grado, dalle quali si determinano posizioni e velocità come variabili di stato
- Anche nei sistemi meccanici, vi sono elementi che **immagazzinano energia**: le masse in movimento (**energia cinetica**) e le molle compresse (**energia potenziale**)
- In questo contesto, la potenza è espressa dal prodotto tra forza (coppia) applicata e velocità:

  P = F v o **P =** $c\omega$

Considerazioni modellistiche ed energetiche - 1

- Negli smorzatori (ideali) **NON** c'è accumulo di energia, ma **dissipazione di potenza**, in quanto:

  $$P = F\,v = B\,v^2$$

- L'elemento è analogo ad una resistenza elettrica, in questo caso la dissipazione di potenza determina un riscaldamento del fluido nello smorzatore
- Per masse e molle, le analogie sono determinate dal tipo di energia immagazzinata:

$$\boxed{E_{cin} = \frac{1}{2}Mv^2} = \frac{p^2}{2M}$$

Energia cinetica ($p = Mv$: quantità di moto)

$$\boxed{E_{pot} = \frac{1}{2}Kx^2}$$

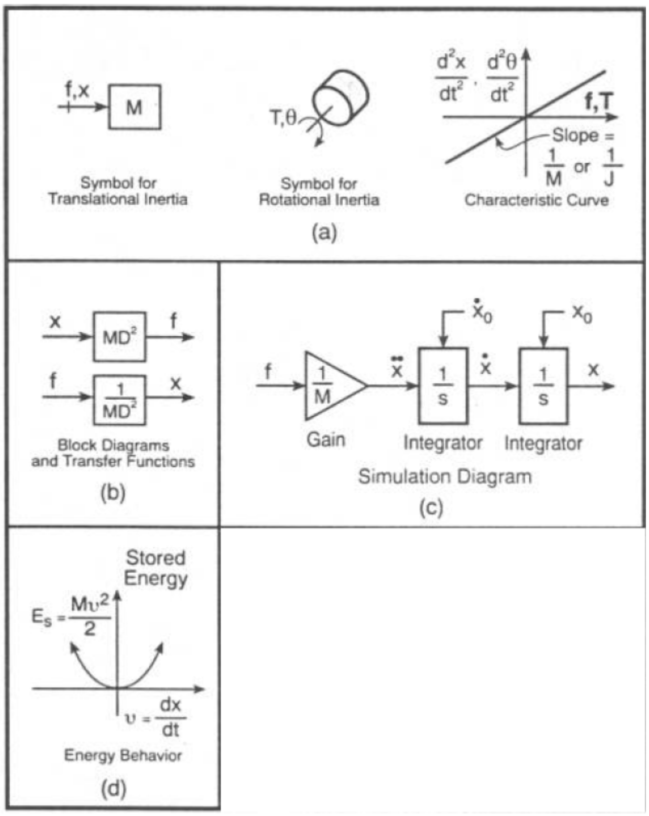
Energia potenziale

Considerazioni modellistiche ed energetiche - 2

- Dall'analogia tra il tipo di energia accumulata, le **masse** sono analoghe agli **induttori** e le **molle** ai **condensatori** (nonostante le similitudini tra i simboli grafici possano fare pensare il contrario! L'induttanza *sembra* una molla…)
- Anche nel caso meccanico, esiste una scelta alternativa per rappresentare lo **stato** di una massa, cioè la **quantità di moto**
- Questa scelta faciliterebbe la modellazione nei casi in cui la massa non fosse costante (che però avrebbero modelli matematici nonlineari o non stazionari)

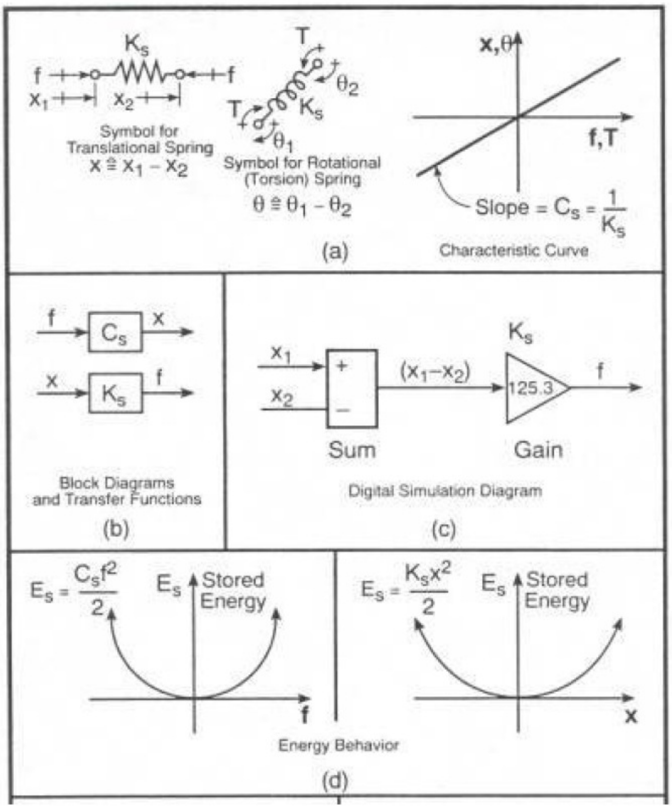
Sistemi meccanici: riassumendo

Masse/Inerzie:



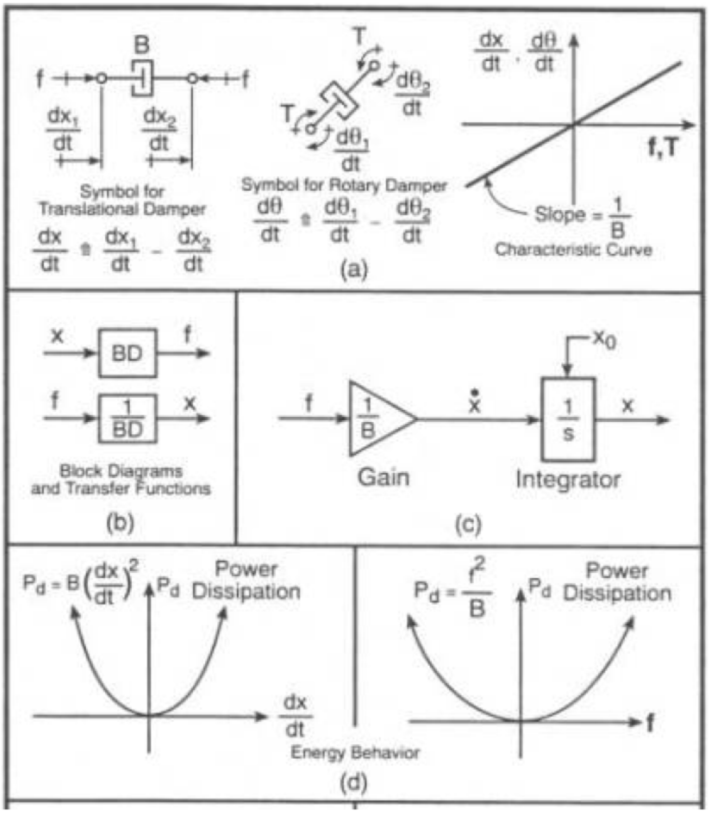
Sistemi meccanici: riassumendo - 1

Molle:



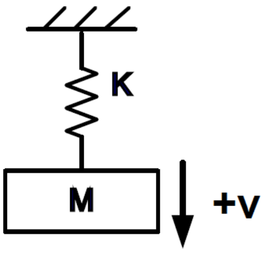
Sistemi meccanici: riassumendo - 2

Smorzatori:



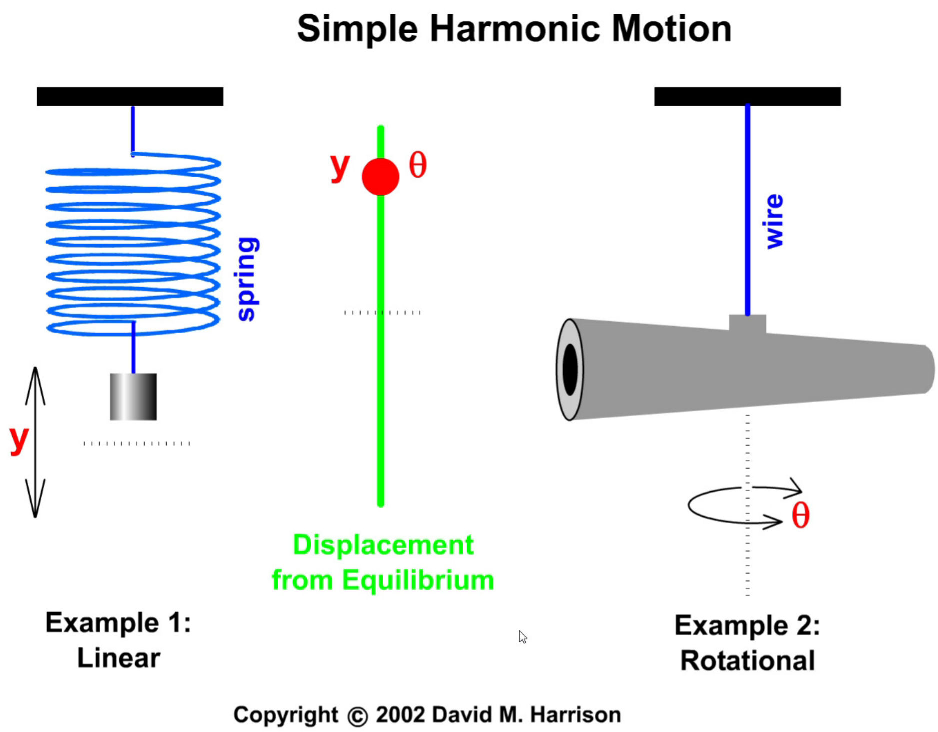
Sistemi meccanici: esempio e analisi energetica

- Sistema massa-molla *puro* (idealmente senza attriti e senza gravità)



- Se la molla è inizialmente compressa (o estesa), la forza elastica imprime una accelerazione alla massa
- Quando la molla arriva alla sua lunghezza di riposo, la velocità della massa non si annulla, quindi quest'ultima si muoverà fino alla posizione pari a quella di compressione (o estensione) iniziale della molla, MA di segno opposto
- Il ciclo si ripete con tutte le variabili di segno opposto…

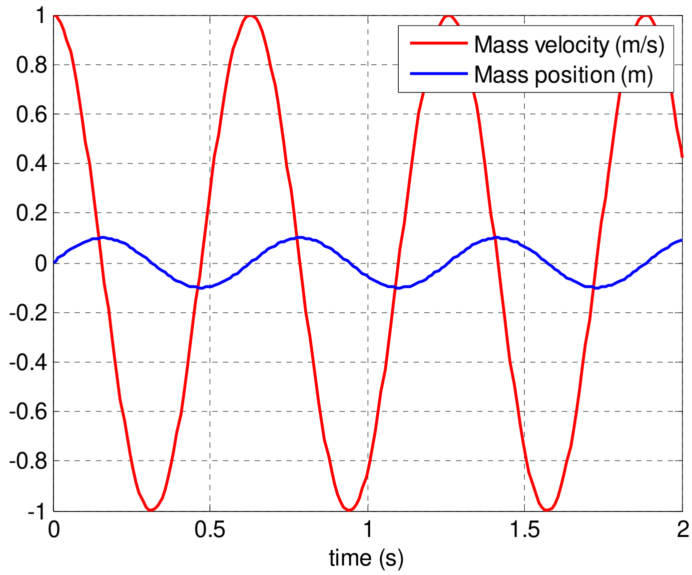
Sistemi meccanici: esempio e analisi energetica - a



http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/

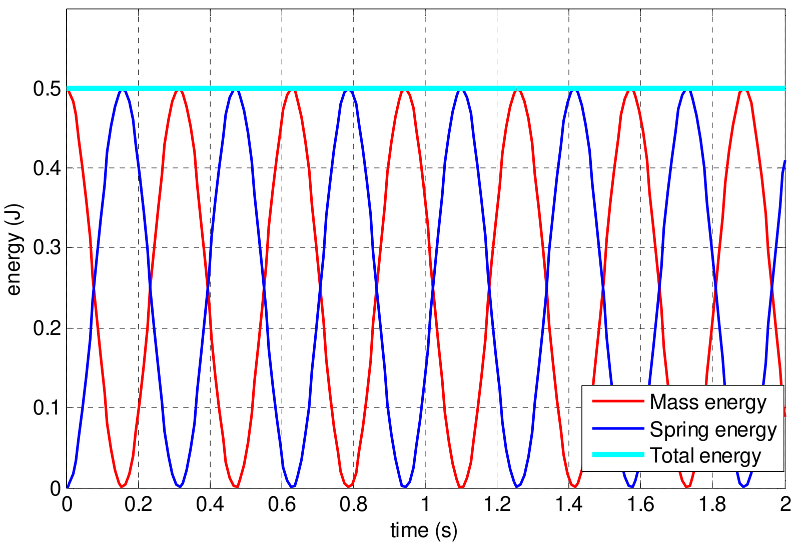
Sistemi meccanici: esempio e analisi energetica - 1

- Andamento sinusoidale/cosinusoidale di posizione e velocità della massa



Sistemi meccanici: esempio e analisi energetica - 2

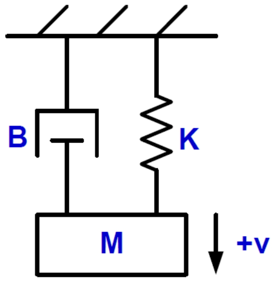
- Andamento di energia cinetica della massa ed energia potenziale della molla



NOTA: l'energia totale è perfettamente costante, **MA** *rimbalza* tra la massa e la molla!

Sistemi meccanici: esempio e analisi energetica - 3

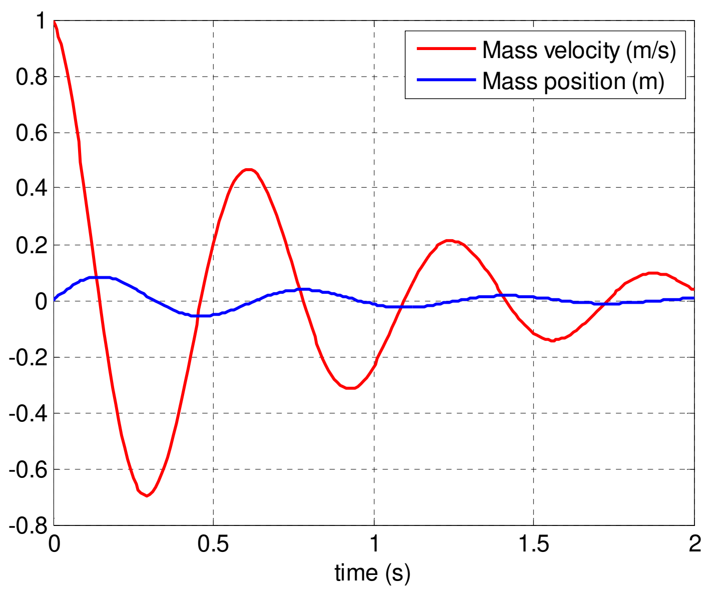
- Introducendo un elemento dissipativo…



- Lo smorzatore riduce la forza impressa dalla molla e quindi l'accelerazione, in misura tanto maggiore quanto più è elevata la velocità della massa
- Pertanto, la massa non riuscirà ad estendere (o comprimere) la molla nella stessa misura in cui essa è compressa (o estesa) inizialmente

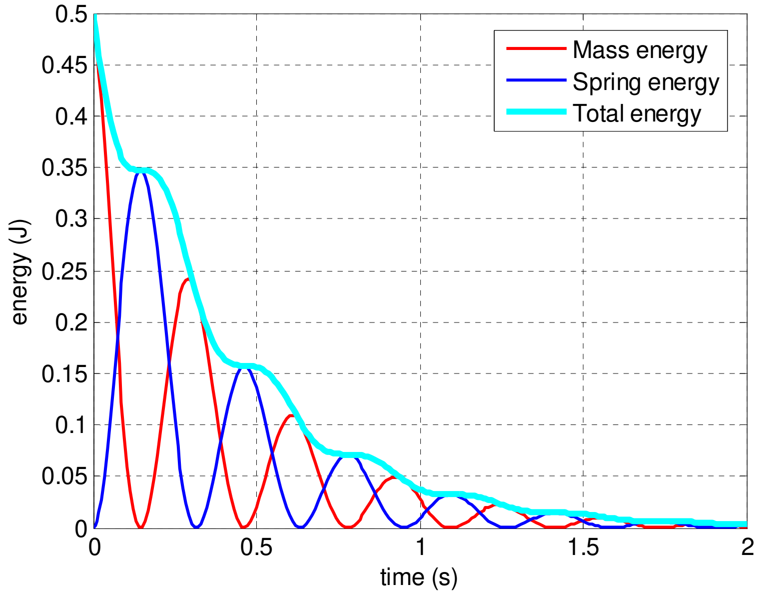
Sistemi meccanici: esempio e analisi energetica - 4

- L'andamento di posizione e velocità tende a zero per t → ∞



Sistemi meccanici: esempio e analisi energetica - 5

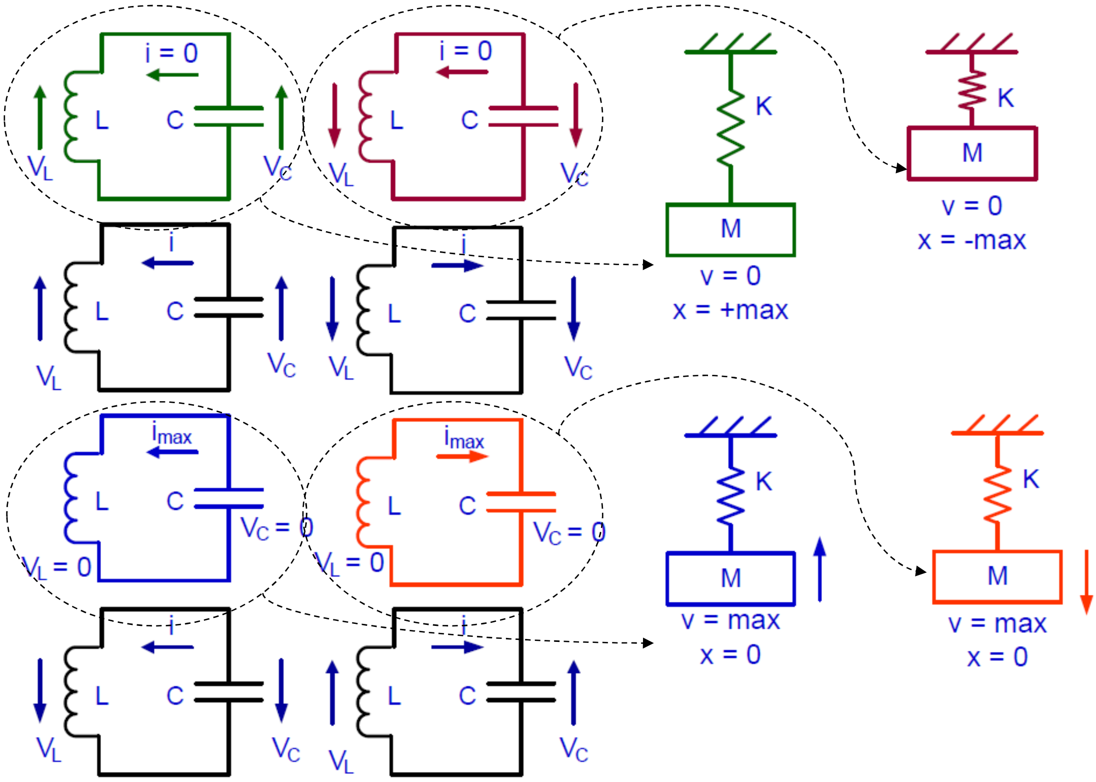
- L'energia totale nel sistema tende anch'essa a 0



Sistemi meccanici: analisi energetica e stabilità

- Cosa è successo? Ovviamente l'energia mancante si disperde nello smorzatore, il cui attrito provoca dissipazione termica
- Come per i circuiti LC/RLC, possiamo dire:
  - massa-molla: **semplicemente stabile**
  - massa-molla-smorzatore: **asintoticamente stabile**
- In generale, **la stabilità asintotica si ottiene grazie agli effetti dissipativi dell'attrito**, senza i quali un sistema meccanico è al più semplicemente stabile
- L'instabilità di un sistema meccanico può essere causata dalla gravità (che fa cadere gli oggetti in equilibrio… *precario* ☹)

Analogia circuito LC e sistema massa-molla

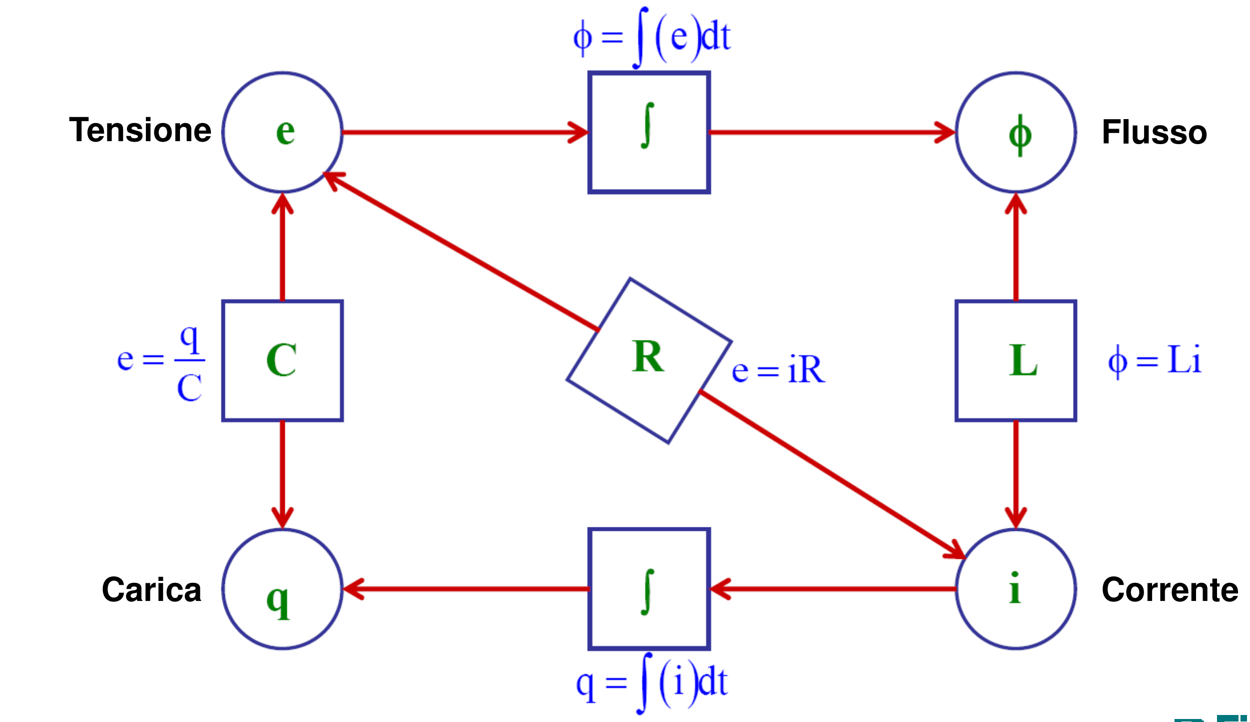


Elenco completo di analoghi elettrici / meccanici

- Forza ←→ Tensione
- Velocità ←→ Corrente
- Traslazioni/Rotazioni ←→ Carica elettrica
- Quantità di moto ←→ Flusso magnetico
- Smorzatori ←→ Resistenze
- Masse ←→ Induttori
- Molle ←→ Condensatori

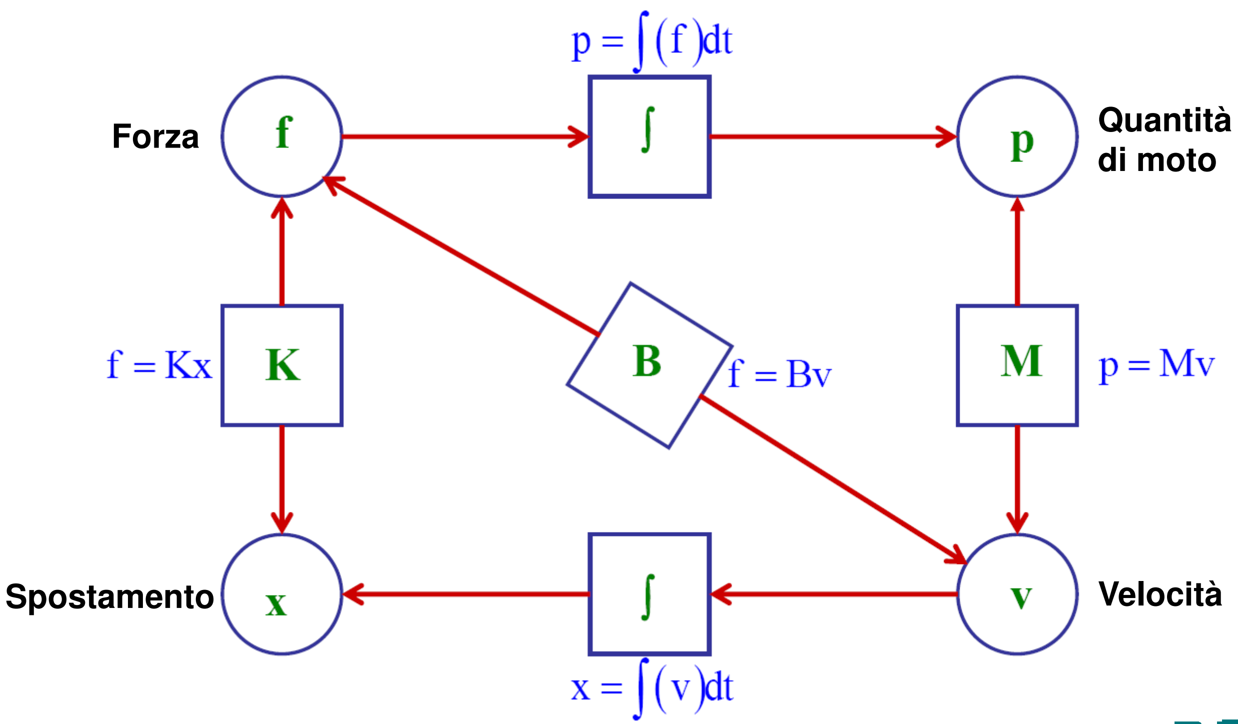
Analogie tra modelli di sistemi fisici

- Struttura generale per la modellazione di **circuiti elettrici**:



Analogie tra modelli di sistemi fisici - 1

- Struttura generale per la modellazione di **sistemi meccanici**:



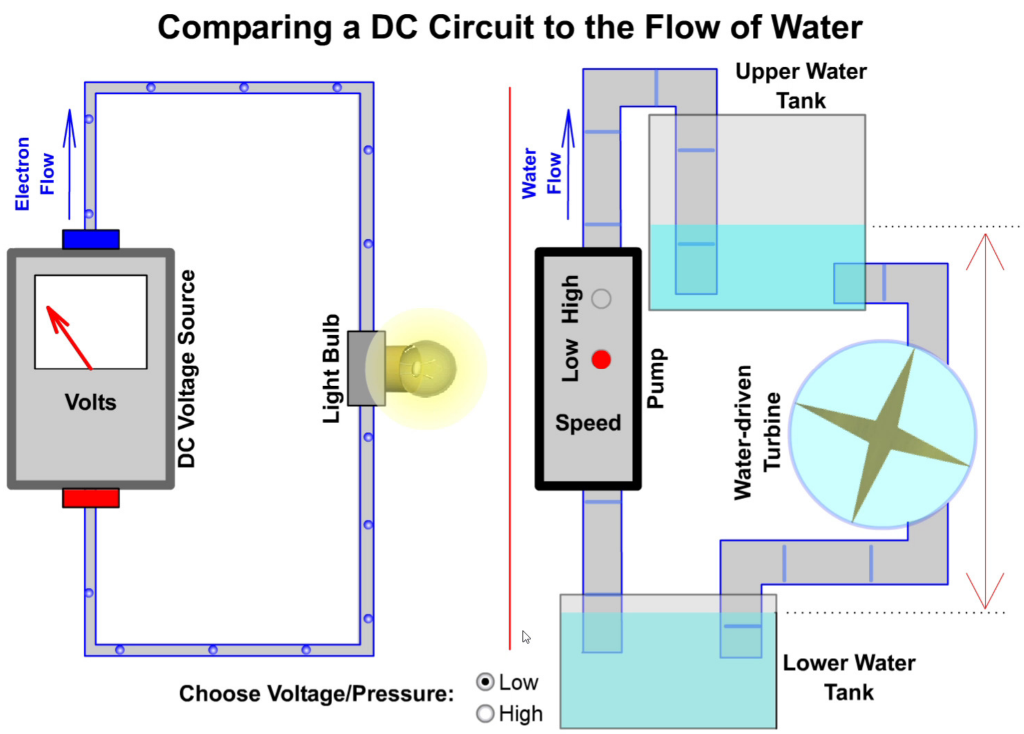
Analogie tra modelli di sistemi fisici - 2

- Le analogie e la struttura delle relazioni tra gli elementi di base di una certa tipologia di sistemi fisici, basate come detto su considerazioni energetiche, si estendono a qualunque contesto fisico (termodinamica, fluidodinamica,..)

- Ad esempio, nei sistemi fluidodinamici si evidenzia l'analogia tra:
  - **Tensione** (forza) → **Pressione**
  - **Corrente** (velocità) → **Portata** (o *flusso*)

- Il prodotto di queste due grandezze è ancora una potenza, esiste la resistenza fluidica e l'accumulo di pressione e portata (serbatoi)

Analogia tra circuiti elettrici ed idraulici



http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/

Interconnessione tra sistemi elettrici e meccanici

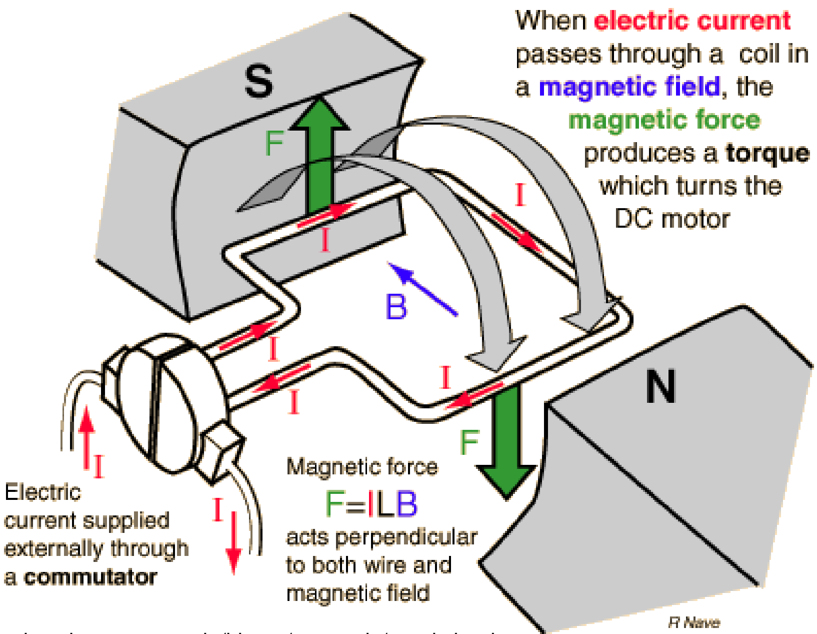
- Oltre alle analogie, è noto che tramite motori e generatori elettrici è possibile lo **scambio energetico** tra i due contesti fisici:

Circuito elettrico ⟷ (Potenza Elettrica) ⟷ Accoppiamento elettromagnetico ⟷ (Potenza Meccanica) ⟷ Sistema meccanico

- L'accoppiamento elettromagnetico avviene grazie alla presenza simultanea di cariche elettriche in movimento (corrente) e di un campo magnetico perpendicolare alla direzione di tale movimento

Interconnessione tra sistemi elettrici e meccanici - 1

- Principio base di una macchina elettrica a corrente continua:



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/magnetic/motdc.html

Interconnessione tra sistemi elettrici e meccanici - 2

- Macchina a corrente continua ideale ➔ **giratore**
- **Giratore:** elemento simile a trasformatori/riduttori, ma che trasforma la potenza *girando* il rapporto tra le variabili associate: tensione ←→ velocità, corrente ←→ forza
- In base alla **scelta della causalità** si avrà un **motore** o un **generatore** (i.e. una *dinamo*!)

Interconnessione tra sistemi elettrici e meccanici - 3

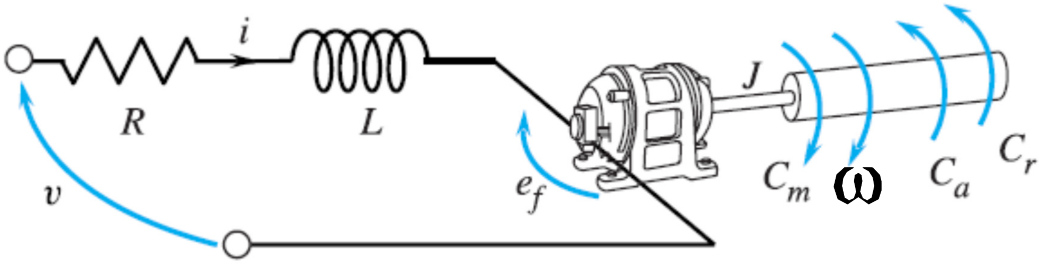
- Relazioni caratteristiche del **giratore ideale** (caso rotativo):

$$e_f(t) = k_m\,\dot{\theta}(t) \qquad C_m(t) = k_m\,i(t)$$

- e_f : tensione contro-elettromotrice (*Back ElectroMotive Force*, **BEMF**)
- C_m : coppia meccanica del motore
- Il parametro k_m (ipotizzato costante) è detta indifferentemente <u>costante di coppia</u> o anche <u>costante di BEMF</u>

Interconnessione tra sistemi elettrici e meccanici - 4

- Nel caso reale un motore elettrico a corrente contiene intrinsecamente un circuito elettrico (resistenza / induttanza) ed una struttura meccanica (inerzia ed attrito):



Interconnessione tra sistemi elettrici e meccanici - 5

- Modello matematico completo del motore elettrico a corrente continua ($\omega(t) = \dot{\theta}(t)$):
  - e_f = BEMF e C_m = coppia motrice (giratore ideale)
  - C_a = coppia di attrito (viscoso) $= B\dot{\theta}(t) = B\omega(t)$
  - C_r = coppia di carico (ingresso di disturbo)
  - Applicando la legge di Kirchhoff alla maglia + il bilancio delle coppie all'albero meccanico:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{k_m}{L}\omega(t) + \frac{1}{L}v(t)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k_m}{J}i(t) - \frac{B}{J}\omega(t) - \frac{1}{J}C_r(t)$$

Interconnessione tra sistemi elettrici e meccanici - 6

- Modello matematico del motore elettrico a corrente continua in forma matriciale: $x_1=i$, $x_2=\omega$, $u=[v\ C_r]^T$

A B

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k_m}{L} \\ \frac{k_m}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} u(t)$$

- Le uscite?? Generalmente sia velocità che corrente sono misurabili, quindi:

$$y(t) = x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

C

NOTA: D = 0 ➔ sistema puramente dinamico

Considerazioni conclusive sui modelli differenziali

- Si è visto che per il circuito RLC e per il gruppo massa-molla-smorzatore (entrambi *Single-Input Single-Output, SISO*) il modello matematico si può anche scrivere con <u>una unica equazione differenziale di ordine due</u>, che lega direttamente **l'ingresso** e **l'uscita**:

$$LC\ddot{v}_C + RC\dot{v}_C + v_C = v_i \qquad M\ddot{z} + B\dot{z} + Kz = F$$

$y = v_C$
$u = v_i$

$y = z$
$u = F$

$$a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = u$$

Considerazioni conclusive sui modelli differenziali

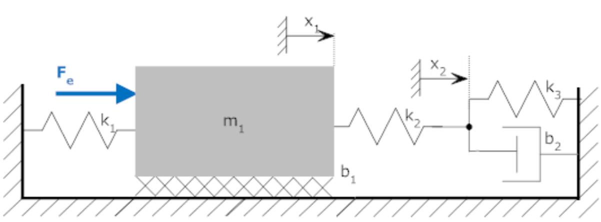
- Si può dimostrare che per qualsiasi sistema dinamico LTI (a tempo continuo) di **ordine *n*** e con ***m* uscite** il modello differenziale può essere scritto come ***m* equazioni differenziali di ordine al più pari ad *n***,
- Se **SISO**: una sola equazione differenziale di ordine ***n*** nella quale compaiono solo l'uscita (e le sue derivate) e l'ingresso (e le sue derivate):

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_n \frac{d^n u}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \ldots + b_0 u$$

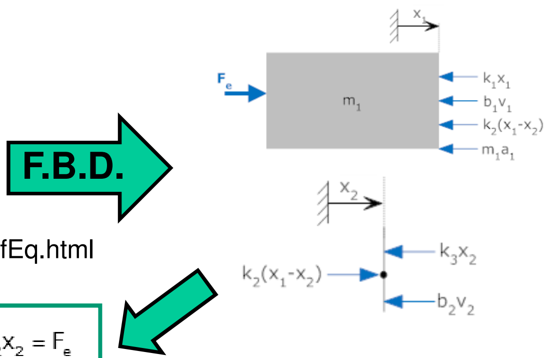
NOTA: in tale modello ingresso-uscita non compaiono (ovviamente) le variabili di stato. Tuttavia, la rielaborazione delle equazioni ottenute dalle leggi fisiche per ottenere questo tipo di rappresentazione è solitamente molto complessa per sistemi di ordine > 2. Per tale motivo, si preferirà nel seguito proseguire l'analisi con modelli ingresso-stato-uscita (A,B,C,D)

Considerazioni conclusive sui modelli differenziali

- **Esempio**, solo per evidenziare la complessità di questo approccio alternativo (**NON** applicato nel resto del corso)



http://lpsa.swarthmore.edu/Representations/SysRepDiffEq.html



$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + (k_2 + k_1)x_1 - k_2x_2 &= F_e \\ b_2\dot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2x_1 &= 0 \end{aligned}$$

.. dopo alcuni passaggi …

$$\left(\frac{b_2m_1\dddot{x}_1 + b_2b_1\ddot{x}_1 + b_2(k_2+k_1)\dot{x}_1 - b_2\dot{F}_e}{k_2}\right) + \left(\frac{(k_2+k_3)m_1\ddot{x}_1 + (k_2+k_3)b_1\dot{x}_1 + (k_2+k_3)(k_2+k_1)x_1 - (k_2+k_3)F_e}{k_2}\right) - k_2x_1 = 0$$

$$b_2m_1\dddot{x}_1 + b_2b_1\ddot{x}_1 + b_2(k_2+k_1)\dot{x}_1 - b_2\dot{F}_e + (k_2+k_3)m_1\ddot{x}_1 + (k_2+k_3)b_1\dot{x}_1 + (k_2+k_3)(k_2+k_1)x_1 - (k_2+k_3)F_e - k_2^2x_1 = 0$$

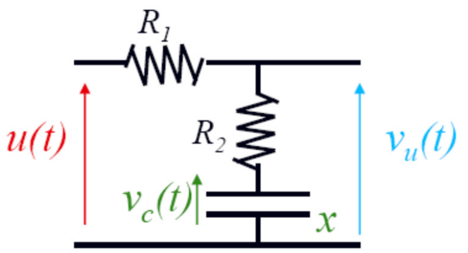
$$b_2m_1\dddot{x}_1 + (b_2b_1 + k_2m_1 + k_3m_1)\ddot{x}_1 + (b_2k_2 + b_2k_1 + b_1k_2 + b_1k_3)\dot{x}_1 + (\cancel{k_2^2} + k_3k_2 + k_2k_1 + k_3k_1)x_1 - \cancel{k_2^2}x_1 = b_2\dot{F}_e + (k_2+k_3)F_e$$

modello ingresso-uscita finale

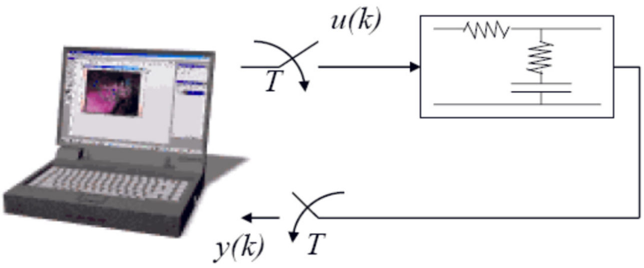
$$\boxed{b_2m_1\dddot{x}_1 + (b_2b_1 + k_2m_1 + k_3m_1)\ddot{x}_1 + (b_2k_2 + b_2k_1 + b_1k_2 + b_1k_3)\dot{x}_1 + (k_3k_2 + k_2k_1 + k_3k_1)x_1 = b_2\dot{F}_e + (k_2+k_3)F_e}$$

Modellazione di sistemi a tempo discreto (cenno)

- Si ottengono ad esempio (**MA NON SOLO**) quando un sistema fisico (a tempo continuo) viene accoppiato ad un sistema di controllo costituito da un **elaboratore digitale**

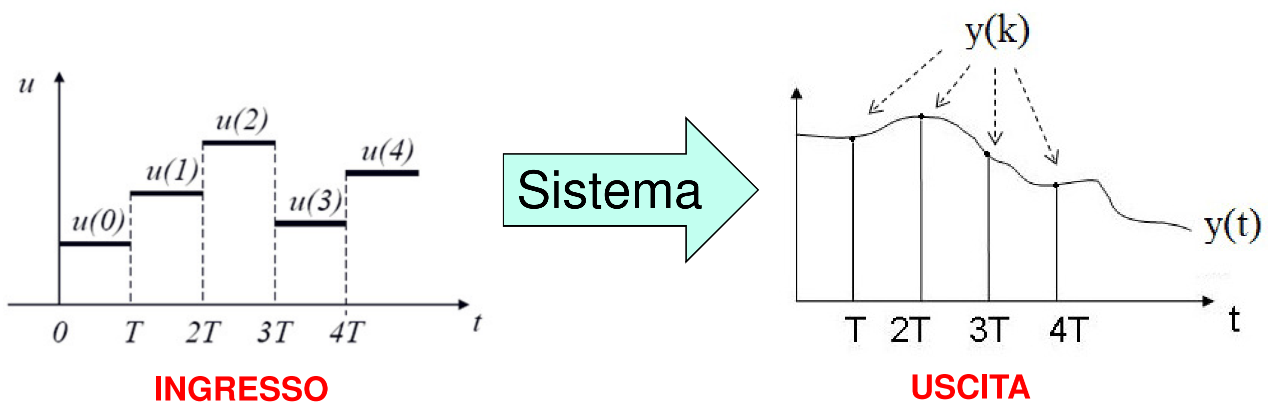


$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t) \\
y(t) &= cx(t) + du(t)
\end{aligned}
$$



Modellazione di sistemi a tempo discreto (cenno) - 1

- **Discretizzazione (campionamento):** si suppone che all'ingresso del sistema a tempo continuo venga applicata una funzione costante a tratti e che l'uscita venga campionata negli stessi istanti kT in cui varia l'ingresso



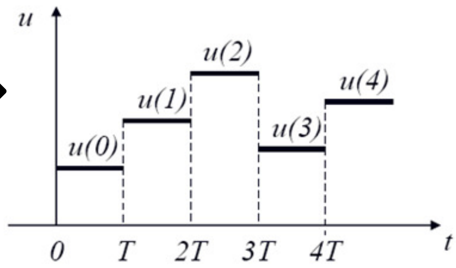
Modellazione di sistemi a tempo discreto (cenno) - 2

- Nel caso **MIMO:**

modello differenziale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

N.B.: le matrici A,B,C,D e A_d,B_d,C_d,D_d hanno le stesse dimensioni, ma gli elementi possono essere molto diversi!



modello alle *differenze finite*

$$\begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \\ y(k) = C_d x(k) + D_d u(k) \end{cases}$$

ELEMENTI DI TEORIA DEI SISTEMI
- Definizioni
- Modelli di sistemi ingegneristici

FINE