

# Fondamenti di Automatica

## Controlli Automatici

---

### Raccolta dei lucidi preparati a mano libera dal Prof. Sergio Beghelli

---

La scansione di questi lucidi è stata effettuata al fine di mantenere una memoria storica degli insegnamenti svolti dal Prof. Beghelli nel corso di oltre 35 anni di carriera, in tre differenti atenei (Ferrara, Bologna, Ancona), fino al suo ritiro dal servizio nel luglio del 2011.

**Questa raccolta è dedicata ovviamente a Sergio Beghelli, come docente e come persona, ma anche a tutti gli studenti che in questi 35 anni hanno avuto il privilegio di seguire i suoi insegnamenti, sapendo che per tutti loro sarà cosa gradita avere la possibilità di vedere *online* tali contenuti. Anche se in futuro questi ultimi dovessero essere “superati” ai fini didattici e per motivi tecnologici (da “fredde” slide preparate al computer), non lo saranno certo per la qualità.**

Sergio Beghelli, laureato in Ingegneria Elettronica nel 1972, ha tenuto i corsi di “Controlli Automatici” e, più recentemente, di “Fondamenti di Automatica” presso la Facoltà di Ingegneria di Ferrara fin dalla nascita del Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica nel 1991, corrispondente alla genesi dell’attuale classe dei Corsi di Laurea nell’area di Ingegneria dell’Informazione presso detta Facoltà.

In precedenza, Sergio Beghelli ha tenuto per oltre 15 anni il corso di “Teoria dei Sistemi” per gli allievi Ingegneri Elettronici della Facoltà di Ingegneria di Bologna. Inutile dire che sia dall’Università di Ferrara che dall’Università di Bologna sono uscite diverse generazioni di studenti, molti dei quali ora tecnici e professionisti di eccellenza, le cui carriere hanno certamente beneficiato delle solide basi della teoria dei Sistemi e del Controllo e degli insegnamenti umani che Sergio Beghelli sa trasmettere.

Ferrara, 25 febbraio 2012

Marcello Bonfè e Silvio Simani

# FONDAMENTI DI AUTOMATICA

## Finalità del Corso

Il corso ha lo scopo di presentare le caratteristiche dei modelli impiegati per la descrizione matematica dei sistemi dinamici, ne discute le relative proprietà e fornisce gli strumenti fondamentali per l'analisi dei dispositivi di controllo in retroazione.

## Programma del Corso

### Modelli matematici per i sistemi dinamici.

Modelli a tempo continuo ed a tempo discreto, lineari e non lineari, stazionari e non stazionari. Modelli equivalenti e forma minima.

### Proprietà strutturali dei sistemi dinamici.

Raggiungibilità e controllabilità dello stato. Osservabilità e ricostruibilità dello stato. Stabilità rispetto a perturbazioni dello stato iniziale e dell'ingresso. Stati di equilibrio. .

### Sistemi dinamici lineari e stazionari.

Determinazione del moto e della risposta. Matrice di transizione e sue proprietà. Modi e loro stabilità. Risposta impulsiva. Passaggio dai modelli continui a quelli discreti. Cambiamenti di base nello spazio degli stati. Riduzione del sistema alla forma minima. Stabilità i.l.s.l. ed i.l.u.s. Assegnabilità degli autovalori con retroazione stato--ingresso ed uscita--ingresso. Osservatori asintotici dello stato. La retroazione dello stato stimato mediante un osservatore.

### Sistemi lineari e stazionari ad un ingresso ed una uscita

Funzioni di trasferimento e schemi a blocchi. Passaggio da un modello ingresso-stato-uscita alla funzione di trasferimento e viceversa. Risposte canoniche. Analisi armonica. Diagrammi di Bode. Sistemi a fase minima e formula di Bode. Proprietà generali dei sistemi in retroazione. Errori di regime e tipo di sistema. Stabilità dei sistemi in retroazione. Il criterio di Routh, il margine di ampiezza e di fase. Il luogo delle radici.

### Progettazione di dispositivi per la correzione della risposta

Specifiche nel dominio dei tempi e nel dominio delle frequenze. Progetto di reti correttrici antipatrici e ritardatrici. Sintonizzazione dei regolatori standard.

### Testi consigliati

Dispense redatte dal Docente.

G. Marro: "Controlli Automatici", Zanichelli, Bologna, 1992.

B.C. Kuo: "Automatic Control Systems", Prentice Hall, 1987.

P. Bolzern, R. Scattolini, N. Schiavoni : "Fondamenti di Controlli Automatici", McGraw Hill 1998

S. Beghelli: "Automatica, Esercizi commentati e risolti", Progetto Leonardo, Esculapio Editore, 1996.

# Introduzione

L'**automazione** è il complesso di tecniche volte a sostituire l'intervento dell'uomo nel controllo e nella gestione di processi, sistemi, dispositivi, impianti.

L'**ingegneria dei sistemi di controllo** si occupa della progettazione degli apparati preposti al controllo.

Il **controllo** è l'azione indirizzata a far assumere ad una o più grandezze del processo un determinato valore o, più in generale, una successione temporale di determinati valori.

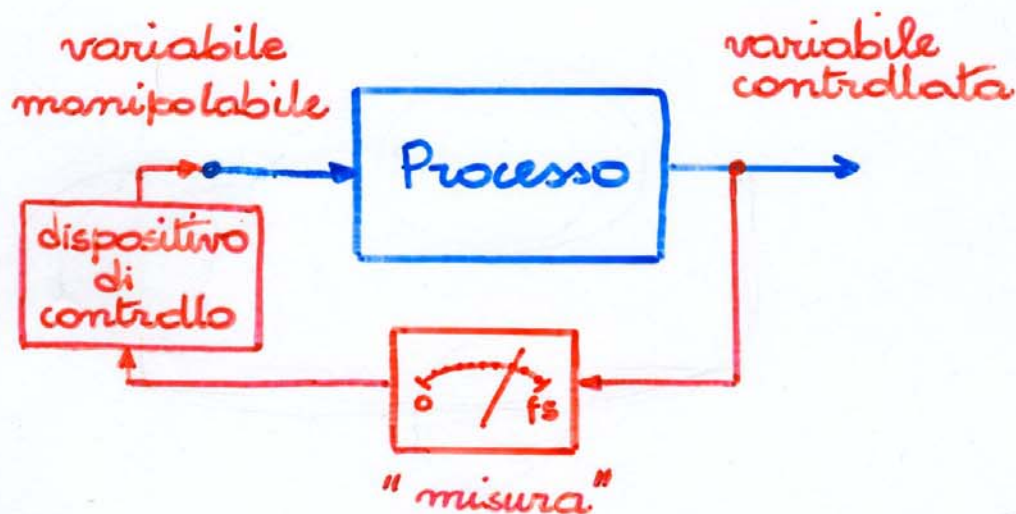
Le **variabili manipolabili** sono le grandezze del processo sulle quali si agisce per esercitare il controllo.

**Controllo manuale:** eseguito dall'uomo.

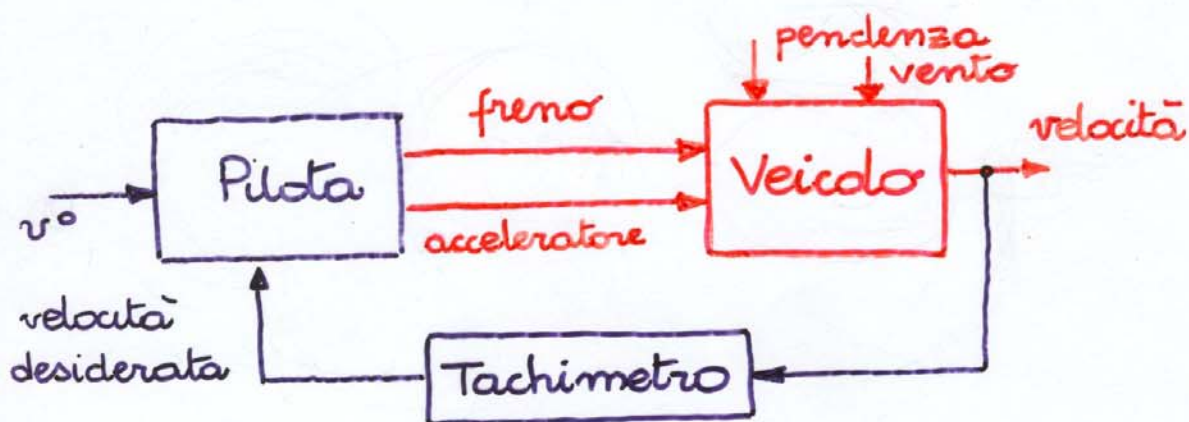
**Controllo automatico:** l'azione di controllo è svolta da un dispositivo opportunamente progettato.

La maggior parte dei dispositivi di controllo ha un funzionamento basato sul **Principio di retroazione:**

"la misura della variabile sotto controllo viene usata per intervenire sulle variabili manipolabili, che modificheranno a loro volta il valore della variabile sotto controllo"



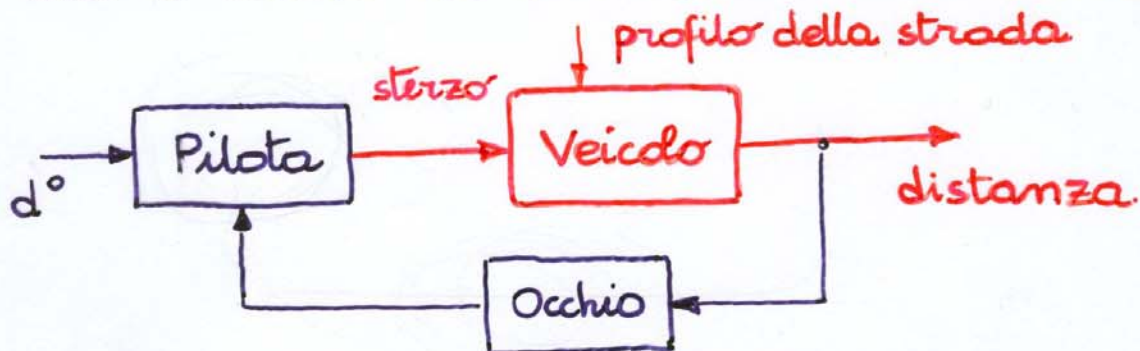
## Esempio : Controllo di velocità

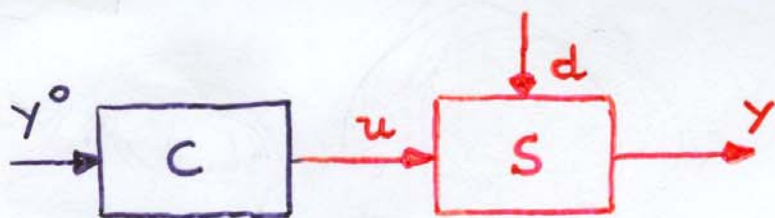


Pendenza, Vento : variabili che influenzano la variabile controllata (velocità) ma non sono manipolabili (disturbi)

## Esempio : Controllo di traiettoria

Si vuole mantenere costante la distanza tra il veicolo ed il bordo della strada





$S$  : sistema, processore, impianto, ...

$u$  : variabile manipolabile o di controllo

$y$  : variabile controllata

$d$  : disturbi

$C$  : dispositivo di controllo, controllore, regolatore

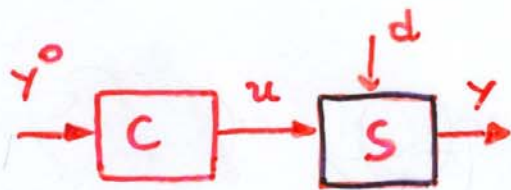
$y^0$  : andamento di riferimento (set point)

Problema: il controllore deve determinare ad ogni istante  $u$  in modo che  $y$  riproduca più fedelmente possibile  $y^0$  in presenza dei disturbi  $d$ .

Nel controllo di  $y$  il controllore può disporre di:

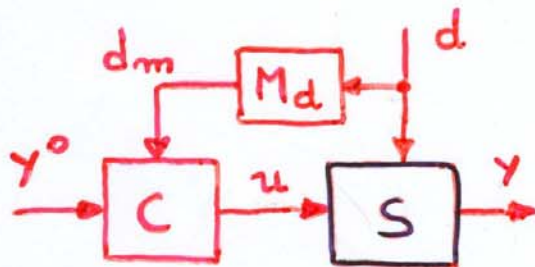
- misure di  $y$
- misure di  $d$
- un modello matematico di  $S$
- un modello matematico di  $d$

# Strategie di controllo



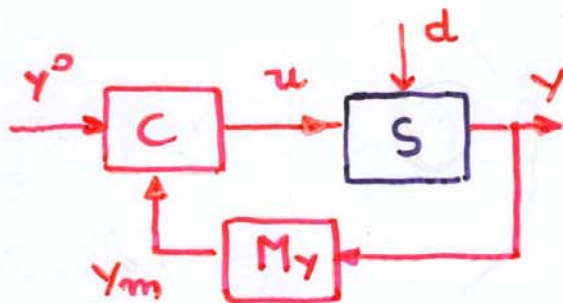
sistema di controllo ad **anello aperto** (open loop)

Non si dispone di misure di  $y$  e di  $d$

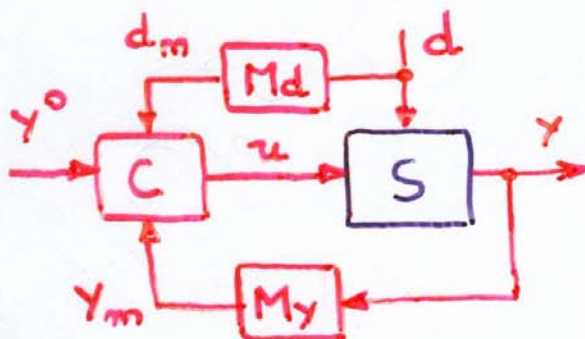


sistema di controllo ad **anello aperto** con **compensazione del disturbo**

Si suppongono disponibili misure di  $d$  che vengono utilizzate per ridurre l'effetto di  $d$  su  $y$



sistema di controllo ad **anello chiuso** (closed loop o in feedback o in retroazione)



sistema di controllo ad **anello chiuso** con **compensazione del disturbo**

## Progetto del Controllore

- scelta della strategia di controllo
- scelta della legge di controllo

$$u = u(\gamma^0, \gamma_m, d_m)$$

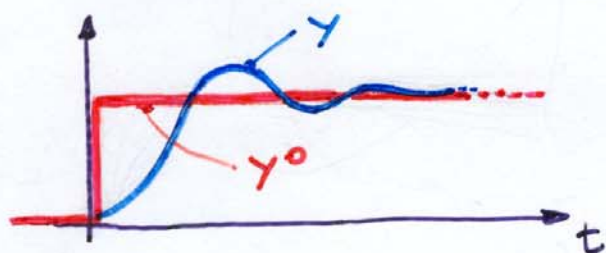
- realizzazione della legge di controllo con tecnologia elettronica, pneumatica, idraulica, ...

## Requisiti di un sistema di controllo

Scopo  $\gamma \sim \gamma^0$

### • Precisione statica

quando  $\gamma^0$  è costante anche  $\gamma$  deve essere costante e  $\gamma \sim \gamma^0$



### • Precisione dinamica

riguarda il transitorio che precede il raggiungimento del regime: deve spegnersi in fretta e con oscillazioni di ampiezza limitata



## • Robustezza

le specifiche sulla precisione statica e dinamica devono essere garantite anche quando il processo da controllare si discosta leggermente dal modello previsto.

## • Moderazione

i controllori non devono sollecitare il sistema con azioni troppo energiche o troppo irregolari.

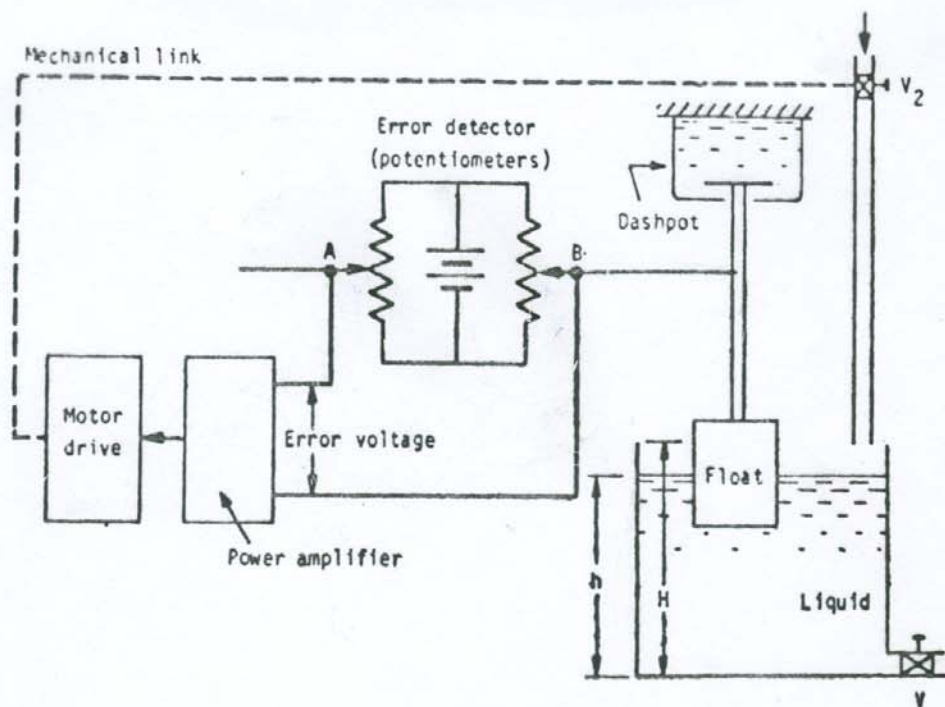
Usualmente

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}$$

## Esempi di applicazione

- Regolazione di velocità di macchine rotanti
- Controllo di macchine utensili : posizioni di slitte , velocità degli utensili
- Controllo di robot : posizione , velocità , coppie
- Guida automatica di veicoli
- Regolazione di impianti chimici (controllo di pressione , temperatura , livello , concentrazione , ... )
- Sospensioni attive , servosterzi , ABS
- Condizionamento d'ambiente
- Controllo dei sistemi ambientali
- Controllo dei sistemi economici

# Esempio

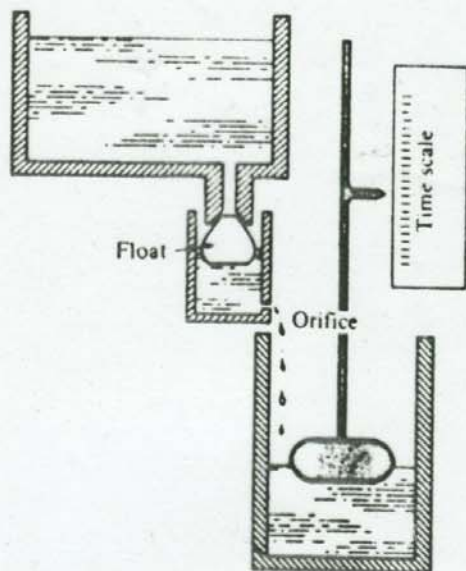


Automatic tank-level control system.

Controllo automatico in retroazione  
per il livello

## Cenni storici

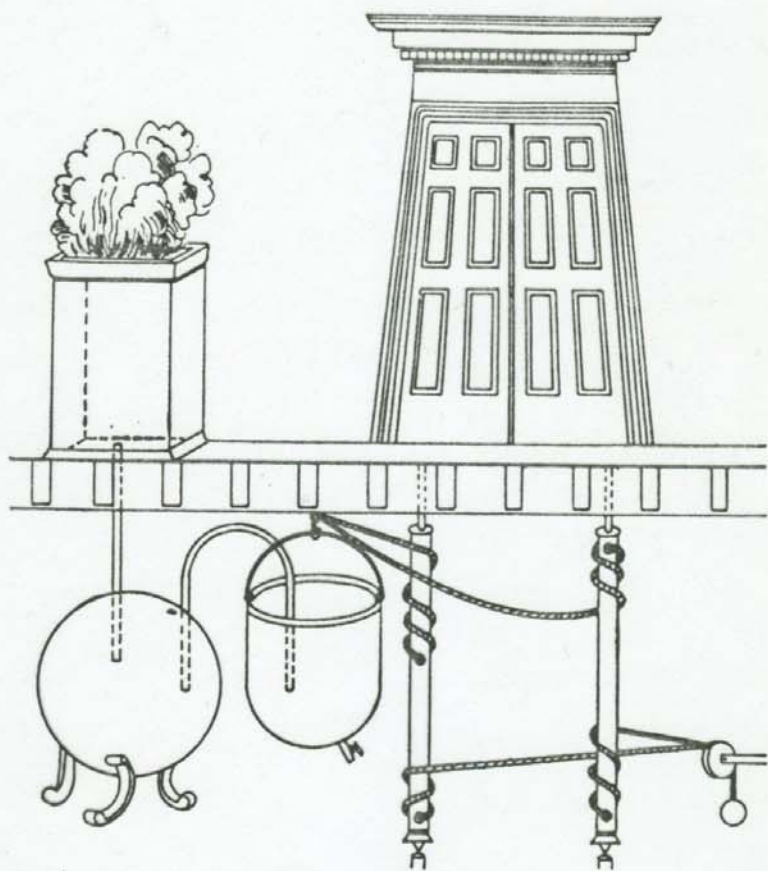
Le prime applicazioni di controlli in retroazione risalgono al 300 p.C.



Regolatori a galleggiante vennero impiegati nell'orologio ad acqua di Ktesibios e nella lampada ad olio di Filone.

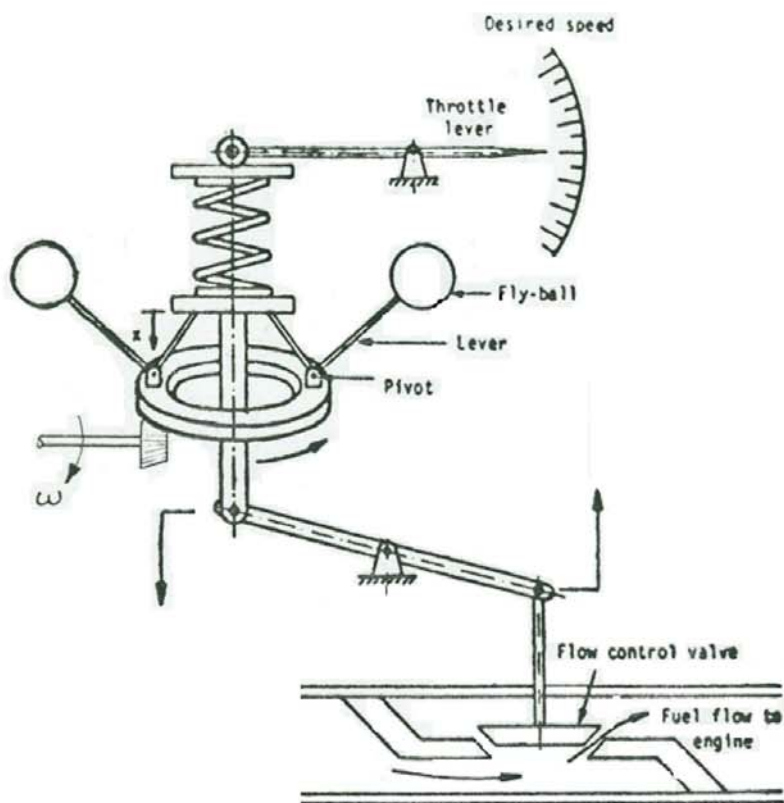
Diversi meccanismi di controllo del livello dell'acqua, impieganti regolatori a galleggiante, sono descritti nell'opera "Pneumatica" di Erone di Alessandria.

Dispositivo per l'apertura delle porte di un tempio all'accensione del fuoco sull'altare

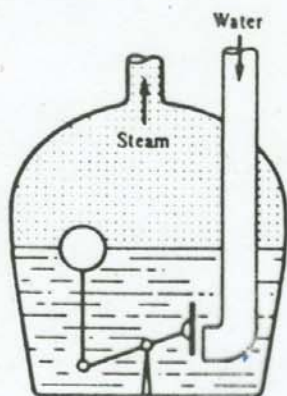


Il fuoco causa l'espansione dell'aria calda e quindi il riversamento dell'acqua nel recipiente che mette in azione le pulegge.

Il primo regolatore automatico in retroazione è datato **1769**: è il regolatore di **Watt** impiegato per controllare la velocità di una macchina a vapore



Nel 1765 il russo I. Polzunov propone un regolatore di livello a galleggiante per il controllo della portata in un generatore di vapore.



Nel 1868 J.C. Maxwell formula il modello matematico di un regolatore mediante equazioni differenziali e studia le oscillazioni transitorie in funzione delle radici dell'equazione algebrica associata.

Nel 1892 Liapunov studia la stabilità di sistemi non lineari.

Durante la prima guerra mondiale vengono risolti problemi relativi al posizionamento di cannoni.

Nel periodo antecedente la seconda guerra mondiale vengono progettati i primi amplificatori elettronici retroazionati (Bode, Nyquist, Black - Bell Telephone Labs.) ed i primi regolatori standard P.I.D.

In occasione della seconda guerra mondiale vengono progettati e costruiti autopiloti per aerei, sistemi di puntamento automatico, radar ad inseguimento.

Negli anni '50-'60 c'è un'imponente crescita nello studio e nelle applicazioni dei Controlli Automatici favorita dall'avvento dei calcolatori analogici.

Studi fondamentali sono condotti da Kalman e da Bellman e Pontryagin nel campo del controllo ottimo.

Negli anni '80 c'è un impiego sempre più massiccio di calcolatori numerici per il controllo di traiettorie (missili, satelliti) e per il controllo di processi industriali e naturali.

Si realizzano i primi robots industriali





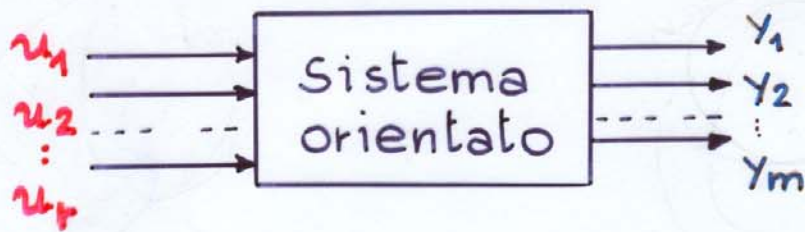
**Sistema (o Processo)**: oggetto o dispositivo o fenomeno la cui variazione nel tempo si manifesta attraverso la variazione di un certo numero di attributi misurabili

**Attributi misurabili**: caratteristiche che si possono esprimere con uno o più numeri (interi, reali o complessi)

**Modello matematico**: relazioni intercorrenti fra i diversi attributi misurabili (o variabili) del sistema

**Sistema orientato**: sistema le cui variabili sono suddivise in

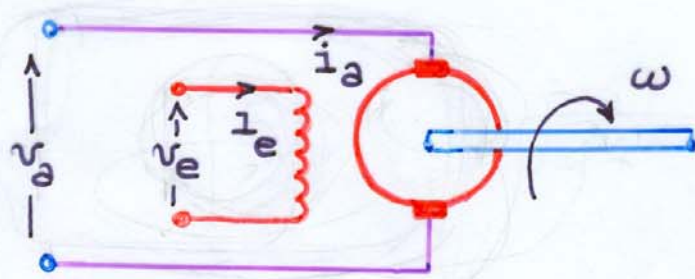
- cause o ingressi
- effetti o uscite



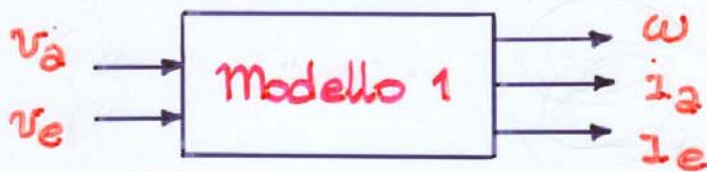
$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} = u(t) : \text{eccitazione o stimolo}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} = y(t) : \text{risposta}$$

# Motore in corrente continua



attributi misurabili :  $v_a, v_e, i_a, i_e, \omega$



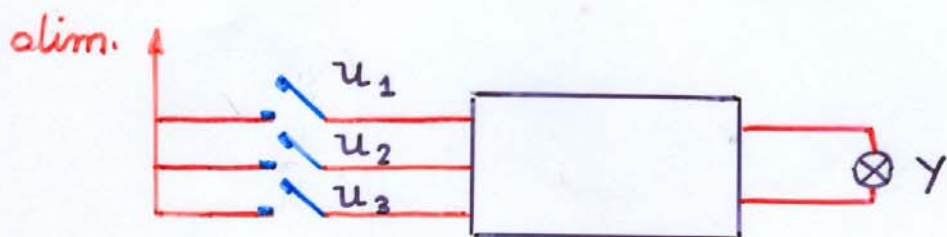
Pilotato in tensione.



Pilotato in corrente.

**Osservazione:** allo stesso sistema fisico possono essere associati diversi modelli matematici

# Sistema di interruttori per l'accensione di una lampada



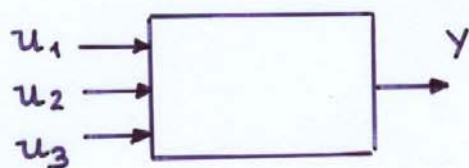
$$u_i = \begin{cases} 0 & \text{aperto} \\ 1 & \text{chiuso} \end{cases} \quad y = \begin{cases} 0 & \text{spenta} \\ 1 & \text{accesa} \end{cases}$$

( $i = 1, 2, 3$ )

Descrizione a parole: la lampada è accesa quando è chiuso un numero dispari di interruttori

## Modello matematico

$u_1$	$u_2$	$u_3$	$y$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1



$$y = \bar{u}_1 \bar{u}_2 u_3 + \bar{u}_1 u_2 \bar{u}_3 + u_1 \bar{u}_2 \bar{u}_3 + u_1 u_2 u_3$$

# Processo di crescita di una popolazione

$y(kT)$  = numero di individui all'inizio del  $k$ -esimo intervallo d'osservazione

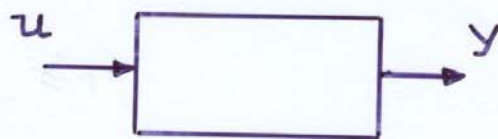
$\alpha(kT)$  = tasso di natalità

$\beta(kT)$  = tasso di mortalità

$u(kT)$  = individui che si aggiungono o si sottraggono alla popolazione.

## Modello matematico

$$y(kT+T) = [1 + \alpha(kT) - \beta(kT)] y(kT) + u(kT)$$



$k \in \mathbb{I}$  (insieme dei numeri interi)

Il modello in esame è ad evoluzione discreta nel tempo.

# Sistema ecologico

## Eutrofizzazione delle acque

- a) temperatura dell'acqua
- b) conducibilità "
- c) alcalinità "
- d) durezza totale "
- e) nitrati
- f) fosfati
- g) misura della presenza algale



Teoria dei Sistemi e Controlli Automatici sono le discipline che studiano i modelli matematici dei sistemi in riferimento alla:

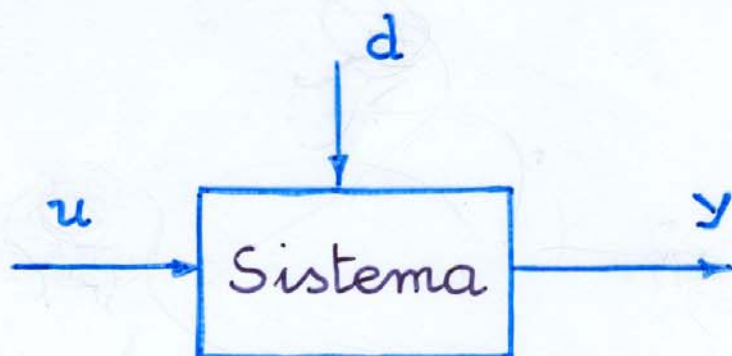
- loro deduzione { modellistica  
identificazione

- loro utilizzo { analisi  
sintesi

analisi { della risposta  
della controllabilità  
della osservabilità  
della stabilità  
della sensibilità

sintesi { dell'ingresso  
di un dispositivo di controllo

## Sintesi di un dispositivo di controllo



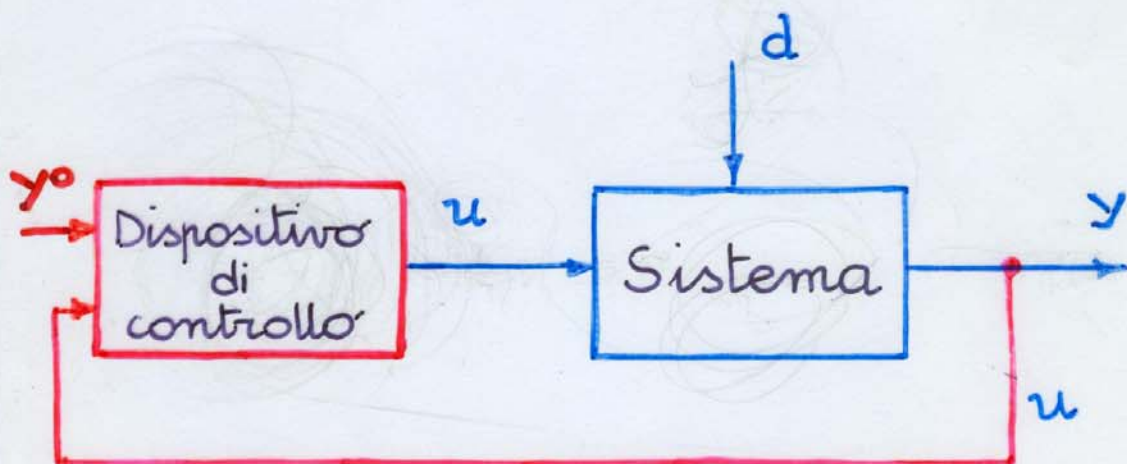
$u$  : variabile d'ingresso manipolabile

$d$  : variabile d'ingresso non manipolabile  
(disturbo)

$y$  : variabile d'uscita da controllare

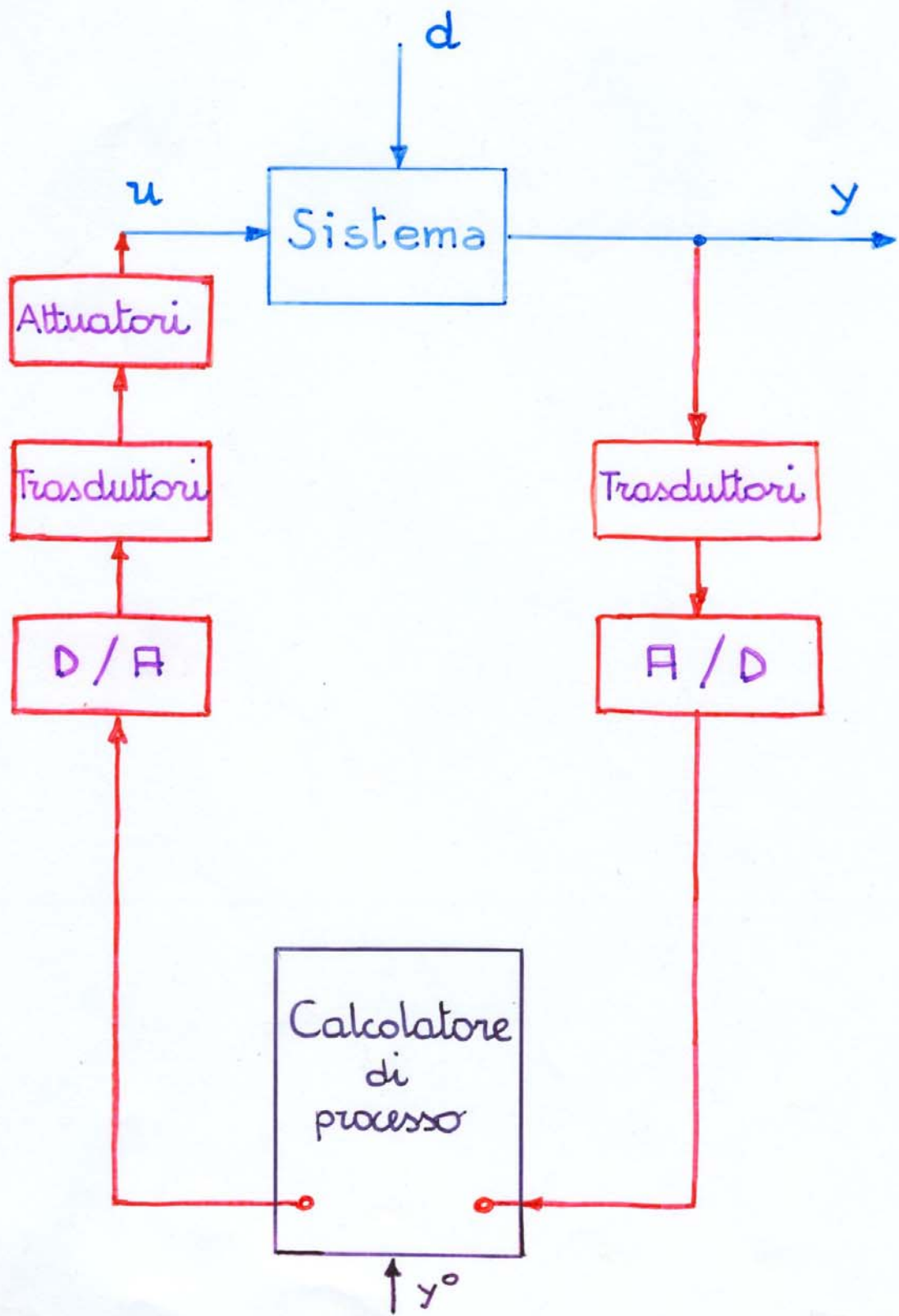


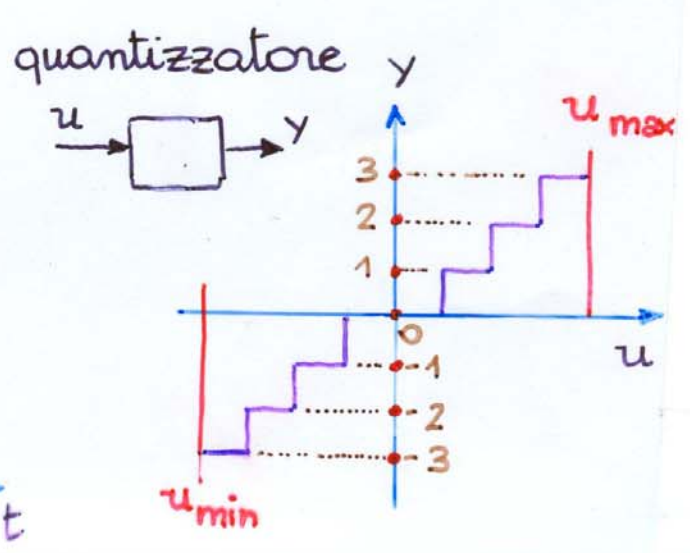
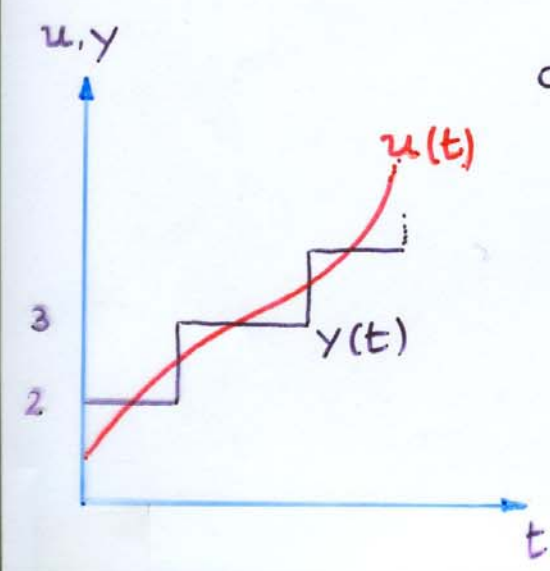
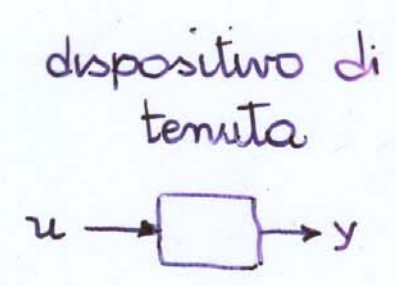
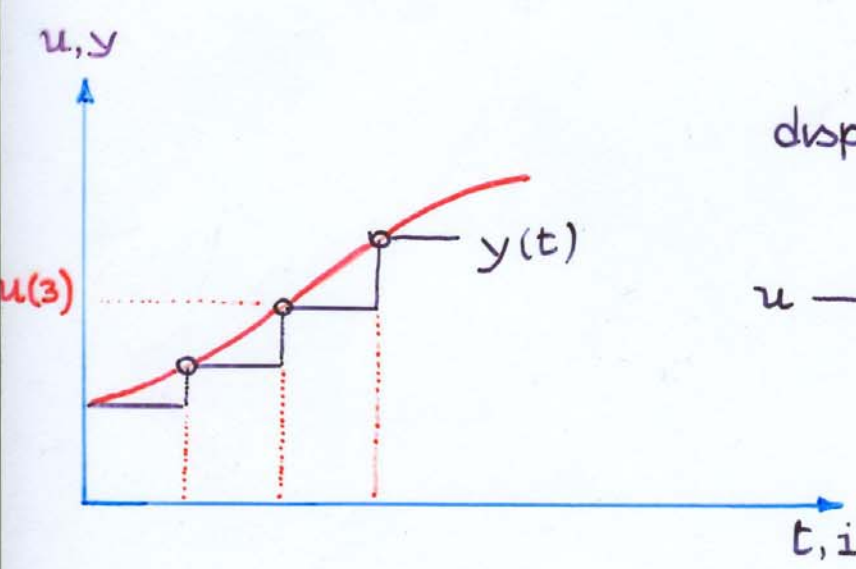
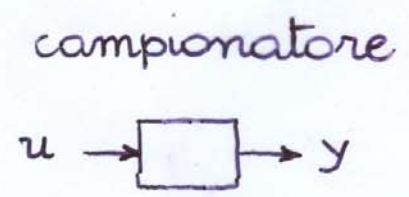
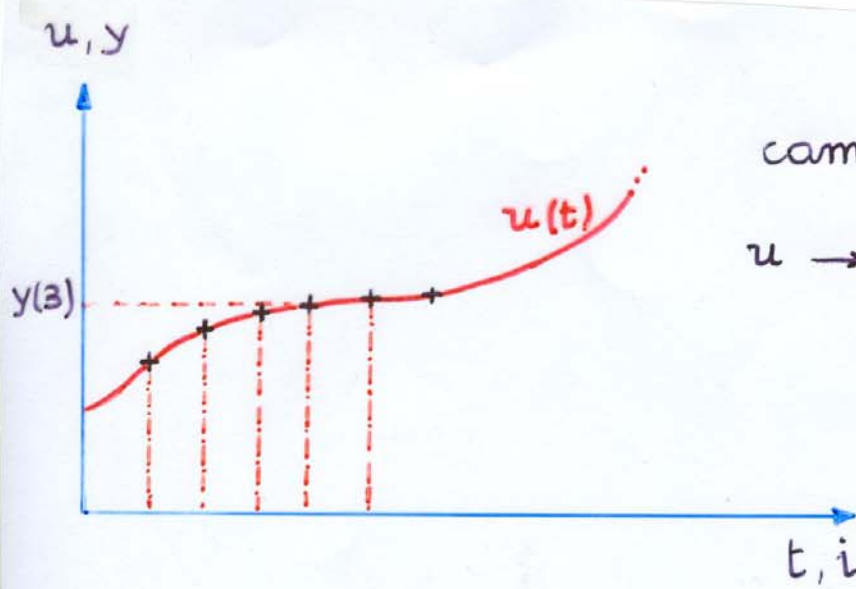
## Sintesi di un dispositivo di controllo



- $u$  : variabile d'ingresso manipolabile
- $d$  : variabile d'ingresso non manipolabile  
(disturbo)
- $y$  : variabile d'uscita da controllare

Il compito del dispositivo di controllo può essere quello di rendere l'uscita  $y$  insensibile al disturbo  $d$ .



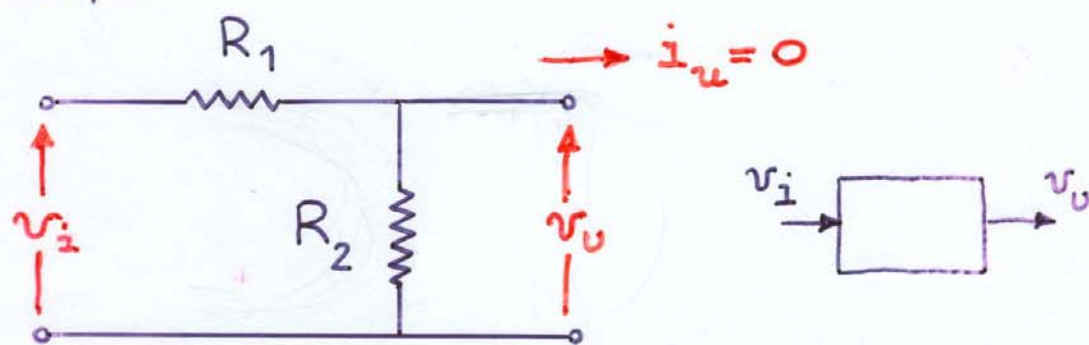


## Sistemi privi di memoria

o puramente algebrici o combinatori

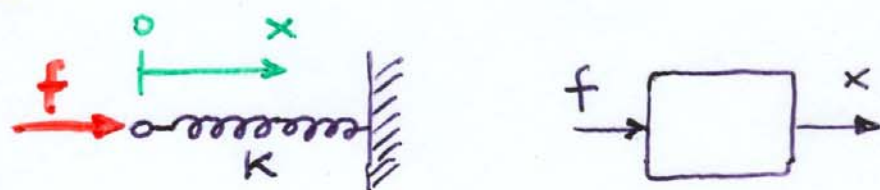
sistemi le cui uscite al generico istante  $t$  dipendono unicamente dai valori degli ingressi nello stesso istante.

Esempio



$$v_o(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_i(t)$$

Esempio



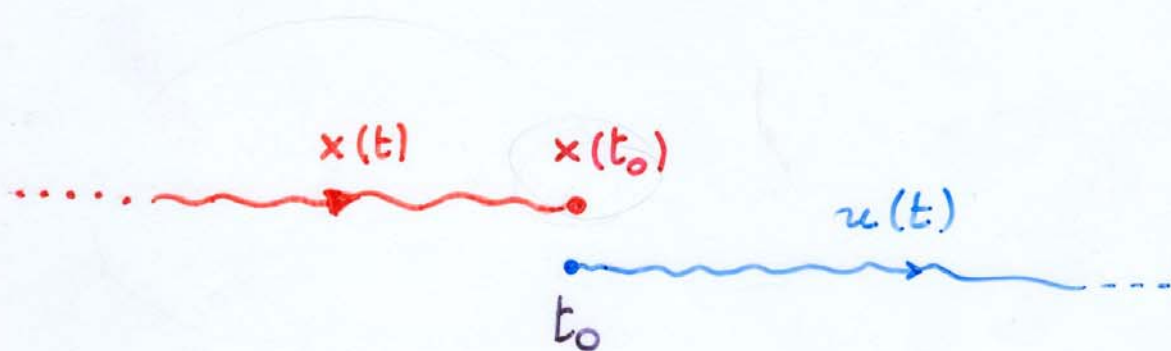
$$x(t) = \frac{1}{k} f(t)$$

## Sistemi forniti di memoria (o dinamici)

sistemi le cui uscite in un istante generico dipendono anche dagli andamenti degli ingressi ad istanti precedenti.

## Stato di un sistema dinamico

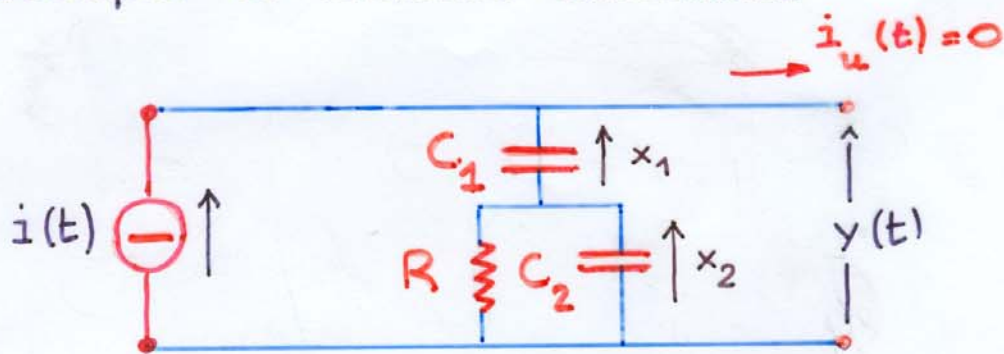
è l'informazione di cui occorre disporre, istante per istante, per potere predire l'effetto della storia passata del sistema sull'andamento futuro delle uscite, noto quello degli ingressi.



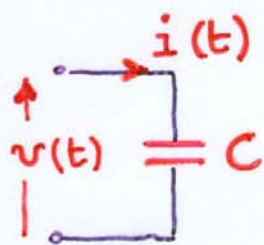
La conoscenza dello stato ad un istante  $t_0$ ,  $x(t_0)$ , unitamente al segmento della funzione d'ingresso  $u[t_0, t]$ ,  $t \geq t_0$  determina univocamente l'uscita

$$y(t) \quad \text{per } t \geq t_0$$

# Esempio di sistema dinamico



ingresso : corrente  $i(t)$   
 uscita : tensione  $y(t)$   
 stato : ?



$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad \begin{cases} x_1 : \text{tensione su } C_1 \\ x_2 : \text{tensione su } C_2 \end{cases}$$

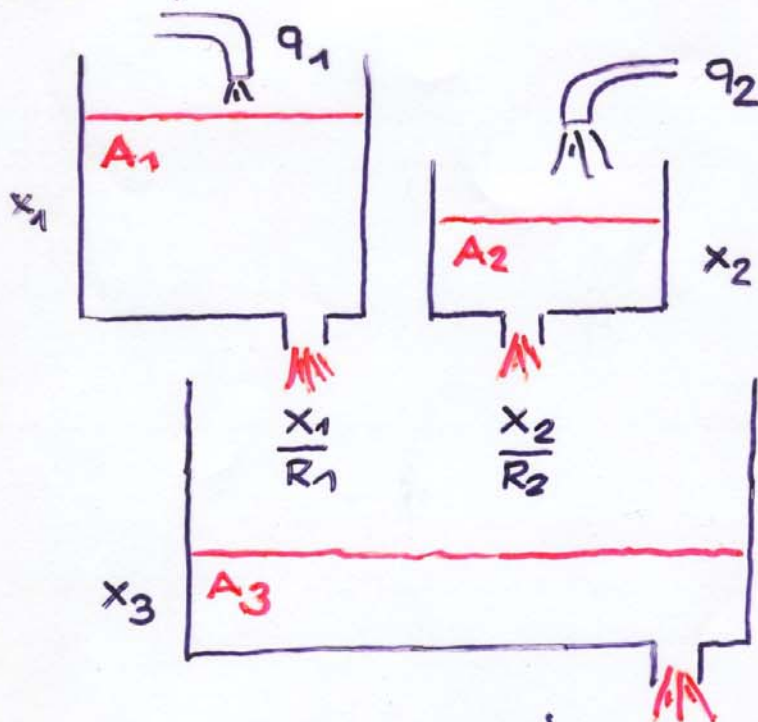
$$\begin{cases} C_1 \dot{x}_1(t) = i(t) \\ C_2 \dot{x}_2(t) + \frac{x_2(t)}{R} = i(t) \end{cases}$$

sistema di 2 eq. diff. ordinarie non omogenee in 2 incognite  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$

$$\left. \begin{matrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ i(t), t \geq t_0 \end{matrix} \right\} \longrightarrow \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ (t \geq t_0) \end{matrix} \longrightarrow y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \text{stato del sistema}$$

# Esempio di sistema dinamico



ingressi : portate volumetriche  $q_1(t)$   $q_2(t)$   $q_3 = \frac{x_3}{R_3}$

uscita : portata volumetrica  $q_3(t)$

stato : ?

$$\begin{cases} A_1 \dot{x}_1(t) = q_1(t) - \frac{x_1(t)}{R_1} \\ A_2 \dot{x}_2(t) = q_2(t) - \frac{x_2(t)}{R_2} \\ A_3 \dot{x}_3(t) = \frac{x_1(t)}{R_1} + \frac{x_2(t)}{R_2} - \frac{x_3(t)}{R_3} \end{cases}$$

sistema di 3  
eq. diff. ordinarie  
non omogenee.  
in 3 incognite

$$\left. \begin{matrix} x_1(0), x_2(0), x_3(0) \\ q_1(t) \\ q_2(t) \end{matrix} \right\} \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{matrix} \xrightarrow{t \geq 0} y(t) = \frac{x_3(t)}{R_3}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \text{stato del sistema}$$

Dinamica della popolazione studentesca di un corso di laurea universitario (3 anni) governato dalle seguenti regole.

- non c'è la possibilità di iscrizioni in anni intermedi da parte di studenti esterni.
- per ogni anno  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sono costanti le percentuali di promossi all'anno successivo ( $\alpha_i$ ) e di ripetenti ( $\beta_i$ ).

$x_1(t)$  : iscritti al 1° anno nell'A.A.  $t$

$x_2(t)$  : " " 2° " "

$x_3(t)$  : " " 3° " "

ingresso:  $u(t)$  : matricole che si iscrivono nell'A.A.  $(t+1)$  al 1° anno di corso

uscita:  $y(t)$  : laureati nell'A.A.  $t$

$$x_1(t+1) = \beta_1 x_1(t) + u(t)$$

$$x_2(t+1) = \alpha_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t)$$

$$x_3(t+1) = \alpha_2 x_2(t) + \beta_3 x_3(t)$$

$$y(t) = \alpha_3 x_3(t)$$

$$A_d = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_3 \end{bmatrix} \quad B_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_d = [0 \ 0 \ \alpha_3] \\ D_d = 0$$



# Definizioni e proprietà generali per i Sistemi dinamici

Il modello matematico di un sistema dinamico è caratterizzato da:

- un insieme dei tempi  $\mathcal{T}$  ( $\mathcal{T} = \mathbb{R}$  o  $\mathcal{T} = \mathbb{I}$ )
- un insieme degli ingressi  $\mathcal{U}$
- un insieme delle funzioni d'ingresso  $\mathcal{U}_f$
- un insieme degli stati  $\mathcal{X}$
- un insieme delle uscite  $\mathcal{Y}$

per  $\mathcal{T} = \mathbb{R}$

- $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$  funzione di velocità di transizione
  - $y(t) = g(x(t), u(t), t)$  funzione d'uscita
- sistemi a tempo continuo o sistemi continui

per  $\mathcal{T} = \mathbb{I}$

- $x(t+1) = f(x(t), u(t), t)$  funzione di stato futuro
  - $y(t) = g(x(t), u(t), t)$  funzione d'uscita
- sistemi a tempo discreto o sistemi discreti

Sistemi puramente algebrici o privi di memoria (senza stato)

sono caratterizzati da  $\tau, u, u_f, y$  e da

$$y(t) = g(u(t), t)$$

**Sistemi** puramente dinamici

sono sistemi dinamici nei quali la funzione d'uscita non dipende esplicitamente dall'ingresso:

$$y(t) = g(x(t), \cancel{u(t)}, t)$$

**Sistemi dinamici** stazionari o costanti

sono sistemi le cui funzioni  $f$  e  $g$  non dipendono esplicitamente dal tempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \cancel{t}) \\ y(t) = g(x(t), u(t), \cancel{t}) \end{cases} \quad \text{continui}$$

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t), u(t), \cancel{t}) \\ y(t) = g(x(t), u(t), \cancel{t}) \end{cases} \quad \text{discreti}$$

## Sistemi dinamici lineari

sono sistemi dinamici in cui  $u, u_f, x$  e  $y$  sono spazi vettoriali definiti sullo stesso campo e le funzioni  $f$  e  $g$  sono lineari in  $x$  ed  $u$  per ogni  $t$ :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad \text{continui}$$

$$\begin{cases} x(t+1) = A_d(t)x(t) + B_d(t)u(t) \\ y(t) = C_d(t)x(t) + D_d(t)u(t) \end{cases} \quad \text{discreti}$$

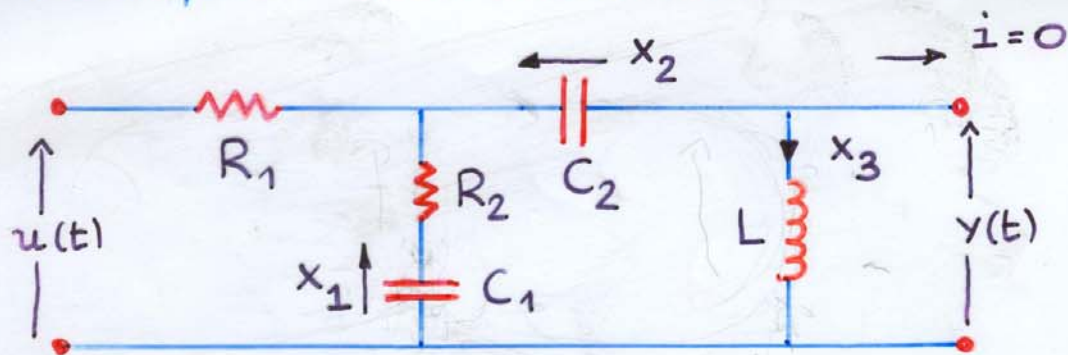
$$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r, y \in \mathbb{R}^m$$

Nel caso lineare e stazionario risulta:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \text{continui}$$

$$\begin{cases} x(t+1) = A_d x(t) + B_d u(t) \\ y(t) = C_d x(t) + D_d u(t) \end{cases} \quad \text{discreti}$$

# Esempio: rete elettrica



$$\begin{cases} C_1 \dot{x}_1 = (u - x_1 - R_2 C_1 \dot{x}_1) / R_1 - x_3 \\ C_2 \dot{x}_2 = x_3 \\ L \dot{x}_3 = x_1 + R_2 C_1 \dot{x}_1 - x_2 \end{cases}$$

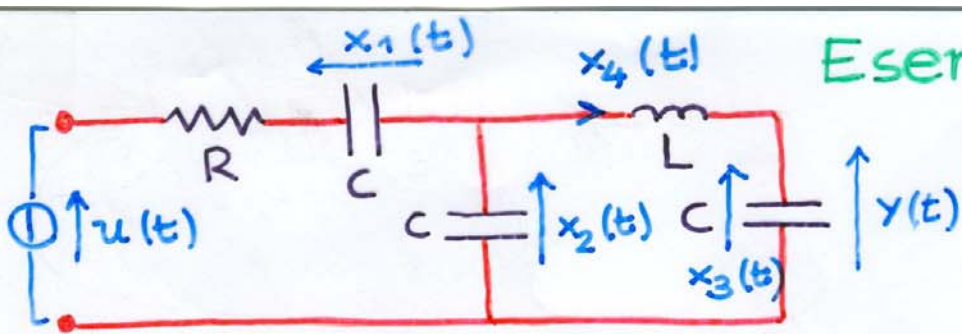
$$y = L \dot{x}_3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{C_1(R_1+R_2)} & 0 & \frac{-R_1}{C_1(R_1+R_2)} \\ 0 & 0 & 1/C_2 \\ \frac{R_1}{L(R_1+R_2)} & -1/L & \frac{-R_1 R_2}{L(R_1+R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1(R_1+R_2)} \\ 0 \\ \frac{R_2}{L(R_1+R_2)} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{R_1+R_2} & -1 & \frac{-R_1 R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix} u(t)$$

# Esempio



$u(t)$  : tensione (ingresso)

$y(t)$  : " (uscita)

$$\begin{cases} C \dot{x}_1 = \frac{u - x_1 - x_2}{R} \\ C \dot{x}_2 = \frac{u - x_1 - x_2}{R} - x_4 \\ C \dot{x}_3 = x_4 \\ L \dot{x}_4 = x_2 - x_3 \end{cases} \quad Y = x_3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} & 0 & 0 \\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

La soluzione dell'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0.$$

che si suppone esistente ed unica, è del tipo:

$$x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$$

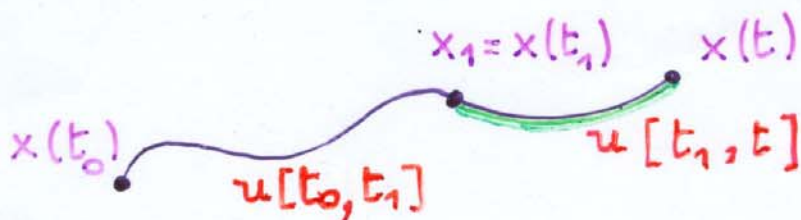
e si chiama funzione di transizione dello stato.

Tale funzione gode delle proprietà:

- orientamento nel tempo: è definita per  $t \geq t_0$  ma non necessariamente per  $t < t_0$
- causalità: se  $u'(\cdot) = u''(\cdot)$  in  $t_0 \leq t \leq t_1$ :  
$$\phi(t, t_0, x_0, u'(\cdot)) = \phi(t, t_0, x_0, u''(\cdot))$$
 per  $t_0 \leq t \leq t_1$
- composizione:

$$\phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \phi(t, t_1, x_1, u(\cdot))$$

$$\text{se } x_1 = \phi(t_1, t_0, x_0, u(\cdot)), \quad t_0 \leq t_1 \leq t$$



- consistenza:

$$x = \phi(t, t, x, u(\cdot))$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \rightarrow x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

$$y(t) = g(\phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)), u(t), t) =$$

$$= \gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot)) \quad \text{funzione di risposta}$$

## Modelli matematici

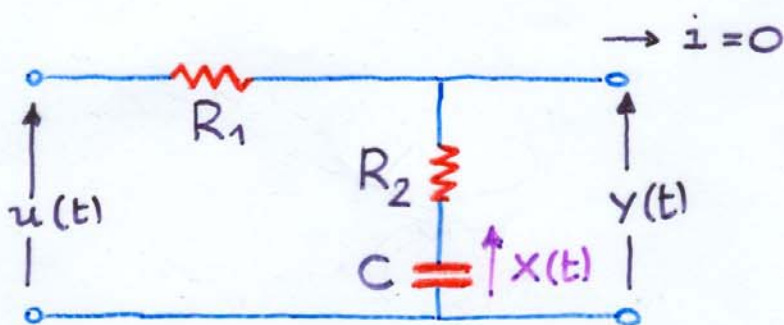
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{modello differenziale} \\ \text{ingresso-stato-uscita} \end{array}$$

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{modello alle differenze} \\ \text{ingresso-stato-uscita} \end{array}$$

$$\begin{cases} x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{modello} \\ \text{ingresso-stato-uscita} \end{array}$$

$$y(t) = \gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot)) \quad \text{modello esterno}$$

# Sistema lineare continuo



$$C \dot{x} = \frac{u-x}{R_1+R_2}$$

$$y = \frac{u-x}{R_1+R_2} R_2 + x$$

$$\dot{x} = \underbrace{\frac{-1}{C(R_1+R_2)}}_a x + \underbrace{\frac{1}{C(R_1+R_2)}}_b u$$

$$y = \underbrace{\frac{R_1}{R_1+R_2}}_c x + \underbrace{\frac{R_2}{R_1+R_2}}_d u$$

$$\dot{x}(t) = a x(t) + b u(t)$$

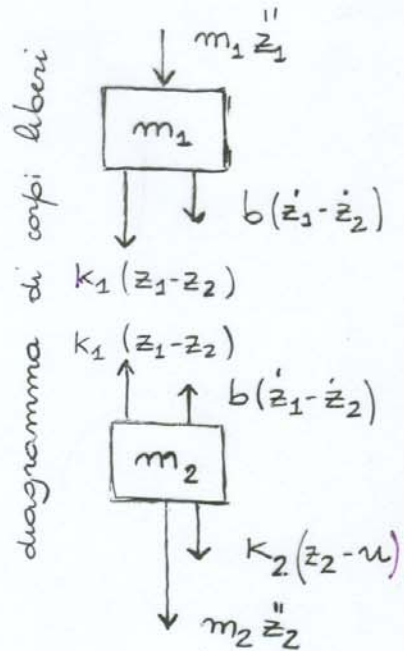
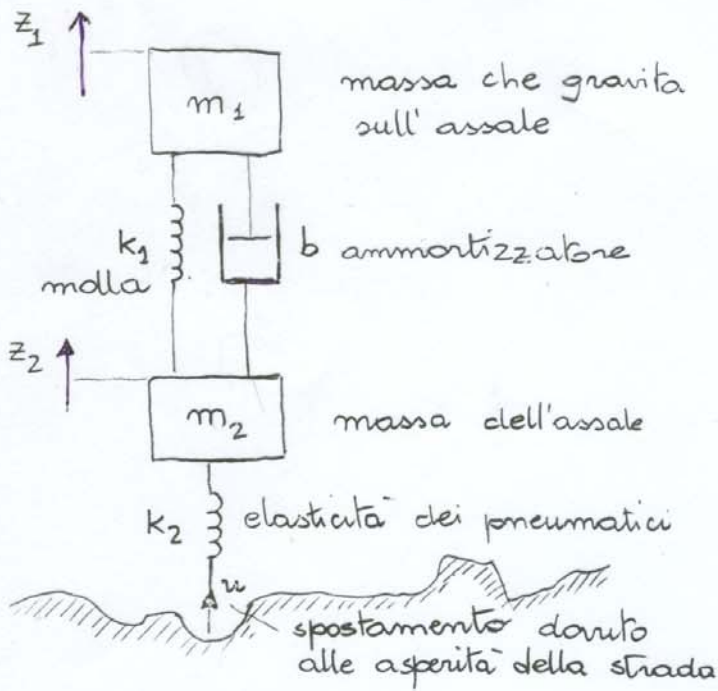
$$y(t) = c x(t) + d u(t)$$

$$\left\{ \begin{aligned} x(t) &= e^{a(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau \\ &= \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} y(t) &= c e^{a(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t c e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau + \\ &\quad + d u(t) = \\ &= \gamma(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)) \end{aligned} \right.$$



# Sistema di sospensione di un autoveicolo



$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + b(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_1(z_1 - z_2) = 0 \\ m_2 \ddot{z}_2 - b(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_1(z_1 - z_2) + k_2(z_2 - u) = 0 \end{cases}$$

Posto  $x_1 = z_1$   $x_3 = z_2$   $y_1 = z_1$   
 $x_2 = \dot{z}_1$   $x_4 = \dot{z}_2$   $y_2 = z_2$  uscite del sistema

$$m_1 \dot{x}_2 + b(x_2 - x_4) + k_1(x_1 - x_3) = 0$$

$$m_2 \dot{x}_4 - b(x_2 - x_4) - k_1(x_1 - x_3) + k_2(x_3 - u) = 0$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

# Sistema a stati finiti

Un distributore automatico di caffè accetta monete da 100 e da 50 lire, distribuisce la bevanda per un importo di 250 lire e può fornire un resto di 50 lire.

Descriverne un modello matematico.

$$U = \{50, 100\}$$

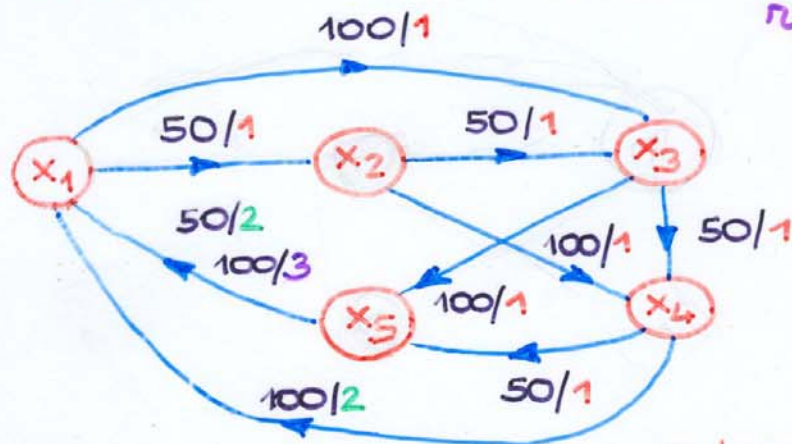
$$Y = \{1, 2, 3\}$$

$$Z = I$$

1 = introduci altre monete

2 = distribuisci il caffè

3 = distribuisci caffè e resto (50 lire)



grafo delle transizioni

	50	100
$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x_2$	$x_3$	$x_4$
$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_4$	$x_5$	$x_1$
$x_5$	$x_1$	$x_2$

tabella delle transizioni

	50	100
$x_1$	1	1
$x_2$	1	1
$x_3$	1	1
$x_4$	1	2
$x_5$	2	3

tabella delle uscite

$$x(i+1) = f(x(i), u(i))$$

$$y(i) = g(x(i), u(i))$$

Stati indistinguibili in  $[t_0, t_1]$ :  $x_1, x_2$

$$y(t) = \gamma(t, t_0, x_1, u(\cdot)) = \gamma(t, t_0, x_2, u(\cdot))$$

per ogni  $t \in [t_0, t_1]$  e per ogni  $u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$

Stati equivalenti:  $x_1, x_2$

sono stati indistinguibili in  $[t_0, t_1]$  per ogni  $t_0, t_1 \in \mathcal{T}$  con  $t_1 > t_0$

Sistema in forma minima

è un sistema che non ha stati equivalenti

Stato di equilibrio temporaneo in  $[t_0, t_1]$

è uno stato  $x \in \mathcal{X}$  per il quale esiste una funzione  $u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$  che per ogni  $t \in [t_0, t_1]$  soddisfa la relazione

$$x = \phi(t, t_0, x, u(\cdot))$$

Stato di equilibrio:  $x$

è uno stato di equilibrio in  $[t_0, t_1]$  per ogni  $t_0, t_1 \in \mathcal{T}$  con  $t_1 > t_0$

## Sistemi equivalenti ( $S_1 \equiv S_2$ )

$S_1$  ed  $S_2$  sono sistemi dinamici equivalenti se

$$U_1 = U_2 = U$$

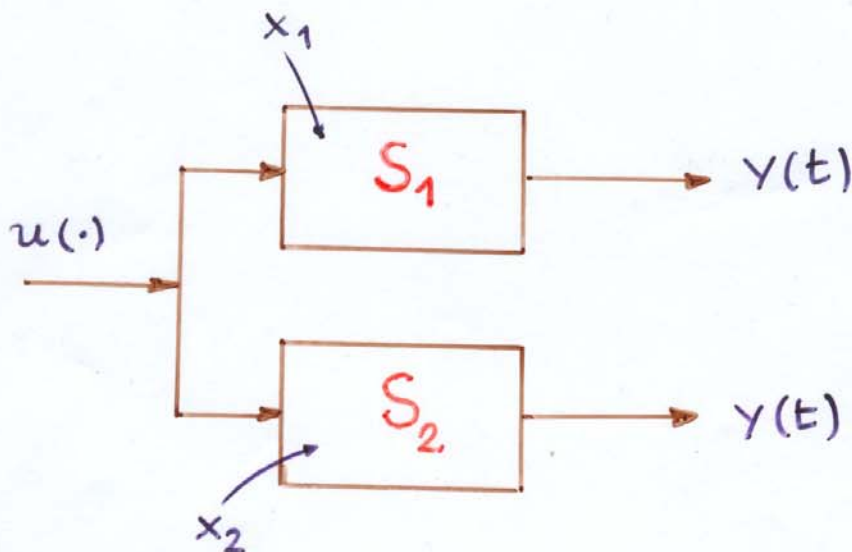
$$U_{f_1} = U_{f_2} = U_f$$

$$Y_1 = Y_2 = Y$$

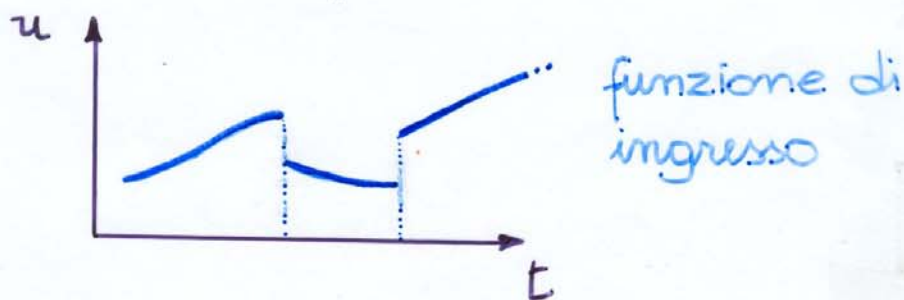
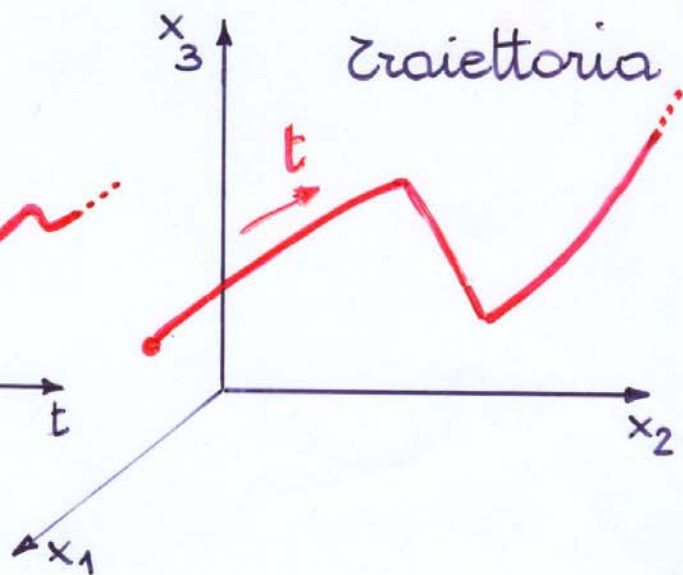
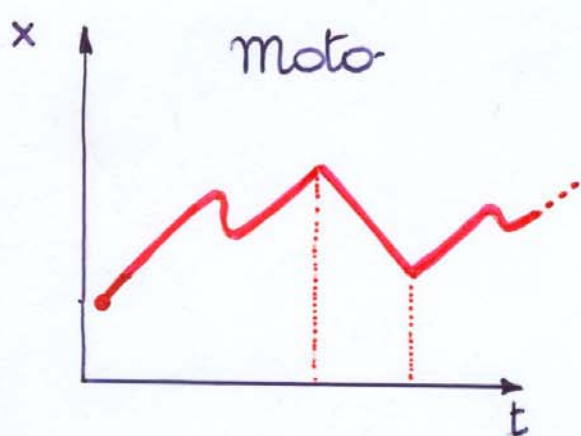
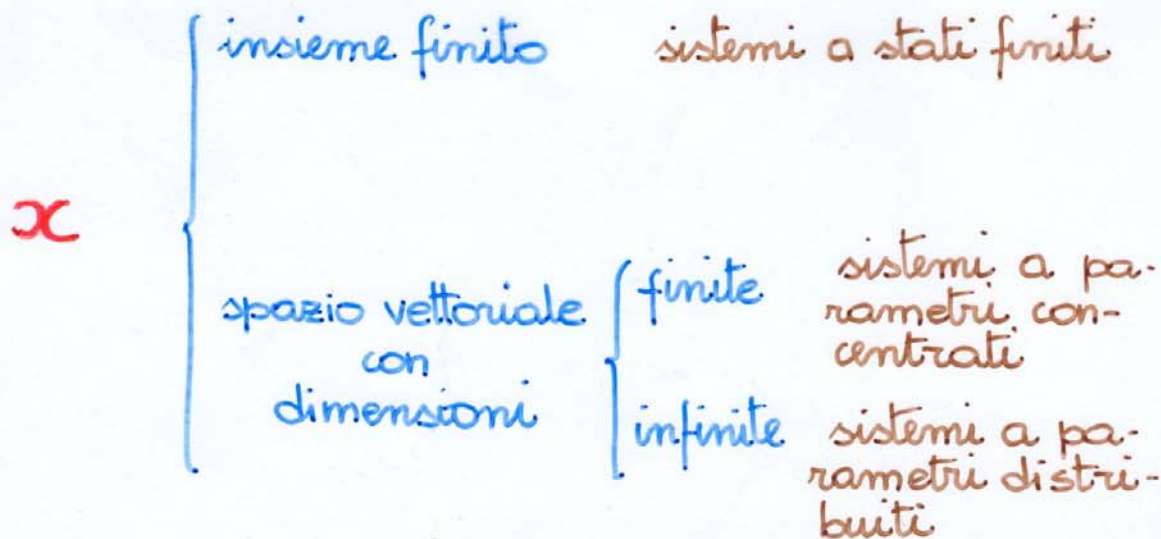
e ad ogni stato  $x_1 \in X_1$  ( $\sigma x_2 \in X_2$ ) dell'uno si può associare uno stato  $x_2 \in X_2$  ( $\sigma x_1 \in X_1$ ) dell'altro tale che sia

$$\delta_1(t, t_0, x_1, u(\cdot)) = \delta_2(t, t_0, x_2, u(\cdot))$$

per ogni  $t_0, t \in T$  con  $t \geq t_0$  e per ogni funzione d'ingresso  $u(\cdot) \in U_f$



$X$  = insieme degli stati di un sistema dinamico



Nei sistemi stazionari  $x$ :

$$x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) \text{ risulta:}$$

$$x(t+\tau) = \phi(t+\tau, t_0+\tau, x_0, u_{\Delta}(\cdot)) = x(t)$$

$$\text{con } u_{\Delta}(t) = u(t+\tau)$$

Della stessa proprietà gode la  $\gamma$

Nei sistemi lineari

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(t, t_0, \alpha x_{0_1} + \beta x_{0_2}, \alpha u_1(\cdot) + \beta u_2(\cdot)) = \\ &= \alpha \phi(t, t_0, x_{0_1}, u_1(\cdot)) + \\ &\quad \beta \phi(t, t_0, x_{0_2}, u_2(\cdot)) \end{aligned}$$

$$\text{Posto } \alpha = \beta = 1, \quad x_{0_1} = x_0, \quad x_{0_2} = 0 \\ u_1(\cdot) = 0, \quad u_2(\cdot) = u(\cdot)$$

risulta:

$$\phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \phi(t, t_0, x_0, 0) + \phi(t, t_0, 0, u(\cdot))$$

Lo stesso vale per la  $\gamma$ :

$$\gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \gamma(t, t_0, x_0, 0) + \gamma(t, t_0, 0, u(\cdot))$$

moto = moto libero + moto forzato  
risposta = risposta libera + risposta forzata

## Conseguenze :

- nei sistemi **stazionari**

- l'istante iniziale si può assumere uguale a zero  $t_0 = 0$
- le funzioni  $\phi$  e  $\gamma$  dipendono dalla differenza  $t - t_0$  e non da  $t$  e  $t_0$  separatamente

- nei sistemi **lineari**

$$\gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \gamma(t, t_0, x_0, 0) + \gamma(t, t_0, 0, u(\cdot))$$

- stati indistinguibili in  $[t_0, t_1]$  danno luogo alla stessa **risposta libera** in  $[t_0, t_1]$
- la forma minima equivale alla condizione che ogni stato iniziale dia luogo ad una diversa risposta libera

## Controllabilità e Raggiungibilità

con tale termine s'intende la possibilità di influire sul moto  $x(\cdot)$  di un sistema agendo opportunamente sulla funzione d'ingresso  $u(\cdot)$

È caratterizzata dagli insiemi:

-  $\mathcal{R}^+(t_0, t_1, x_0) = \{x_1 : x_1 = \phi(t_1, t_0, x_0, u(\cdot)), u(\cdot) \in \mathcal{U}_f\}$   
insieme degli stati raggiungibili all'istante  $t_1$  a partire dall'evento  $(t_0, x_0)$

-  $\mathcal{R}^-(t_0, t_1, x_1) = \{x_0 : x_1 = \phi(t_1, t_0, x_0, u(\cdot)), u(\cdot) \in \mathcal{U}_f\}$   
insieme degli stati controllabili all'evento  $(t_1, x_1)$  a partire dall'istante  $t_0$

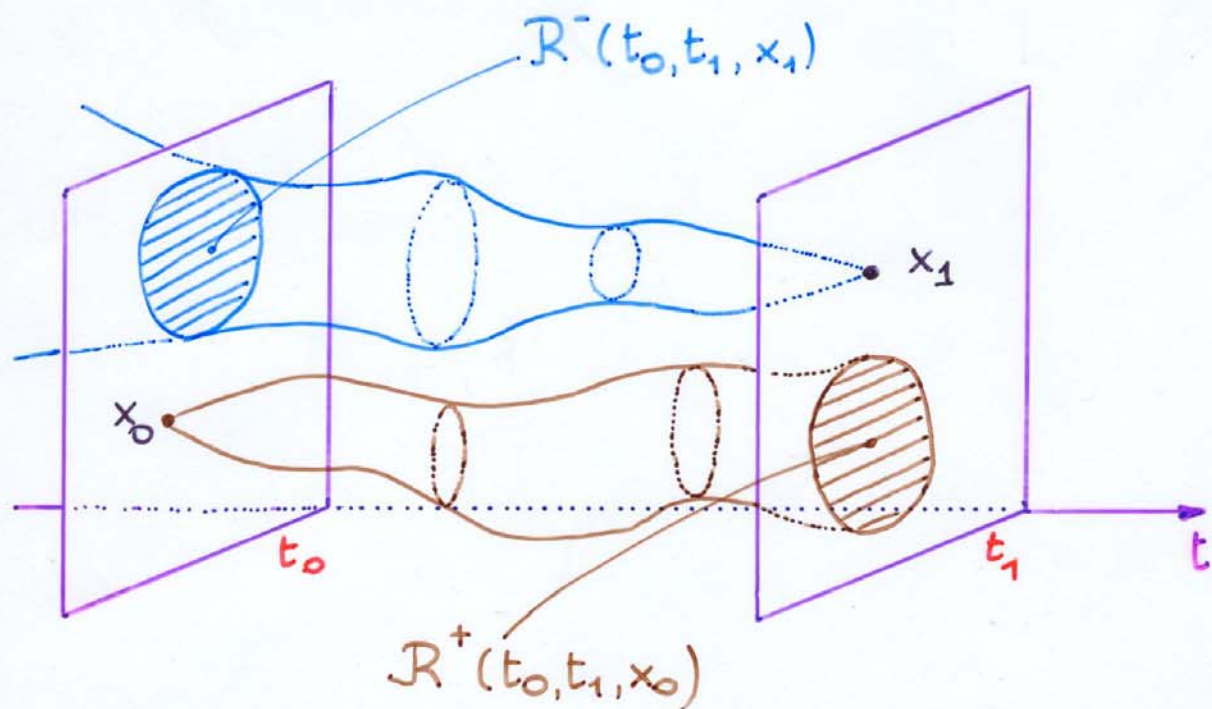
-  $\mathcal{W}^+(t_0, t_1, x_0) = \{x_1 : x_1 = \phi(\tau, t_0, x_0, u(\cdot)), \tau \in [t_0, t_1], u(\cdot) \in \mathcal{U}_f\}$   
insieme degli stati raggiungibili in un istante dell'intervallo  $[t_0, t_1]$  a partire dall'evento  $(t_0, x_0)$

-  $\mathcal{W}^-(t_0, t_1, x_1) = \{x_0 : x_1 = \phi(t_1, \tau, x_0, u(\cdot)), \tau \in [t_0, t_1], u(\cdot) \in \mathcal{U}_f\}$   
insieme degli stati controllabili all'evento  $(t_1, x_1)$  a partire da un istante dell'intervallo  $[t_0, t_1]$



# Interpretazione geometrica

$$\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$$



$$R^+(t_0, t_1, x) \subseteq W^+(t_0, t_1, x)$$

$$R^-(t_0, t_1, x) \subseteq W^-(t_0, t_1, x)$$

per ogni  $x \in \mathcal{X}$

$$W^+(t_0, t_1, x) \subseteq W^+(t_0, t_1', x) \text{ per ogni } x \in \mathcal{X} \\ \text{se } t_1' \geq t_1$$

## Definizioni

Lo stato,  $x$  il sistema, si dice completamente raggiungibile dall'evento  $(t_0, x)$  nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  quando

$$w^+(t_0, t_1, x) = \infty$$

si dice completamente controllabile all'evento  $(t_1, x)$  nell'intervallo  $[t_0, t_1]$  quando

$$w^-(t_0, t_1, x) = \infty$$

Nei sistemi stazionari

$$\begin{array}{l} R^+(t_0, t_1, x) \\ R^-(t_0, t_1, x) \\ W^+(t_0, t_1, x) \\ W^-(t_0, t_1, x) \end{array} \quad \begin{array}{c} t_0 = 0 \\ \longrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} R_{t_1}^+(x) \\ R_{t_1}^-(x) \\ W_{t_1}^+(x) \\ W_{t_1}^-(x) \end{array}$$

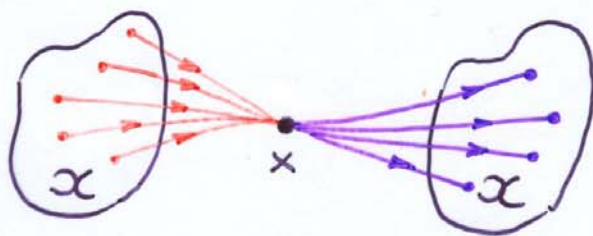
Definizione

$$W^+(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} W_t^+(x)$$

$$W^-(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} W_t^-(x)$$

Un sistema stazionario si dice **fortemente connesso**, o più semplicemente **connesso** se è possibile ottenere la transizione fra due qualunque dei suoi stati, per cui è:

$$W^+(x) = W^-(x) = \mathcal{X} \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{X}$$



## Ossevvabilità e Ricostruibilità

con tale termine s'intende la possibilità di determinare lo stato iniziale  $x(t_0)$  o lo stato finale  $x(t_1)$  di un sistema dalla conoscenza del comportamento ingresso-uscita  $u[t_0, t_1]$ ,  $y[t_0, t_1]$

È caratterizzata dagli insiemi:

$$\mathcal{E}^-(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot)) = \left\{ x_0 : y(\tau) = \gamma(\tau, t_0, x_0, u(\cdot)), \tau \in [t_0, t_1] \right\}$$

insieme degli stati **iniziali** compatibili con le funzioni  $u(\cdot)$  ed  $y(\cdot)$  nell'intervallo  $[t_0, t_1]$

$$\mathcal{E}^+(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot)) = \left\{ x_1 : x_1 = \phi(t_1, t_0, x_0, u(\cdot)), x_0 \in \mathcal{E}^-(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot)) \right\}$$

insieme degli stati **finali** compatibili con le funzioni  $u(\cdot)$  ed  $y(\cdot)$  nell'intervallo  $[t_0, t_1]$

$y(\cdot)$  è vincolata ad appartenere all'insieme delle funzioni d'uscita ammissibili in relazione a  $t_0$  e  $u(\cdot)$ , cioè all'insieme

$\mathcal{Y}_f(t_0, u(\cdot)) = \left\{ y(\cdot) : y(t) = \gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot)), x_0 \in \mathcal{X} \right\}$   
che contiene, al massimo, tanti elementi quanti sono quelli di  $\mathcal{X}$ .

## Definizioni

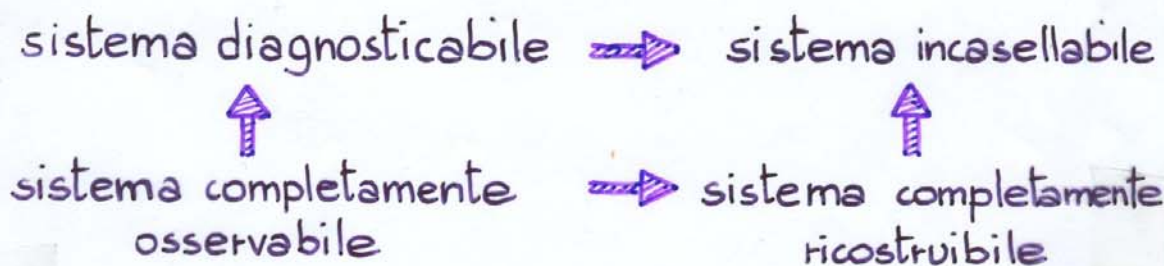
lo stato di un sistema, o il sistema, si dice **diagnosticabile in  $[t_0, t_1]$**  se esiste una funzione  $u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$  tale che l'insieme  $\mathcal{E}^-(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$  comprenda un solo elemento per ogni  $y(\cdot) \in \mathcal{Y}_f$ ;

lo stato, o il sistema, si dice **incasellabile in  $[t_0, t_1]$**  se esiste una funzione  $u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$  tale che l'insieme  $\mathcal{E}^+(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$  comprenda un solo elemento per ogni  $y(\cdot) \in \mathcal{Y}_f$ ;

lo stato, o il sistema, si dice **completamente osservabile in  $[t_0, t_1]$**  se è diagnosticabile in  $[t_0, t_1]$  con qualunque  $u(\cdot)$ ;

lo stato, o il sistema, si dice **completamente ricostruibile in  $[t_0, t_1]$**  se è incasellabile in  $[t_0, t_1]$  con qualunque  $u(\cdot)$ .

## Implicazioni



Nei sistemi stazionari

$$\mathcal{E}^-(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot)) \quad t_0=0 \quad \mathcal{E}_{t_1}^-(u(\cdot), y(\cdot))$$



$$\mathcal{E}^+(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot)) \quad \mathcal{E}_{t_1}^+(u(\cdot), y(\cdot))$$

Definizione

$$\mathcal{E}^-(u(\cdot), y(\cdot)) = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{t_1}^-(u(\cdot), y(\cdot))$$

$$\mathcal{E}^+(u(\cdot), y(\cdot)) = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{t_1}^+(u(\cdot), y(\cdot))$$

Risulta:

$$\mathcal{E}^-(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot)) \supseteq \mathcal{E}^-(t_0, t_1', u(\cdot), y(\cdot))$$

per ogni  $u(\cdot), y(\cdot)$  se  $t_1' > t_1$

$$\text{n.e.} \{ \mathcal{E}^+(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot)) \} \supseteq \text{n.e.} \{ \mathcal{E}^+(t_0, t_1', u(\cdot), y(\cdot)) \}$$

per ogni  $u(\cdot), y(\cdot)$  se  $t_1' > t_1$

n.e. = numero di elementi dell'insieme.

# Stabilità

con tale termine s'intende la capacità del sistema di reagire con variazioni limitate del moto  $x(\cdot)$  a perturbazioni limitate dello stato iniziale  $x(t_0)$  o dell'ingresso  $u(\cdot)$

Ipotesi:  $U, U_f, X, Y$  spazi vettoriali normati

$$x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)) : \text{moto di riferimento}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = \phi(t, t_0, x(t_0) + \delta x_1(t_0), u(\cdot)) : \\ \text{moto perturbato} \\ \delta x_1(t_0) : \text{perturbazione sullo stato iniz.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot) + \delta u(\cdot)) : \\ \text{moto perturbato} \\ \delta u(\cdot) : \text{perturbazione sull'ingresso} \end{array} \right.$$

Occorre analizzare gli effetti delle perturbazioni:

$$\delta x_1(t) = x_1(t) - x(t) \quad \text{per ogni } t \geq t_0$$

$$\delta x_2(t) = x_2(t) - x(t)$$



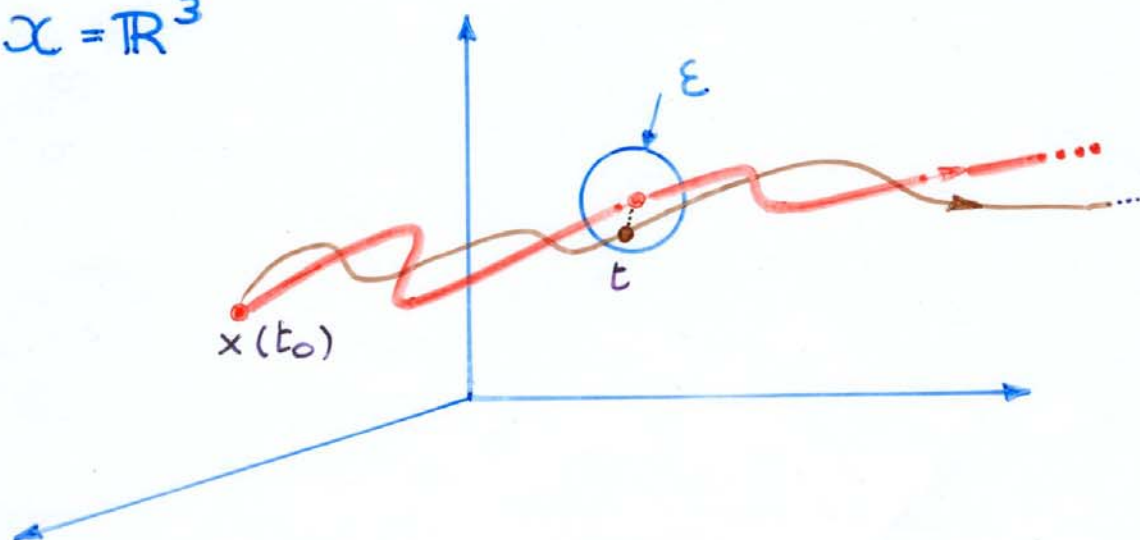
## Stabilità rispetto a perturbazioni dell'ingresso

il moto di riferimento è stabile rispetto a  $\delta u(\cdot)$  o **stabile ingresso limitato - stato limitato** se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\eta > 0$  tale che, quando  $\|\delta u(\cdot)\| < \eta$ , risulta per  $t \geq t_0$   $\|\delta x_2(t)\| < \varepsilon$

(Si noti che riferendosi alla funzione di risposta  $\gamma(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$  piuttosto che alla  $\phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$  si ottiene in modo analogo la **stabilità ingresso limitato - uscita limitata**)

Interpretazione geometrica

$$x = \mathbb{R}^3$$



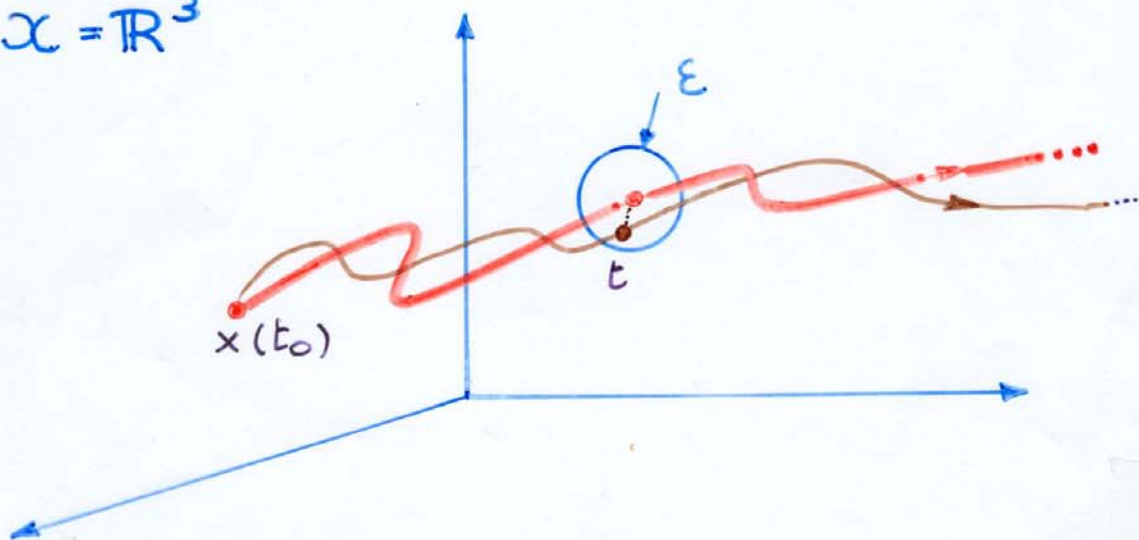
## Stabilità rispetto a perturbazioni dell'ingresso

il moto di riferimento è stabile rispetto a  $\delta u(\cdot)$  o **stabile ingresso limitato - stato limitato** se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\eta > 0$  tale che, quando  $\|\delta u(\cdot)\| < \eta$ , risulta per  $t \geq t_0$   $\|\delta x_2(t)\| < \varepsilon$

(Si noti che riferendosi alla funzione di risposta  $\gamma(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$  piuttosto che alla  $\phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$  si ottiene in modo analogo la **stabilità ingresso limitato - uscita limitata**)

Interpretazione geometrica.

$$\mathcal{X} = \mathbb{R}^3$$



## Osservazioni

- La stabilità, così come è stata definita, si riferisce ad un moto (o ad una risposta) individuato da una terna  $t_0, x(t_0), u(\cdot)$ .
- La stabilità può essere riferita ad uno stato d'equilibrio

$$\bar{x} = \phi(t, t_0, \bar{x}, u(\cdot))$$

che è un particolare moto del sistema

- Si è soliti distinguere la stabilità *in piccolo* (piccole perturbazioni) dalla stabilità *in grande*, nella quale si misura l'entità della perturbazione cui corrisponde un comportamento stabile del sistema

## Sistemi lineari stazionari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ (t_0=0) \end{array}$$

tempo continuo

$$\begin{cases} x(t+1) = A_d x(t) + B_d u(t) \\ y(t) = C_d x(t) + D_d u(t) \end{cases} \quad x(0) = x_0$$

tempo discreto

Per tali sistemi è necessario, dapprima, ricavare l'espressione della funzione di transizione dello stato  $\Phi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$  e della funzione di risposta  $\gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot))$

Caso omogeneo ( $u(t)=0$ ) continuo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n$$

Teorema

La soluzione di tale equazione (vettoriale) è del tipo:

$$x(t) = e^{At} x_0$$

dove

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots$$

è chiamata esponenziale della matrice  $A$   
(Si omette la dimostrazione.)

• Osservazione: conoscere l'esponenziale della matrice  $A$  equivale a conoscere la soluzione dell'equazione differenziale per ogni condizione iniziale.

• Si noti ancora che:

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i t^{i-1}}{(i-1)!} = A e^{At}$$

$$e^{At} \Big|_{t=0} = I$$

L'esponenziale  $e^{At}$  è la soluzione dell'equazione differenziale matriciale:

$$\dot{X}(t) = AX(t) \quad X(0) = I$$

Proprietà (sono omesse le dimostrazioni)

- è non singolare per ogni  $t$ , per cui si può scrivere:

$$x(0) = (e^{At})^{-1} x(t)$$

- risulta:

$$(e^{At})^{-1} = e^{-At}$$

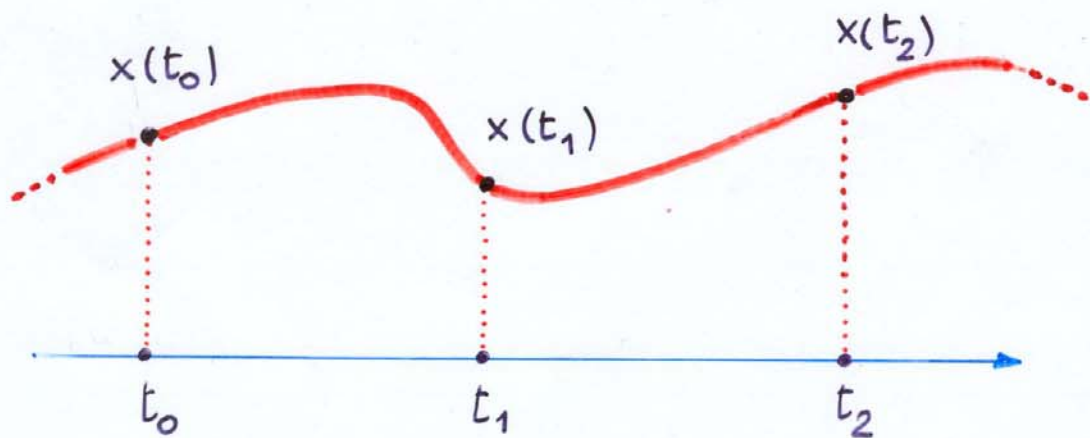
$$e^{A(t+\tau)} = e^{At} \cdot e^{A\tau}$$

$$(e^{At})^k = e^{Akt}, \quad k \in \mathbb{I}$$

$$e^{(A+B)t} \neq e^{At} e^{Bt}$$

L'esponenziale di matrice  $e^{At}$  è chiamata **matrice di transizione** del sistema perché governa, in assenza d'ingresso, il moto libero

$$\phi(t, t_0, x(t_0), 0) = e^{A(t-t_0)} x(t_0)$$



$$x(t_1) = e^{A(t_1-t_0)} x(t_0)$$

$$x(t_2) = e^{A(t_2-t_0)} x(t_0)$$

$$= e^{A(t_2-t_1)} x(t_1)$$

$$= e^{A(t_2-t_1)} e^{A(t_1-t_0)} x(t_0)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{e^{A(t_2-t_0)}}$$

## Polinomi annullatori

Si consideri una matrice reale  $A$  ( $n \times n$ )

Il polinomio

$$\det(\lambda I - A) = \alpha(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

è chiamato **polinomio caratteristico** di  $A$

Il polinomio caratteristico equagliato a 0 è l'**equazione caratteristica** di  $A$ , le cui radici sono gli **autovalori** di  $A$

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_h)^{n_h} = 0$$

**Teorema di Cayley Hamilton**

La matrice  $A$  soddisfa la sua equazione caratteristica

$$\alpha(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0$$

Polinomio annullatore  $p(\lambda)$  per  $A$

Ogni polinomio che soddisfa la relazione

$$p(A) = 0$$

Polinomio minimo di  $A$

È il polinomio annullatore  $\alpha(\lambda)$  di grado minimo

$$\alpha(A) = 0$$



## Proprietà del polinomio minimo

- è unico se considerato monico,
- è un divisore del polinomio caratteristico:

$$\alpha(\lambda) = \frac{\det(\lambda I - A)}{b(\lambda)},$$

dove  $b(\lambda)$  è il massimo comun divisore monico degli elementi della matrice  $\text{agg}(\lambda I - A)$ ,

- ha come radici tutti gli autovalori di  $A$ :

$$\begin{aligned}\alpha(\lambda) &= \lambda^l + \alpha_{l-1} \lambda^{l-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = \\ &= (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{l_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_h)^{l_h}\end{aligned}$$

con:  $0 < l_i \leq n_i \quad (i = 1, 2, \dots, h)$

$$\sum_{i=1}^h l_i = l \leq \sum_{i=1}^h n_i = n$$

Si noti che  $(\lambda I - A)^{-1} = \frac{\text{agg}(\lambda I - A)}{\det(\lambda I - A)}$  è una

matrice i cui elementi sono rapporti di polinomi: il minimo comune multiplo dei denominatori è il polinomio minimo di  $A$ .

Calcolo di  $e^{At}$  con la teoria delle funzioni di matrice.

Sia  $A$  una matrice ( $n \times n$ ) ad elementi reali.

Si consideri una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sviluppabile in serie di potenze:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

La corrispondente funzione di matrice è definita come:

$$f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i A^i$$

Sia:

$$\begin{aligned} \lambda^l + \alpha_{l-1} \lambda^{l-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 &= \\ &= (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{l_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)^{l_n} \end{aligned}$$

il polinomio minimo monico della matrice

$A$ , cosicché risulta:

$$A^l = -\alpha_{l-1} A^{l-1} - \dots - \alpha_1 A - \alpha_0 I$$

$$\lambda_k^l = -\alpha_{l-1} \lambda_k^{l-1} - \dots - \alpha_1 \lambda_k - \alpha_0$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

Risulta allora:

$$f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i A^i = \sum_{i=0}^{\ell-1} \delta_i A^i$$

$$f(\lambda_k) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \lambda_k^i = \sum_{i=0}^{\ell-1} \delta_i \lambda_k^i$$

$k = 1, 2, \dots, h$

dove i coefficienti  $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{\ell-1}$  sono incogniti.

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ \vdots \\ f(\lambda_h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{\ell-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{\ell-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_h & \lambda_h^2 & \dots & \lambda_h^{\ell-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{\ell-1} \end{bmatrix}$$

Se  $h = \ell$  (radici distinte nel polinomio minimo)

il sistema in esame ha soluzione in  $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{\ell-1}$  essendo la matrice dei coefficienti

(matrice di Vandermonde) non singolare

Ricavati i coefficienti  $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{\ell-1}$  la funzione di matrice si calcola con la relazione:

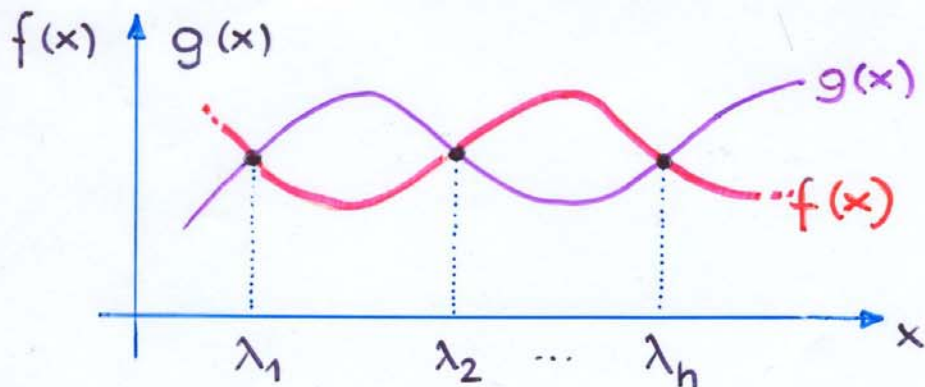
$$f(A) = \sum_{i=0}^{\ell-1} \delta_i A^i$$

Si noti che:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \neq \sum_{i=0}^{b-1} \delta_i x^i = g(x)$$

L'eguaglianza vale solo quando

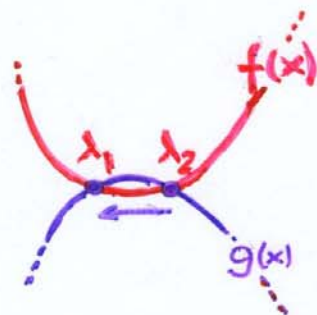
$$x = \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, h$$



Se  $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$  risulta:

$$f(\lambda_1) = g(\lambda_1)$$

$$f'(\lambda_1) = g'(\lambda_1)$$



essendo:

$$f'(\lambda_1) = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=\lambda_1}$$

$$g'(\lambda_1) = \left. \frac{d}{dx} g(x) \right|_{x=\lambda_1}$$

Se  $h \neq l$  risulta pertanto:

$$\begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f'(\lambda_1) \\ \vdots \\ f^{(l_1-1)}(\lambda_1) \\ \hline f(\lambda_2) \\ f'(\lambda_2) \\ \vdots \\ f^{(l_2-1)}(\lambda_2) \\ \hline \vdots \\ f^{(l_h-1)}(\lambda_h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{l-1} \\ 0 & 1 & & (l-1)\lambda_1^{l-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{(l-1)!}{(l-l_1)!} \lambda_1^{l-l_1} \\ \hline 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{l-1} \\ 0 & 1 & \dots & (l-1)\lambda_2^{l-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{(l-1)!}{(l-l_2)!} \lambda_2^{l-l_2} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{(l-1)!}{(l-l_h)!} \lambda_h^{l-l_h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta_{l-1} \end{bmatrix}$$

$V$ : matrice di Vandermonde generalizzata (non singolare)

Ricavati i coefficienti  $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{l-1}$  la funzione di matrice si calcola con la relazione

$$f(A) = \sum_{i=0}^{l-1} \delta_i A^i$$

Quando  $f(A) = e^{At}$  risulta:

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ t e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ t^{\ell_1-1} e^{\lambda_1 t} \\ \hline e^{\lambda_2 t} \\ t e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ t^{\ell_2-1} e^{\lambda_2 t} \\ \hline \vdots \\ e^{\lambda_h t} \\ t e^{\lambda_h t} \\ \vdots \\ t^{\ell_h-1} e^{\lambda_h t} \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{\ell-1} \end{bmatrix} ; \quad e^{At} = \sum_{i=0}^{\ell-1} \delta_i A^i$$

Ogni termine di  $e^{At}$  è una combinazione lineare a coefficienti costanti di

$$e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{\ell_1-1} e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_h t}, \dots, t^{\ell_h-1} e^{\lambda_h t}$$

che si chiamano **modi di  $e^{At}$**  e caratterizzano il moto libero del sistema.

## Caso non omogeneo ( $u(t) \neq 0$ ) continuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$
$$x(t) \in \mathbb{R}^n$$

### Teorema

La soluzione di tale equazione (vettoriale) è del tipo:

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Verifica:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} (e^{At} x_0) + \frac{d}{dt} \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \\ &= A e^{At} x_0 + e^{A(t-t)} B u(t) + A \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot \\ &\quad \cdot B u(\tau) d\tau \\ &= A \left[ \underbrace{e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau}_{x(t)} \right] + B u(t) \end{aligned}$$

Si noti che:

$$e^{At} x_0 = \phi(t, 0, x_0, 0) = \text{moto libero}$$

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \phi(t, 0, 0, u(\cdot)) = \text{moto forzato}$$

Può in generale, se la condizione iniziale non è associata all'istante zero

$$x(t_0) = x_0, \quad t_0 \neq 0$$

risulta:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$



La funzione di risposta è del tipo:

$$y(t) = \gamma(t, 0, x_0, u(\cdot)) \\ = C e^{At} x_0 + \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t)$$

$$\gamma(t, 0, x_0, 0) = C e^{At} x_0 = \text{risposta libera}$$

$$\gamma(t, 0, 0, u(\cdot)) = \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t) = \\ = \text{risposta forzata}$$

La matrice  $W(t) = C e^{At} B$  è chiamata *risposta impulsiva* del sistema

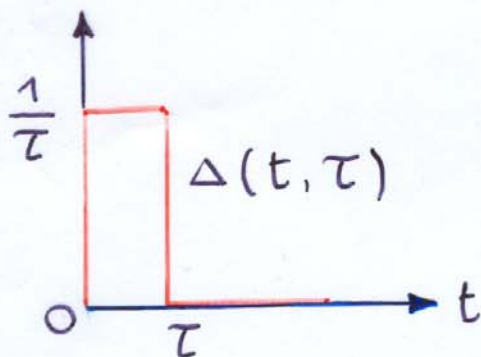
Se  $x_0 = 0$  ed il sistema è puramente dinamico ( $D=0$ ) risulta:

$$y(t) = \int_0^t W(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

La matrice della risposta impulsiva è un *modello matematico ingresso-uscita* del sistema.

## Determinazione sperimentale della risposta impulsiva

Si consideri la seguente funzione del tempo:

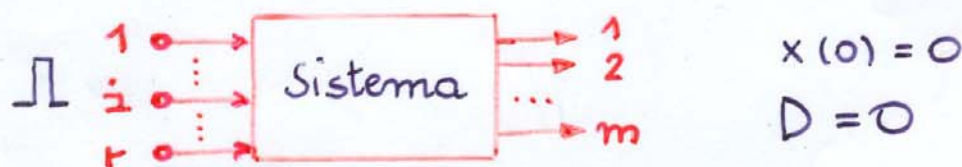


e si faccia tendere  $\tau$  a zero. Ciò che si ottiene è **l'impulso di Dirac**

$$\int_0^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \Delta(t, \tau) dt = 1$$

$$\int_0^{\infty} f(t) \delta(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f(t) \Delta(t, \tau) dt = f(0)$$

Si applichi l'impulso di Dirac all' $i$ -esimo ingresso del sistema:



$$u(t) = \delta(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \delta(t) e_i$$

←  $i$ -esima componente

Risulta:

$$y(t) = \int_0^t W(t-\tau) \delta(\tau) e_i d\tau = \underbrace{w(t)}_{\substack{i\text{-esima} \\ \text{colonna di} \\ W(t)}} e_i$$

Applicando l'impulso di Dirac ai vari ingressi del sistema ( $i=1, 2, \dots, r$ ) si ricostruiscono le colonne della matrice  $W(t)$ , si ricava cioè sperimentalmente un modello matematico del sistema.

## Caso omogeneo ( $u(t) = 0$ ) discreto

$$x(t+1) = A_d x(t)$$

$$x(0) = x_0$$
$$x(t) \in \mathbb{R}^n$$

In questo caso risulta:

$$x(1) = A_d x(0)$$

$$x(2) = A_d x(1) = A_d^2 x(0)$$

...

$$x(t) = A_d^t x_0 \quad t \in \mathbb{I}$$

La matrice di transizione del sistema, che governa il moto libero, è nel caso discreto la potenza di matrice  $A_d^t$ .

Tale matrice può essere singolare e può essere calcolata con la teoria delle funzioni di matrice. Così facendo si dimostra che ogni termine di  $A_d^t$  è una combinazione a coefficienti costanti di:

$$\lambda_1^t, t\lambda_1^{t-1}, \dots, (l_1-1)! \binom{t}{l_1-1} \lambda_1^{t-l_1+1}, \dots$$
$$\dots (l_h-1)! \binom{t}{l_h-1} \lambda_h^{t-l_h+1}$$

che si chiamano **modi di  $A_d^t$** .

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$  sono gli zeri del polinomio minimo di  $A_d$ , di molteplicità  $l_1, l_2, \dots, l_h$  rispettivamente.

Modi di  $e^{At}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{\ell_1-1} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_h t}, t e^{\lambda_h t}, \dots, t^{\ell_h-1} e^{\lambda_h t} \end{array} \right.$$

radici del polinomio minimo  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$  autovalori  
 $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_h$  molteplicità

Modi di  $A_d^t$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^t, t \lambda_1^{t-1}, \dots, (\ell_1-1)! \binom{t}{\ell_1-1} \lambda_1^{t-\ell_1+1} \\ \vdots \\ \lambda_h^t, t \lambda_h^{t-1}, \dots, (\ell_h-1)! \binom{t}{\ell_h-1} \lambda_h^{t-\ell_h+1} \end{array} \right.$$

## Caso non omogeneo ( $u(t) \neq 0$ ) discreto

$$x(t+1) = A_d x(t) + B_d u(t), \quad x(0) = x_0$$
$$x(t) \in \mathbb{R}^n$$

In questo caso risulta:

$$x(1) = A_d x(0) + B_d u(0)$$

$$x(2) = A_d x(1) + B_d u(1) = A_d^2 x(0) + A_d B_d u(0) + B_d u(1)$$

$$\dots \dots + B_d u(1)$$

$$x(t) = A_d^t x_0 + \sum_{j=0}^{t-1} A_d^{t-j-1} B_d u(j)$$

Si noti che:

$$A_d^t x_0 = \phi(t, 0, x_0, 0) = \text{moto libero}$$

$$\sum_{j=0}^{t-1} A_d^{t-j-1} B_d u(j) = \phi(t, 0, 0, u(\cdot)) \text{ moto forzato}$$

La funzione di risposta è del tipo:

$$y(t) = \gamma(t, 0, x_0, u(\cdot)) = C_d A_d^t x_0 + \sum_{j=0}^{t-1} C_d A_d^{t-j-1} B_d u(j) + D_d u(t)$$

$$W(t) = C_d A_d^{t-1} B_d$$

è la risposta impulsiva del sistema nel caso discreto, cioè la risposta del sistema all'ingresso:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t=0 \\ 0 & \text{per } t \neq 0 \end{cases}$$

ed ha lo stesso significato proposto nel caso continuo.

## Cambiamenti di base nello spazio degli stati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad x(0) = x_0$$

Si operi il cambiamento di base:

$$\begin{aligned} x &= Tz \\ z &= T^{-1}x \end{aligned}$$

Si ottiene:

$$\begin{cases} T\dot{z}(t) = ATz(t) + Bu(t) \\ y(t) = CTz(t) + Du(t) \end{cases} \quad Tz(0) = x_0$$

cioè:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \hat{A}z(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) &= \hat{C}z(t) + \hat{D}u(t) \end{aligned} \quad z(0) = T^{-1}x_0$$

con:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= T^{-1}AT & \hat{B} &= T^{-1}B \\ \hat{C} &= CT & \hat{D} &= D \end{aligned}$$

I due sistemi  $(A, B, C, D)$  e  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$  sono *equivalenti*

$A$  e  $\hat{A}$  sono matrici simili. Risulta:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - \hat{A}) &= \det(\lambda T^{-1}T - T^{-1}AT) = \\ &= \det[T^{-1}(\lambda I - A)T] = \cancel{\det T^{-1}} \cdot \det(\lambda I - A) \cdot \cancel{\det T} \end{aligned}$$

Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico e anche lo stesso polinomio minimo



Risulta ancora:

$$\hat{A}^2 = T^{-1} A T \cdot T^{-1} A T = T^{-1} A^2 T$$

$$e^{\hat{A}t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^i t^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T^{-1} A^i T t^i}{i!} = T^{-1} e^{At} T$$

$$\hat{C} e^{\hat{A}t} \hat{B} = C T T^{-1} e^{At} T T^{-1} B = C e^{At} B$$

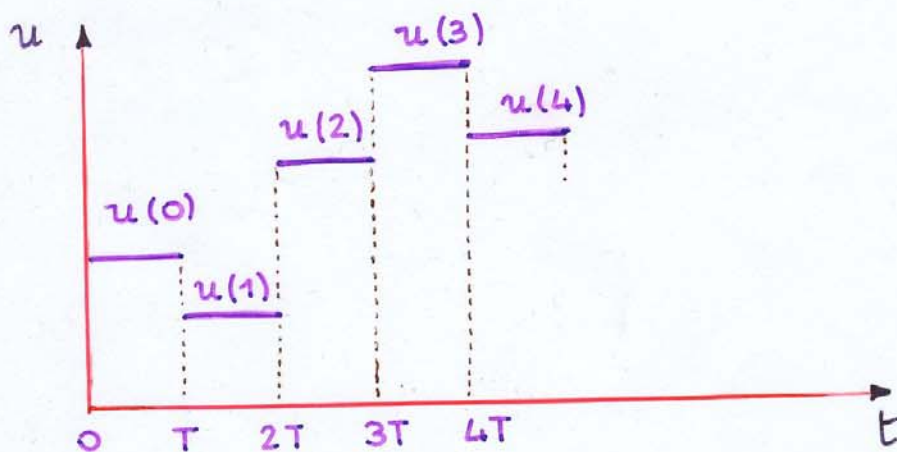
Considerazioni analoghe valgono per i sistemi discreti

Trasformazione di un modello continuo  
in un modello discreto "equivalente"

Si consideri il modello

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$$

Si supponga che ogni componente del vettore  $u$  abbia un andamento del tipo:



Si integri l'equaz. differenziale tra due successivi istanti di campionamento  $iT$  e  $(i+1)T$

$$x[(i+1)T] = \underbrace{e^{AT}}_{A_d} x(iT) + \underbrace{\int_{iT}^{(i+1)T} e^{A[(i+1)T-\tau]} B d\tau}_{B_d} \cdot u(iT)$$

che è del tipo:

$$x(i+1) = A_d x(i) + B_d u(i)$$

$i=0,1,2,\dots$

avendo posto :

$$A_d = e^{AT}$$

$$B_d = \int_{iT}^{(i+1)T} e^{A[(i+1)T-\tau]} d\tau \cdot B =$$
$$= \left[ \int_0^T e^{A\varepsilon} d\varepsilon \right] B \quad (\varepsilon = (i+1)T - \tau)$$

Per l'equazione d'uscita si può scrivere:

$$y(iT) = Cx(iT) + Du(iT)$$

che è del tipo:

$$y(i) = C_d x(i) + D_d u(i)$$

con

$$C_d = C \quad e \quad D_d = D$$

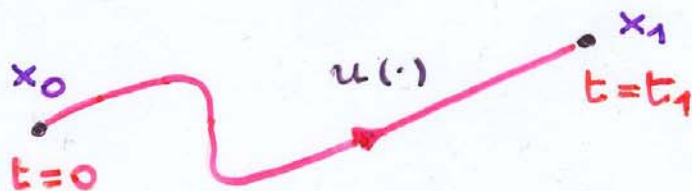
Il modello discreto  $(A_d, B_d, C_d, D_d)$  fornisce ad  $i$  lo stesso valore dello stato e dell'uscita fornito dal modello continuo  $(A, B, C, D)$  all'istante  $iT$ .

cioè se l'ingresso è costante tra gli istanti di campionamento successivi.

# Raggiungibilità e Controllabilità

Per il sistema  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  esiste almeno una funzione d'ingresso  $u(\cdot)$  che consente la transizione dallo stato  $x(0) = x_0$  allo stato  $x(t_1) = x_1$ , con  $x_0$  ed  $x_1$  arbitrari (appartenenti ad  $\mathcal{X}$ ),  $t_1$  arbitrario e diverso da zero, se e solo se:

$$\text{rango } P = \text{rango} [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B] = n$$



(È omessa la dimostrazione)

Si noti che  $P$  è una matrice di dimensioni  $(n \times nr)$  se  $r$  è il numero degli ingressi

Se  $\text{rango } P = n$  si dice che il sistema è completamente raggiungibile e completamente controllabile, cioè in un intervallo di tempo finito (arbitrario) da uno stato  $x_0$  (arbitrario) è possibile raggiungere tutti gli stati  $\mathcal{X}$  e tutti gli stati di  $\mathcal{X}$  sono controllabili ad uno stato  $x_1$  (arbitrario).

## Teorema

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, x \in \mathbb{R}^n$$

e sia  $\text{rank } P = n_c < n$

Sia  $T_1$  la matrice costruita con le  $n_c$  colonne linearmente indipendenti di  $P$

e sia  $T_2$  una matrice  $n \times (n - n_c)$  tale che  $T = [T_1 \mid T_2]$  sia non singolare.

Col cambiamento di base  $z = T^{-1}x$  risulta:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \hat{A}_c z(t) + \hat{B}_c u(t) \\ y(t) = \hat{C}_c z(t) \end{cases} \quad \begin{aligned} \hat{A}_c &= T^{-1}AT \\ \hat{B}_c &= T^{-1}B \\ \hat{C}_c &= CT \end{aligned}$$

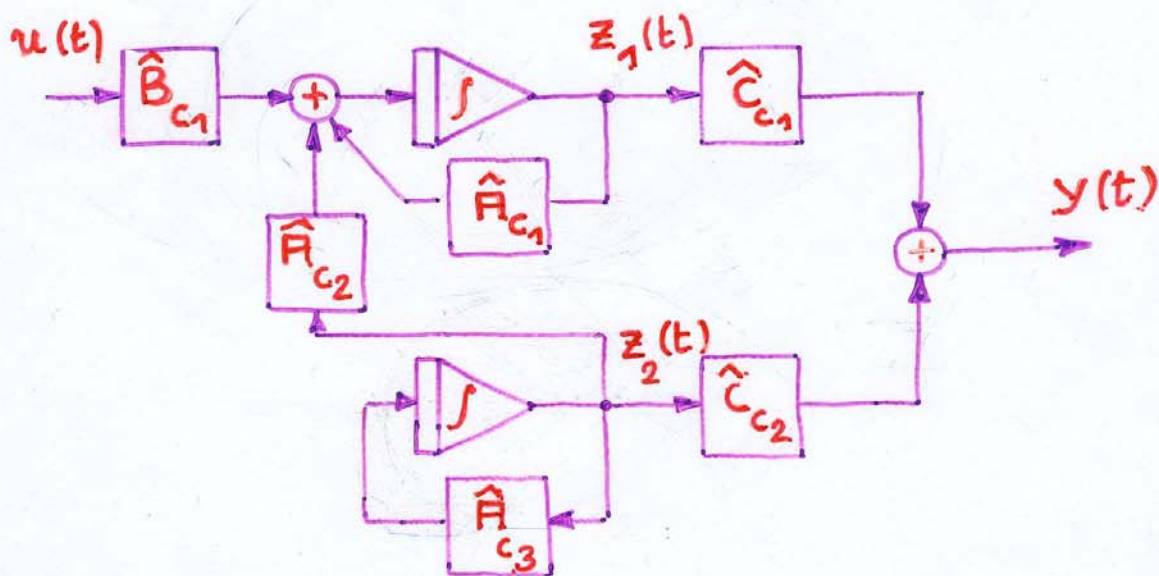
con:

$$\hat{A}_c = \begin{bmatrix} \hat{A}_{c_1} & \hat{A}_{c_2} \\ 0 & \hat{A}_{c_3} \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_c = \begin{bmatrix} \hat{B}_{c_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C}_c = [\hat{C}_{c_1} \mid \hat{C}_{c_2}]$$

Il sottosistema  $(\hat{A}_{c_1}, \hat{B}_{c_1}, \hat{C}_{c_1})$  è la parte raggiungibile e controllabile di  $(A, B, C)$   
(È omessa la dimostrazione)

$$\hat{A}_{c_1} (n_c \times n_c), \quad \hat{B}_{c_1} (n_c \times r), \quad \hat{C}_{c_1} (m \times n_c)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \hat{A}_{c_1} z_1(t) + \hat{A}_{c_2} z_2(t) + \hat{B}_{c_1} u(t) \\ \dot{z}_2(t) = \hat{A}_{c_3} z_2(t) \\ y(t) = \hat{C}_{c_1} z_1(t) + \hat{C}_{c_2} z_2(t) \end{cases}$$



Le variabili di stato  $z_2$  non sono influenzate dall'ingresso nè direttamente nè indirettamente.

Si noti che se  $z_2(0) = 0$  risulta  $z_2(t) = 0$  per ogni  $t > 0$

Per il sistema discreto

$$x(t+1) = A_d x(t) + B_d u(t), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

esiste una sequenza d'ingresso  $u(\cdot)$  che consente la transizione dallo stato  $x(0) = x_0$  allo stato  $x(k) = x_1$ , con  $x_0$  ed  $x_1$  arbitrari (appartenenti ad  $\mathcal{X}$ ),  $k$  (numero di passi) arbitrario purché maggiore od eguale ad  $n$ , se e solo se

$$\text{rango } P = \text{rango} \begin{bmatrix} B_d & A_d B_d & \dots & A_d^{n-1} B_d \end{bmatrix} = n$$

Se  $\text{rango } P = n$  si dice che il sistema è completamente raggiungibile e completamente controllabile.

Anche per i sistemi discreti vale il teorema di scomposizione che consente di isolare il sottosistema raggiungibile e controllabile.

## Definizioni

- Un sistema dinamico si dice **completamente osservabile** in  $[t_0, t_1]$  se la conoscenza del comportamento in ingresso-uscita  $u[t_0, t_1]$  ed  $y[t_0, t_1]$  consente di determinare lo stato iniziale  $x(t_0)$  per ogni  $u[t_0, t_1]$ .
- Un sistema dinamico si dice **completamente ricostruibile** in  $[t_0, t_1]$  se la conoscenza del comportamento ingresso-uscita  $u[t_0, t_1]$  ed  $y[t_0, t_1]$  consente di determinare lo stato finale  $x(t_1)$  per ogni  $u[t_0, t_1]$ .

Poiché  $x(t_1) = \phi(t_1, t_0, x(t_0), u(\cdot))$

la determinazione dello stato iniziale porta alla determinazione dello stato finale, cioè:

completa osservabilità  
in  $[t_0, t_1]$   $\rightarrow$  completa ricostruibilità  
in  $[t_0, t_1]$



# Osservabilità e Ricostruibilità

Il sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

è completamente osservabile e completamente ricostruibile in qualsiasi intervallo di tempo  $[0, t]$ ,  $t$  diverso da zero, se e solo se

$$\text{rango } Q^T = \text{rango } [C^T \mid AC^T \mid \dots \mid (A^T)^{n-1} C^T] = n$$

(È omessa la dimostrazione)

Un sistema completamente osservabile e completamente ricostruibile non ha stati equivalenti cioè è in forma minima

Si noti che  $Q^T$  è una matrice di dimensioni  $(n \times nm)$  se  $m$  è il numero delle uscite

## Teorema

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$y(t) = Cx(t)$$

e sia  $\text{rang} Q^T = n_0 < n$

Sia  $T_1$  la matrice costruita con le  $n_0$  colonne linearmente indipendenti di  $Q^T$  e sia  $T_2$  una matrice  $n \times (n - n_0)$  tale che

$T = [T_1 \mid T_2]$  sia non singolare e  $T_2^T T_1 = 0$

con il cambiamento di base  $z = T^{-1}x$  risulta:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \hat{A}_0 z(t) + \hat{B}_0 u(t) \\ y(t) = \hat{C}_0 z(t) \end{cases} \quad \begin{aligned} \hat{A}_0 &= T^{-1} A T \\ \hat{B}_0 &= T^{-1} B \\ \hat{C}_0 &= C T \end{aligned}$$

con

$$\hat{A}_0 = \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A}_{0_1} & 0 \\ \hline \hat{A}_{0_3} & \hat{A}_{0_2} \end{array} \right], \quad \hat{B}_0 = \left[ \begin{array}{c} \hat{B}_{0_1} \\ \hat{B}_{0_2} \end{array} \right], \quad \hat{C}_0 = \left[ \hat{C}_{0_1} \mid 0 \right]$$

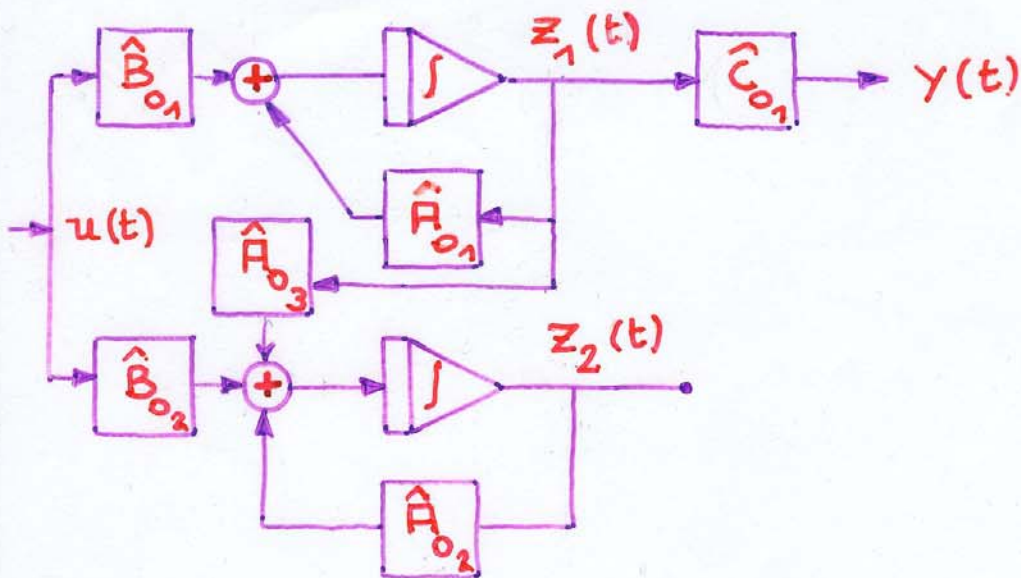
Il sottosistema  $(\hat{A}_{0_1}, \hat{B}_{0_1}, \hat{C}_{0_1})$  è la parte osservabile e ricostruibile del sistema

$(A, B, C)$  cioè la sua forma minima.

(È omessa la dimostrazione.)

$$\hat{A}_{0_1} (n_0 \times n_0), \quad \hat{B}_{0_1} (n_0 \times r), \quad \hat{C}_{0_1} (m \times n_0)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \hat{A}_{0_1} z_1(t) + \hat{B}_{0_1} u(t) \\ \dot{z}_2(t) = \hat{A}_{0_3} z_1(t) + \hat{A}_{0_2} z_2(t) + \hat{B}_{0_2} u(t) \\ y(t) = \hat{C}_{0_1} z_1(t) \end{cases}$$



Le variabili di stato  $z_2$  non influenzano l'uscita né direttamente né indirettamente.

## Il sistema discreto

$$\begin{cases} x(t+1) = A_d x(t) + B_d u(t) \\ y(t) = C_d x(t) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

è completamente osservabile e completamente ricostruibile nell'intervallo  $[0, k]$ ,  $k$  (numero di passi) arbitrario purché maggiore ed eguale ad  $(n-1)$  se e solo se:

$$\text{rango } Q^T = \begin{bmatrix} C_d^T & A_d^T C_d^T & \dots & (A_d^T)^{n-1} C_d^T \end{bmatrix} = n$$

Anche per i sistemi discreti vale il teorema di scomposizione che consente di isolare il sottosistema osservabile e ricostruibile (forma minima del sistema)

Si consideri la forma minima  $(\hat{A}_{o_1}, \hat{B}_{o_1}, \hat{C}_{o_1})$  del sistema e ad essa si applichi il cambiamento di base per la scomposizione nel sottosistema raggiungibile - controllabile e non:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \hat{A}_{o_1} z_1(t) + \hat{B}_{o_1} u(t) \\ y(t) = \hat{C}_{o_1} z_1(t) \end{cases} \quad z_1 \in \mathbb{R}^{n_o}$$

$$\begin{cases} w = \hat{T}^{-1} z_1 & \hat{T} = [\hat{T}_1 \mid \hat{T}_2] \\ \hat{T}_1 : n_{oc} \text{ colonne linearmente indipendenti} \\ \quad \text{di } [\hat{B}_{o_1} \mid \hat{A}_{o_1} \hat{B}_{o_1} \mid \dots \mid \hat{A}_{o_1}^{n_o-1} \hat{B}_{o_1}] \\ \hat{T}_2 : \text{ da rendere } \hat{T} \text{ non singolare} \end{cases}$$

Risulta:

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = \hat{A}_{oc} w(t) + \hat{B}_{oc} u(t) \\ y(t) = \hat{C}_{oc} w(t) \end{cases}$$

$$\hat{A}_{oc} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{oc_1} & \hat{A}_{oc_2} \\ \hline 0 & \hat{A}_{oc_3} \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_{oc} = \begin{bmatrix} \hat{B}_{oc_1} \\ \hline 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C}_{oc} = [\hat{C}_{oc_1} \mid \hat{C}_{oc_2}]$$

$(\hat{A}_{oc_1}, \hat{B}_{oc_1}, \hat{C}_{oc_1})$  è la parte raggiungibile controllabile - osservabile ricostruibile del sistema  $(A, B, C)$ : quella che caratterizza il comportamento ingresso-uscita a partire dallo stato 0.

Stabilità di un moto rispetto a perturbazioni dello stato iniziale per il sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

moto di riferimento

$$x_1(t) = e^{At} [x(0) + \delta x_1(0)] + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

moto perturbato

$$\delta x_1(t) = x_1(t) - x(t) = e^{At} \delta x_1(0)$$

Si noti che  $\delta x_1(t)$  non dipende dal moto di riferimento: si può parlare di **stabilità del sistema**.

Il sistema è semplicemente stabile se e solo se la norma di  $e^{At}$  è limitata per ogni  $t$ .

Ciò accade se e solo se tutti gli autovalori di  $A$  hanno parte reale negativa o nulla, quelli a parte reale nulla devono avere molteplicità unitaria nel polinomio minimo di  $A$ .

Tale condizione impone a tutti i modi di  $e^{At}$  di essere limitati.

Il sistema è asintoticamente stabile se e solo se la norma di  $e^{At}$  è limitata per ogni  $t$  e tende a zero per  $t$  tendente all'infinito.

Ciò accade se e solo tutti gli autovalori di  $A$  hanno parte reale negativa.

Tale condizione impone a tutti i modi di  $e^{At}$  di tendere a zero quando  $t$  tende all'infinito.

Per i sistemi discreti:

$$x(t+1) = A_d x(t) + B_d u(t)$$

$$x(t) = A_d^t x(0) + \sum_{j=0}^{t-1} A_d^{t-j-1} B_d u(j)$$

modo di riferimento

$$x_1(t) = A_d^t [x(0) + \delta x_1(0)] + \sum_{j=0}^{t-1} A_d^{t-j-1} B_d u(j)$$

modo perturbato

$$\delta x_1(t) = x_1(t) - x(t) = A_d^t \delta x_1(0)$$

Il sistema è semplicemente stabile se e solo se gli autovalori di  $A_d$  hanno modulo minore od eguale ad 1, quelli a modulo unitario devono avere molteplicità unitaria nel polinomio minimo di  $A_d$ .

Tale condizione impone a tutti i modi di  $A_d^t$  di essere limitati

Il sistema è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori di  $A_d$  hanno modulo inferiore all'unità

Tale condizione impone a tutti i modi di  $A_d^t$  di tendere a zero quando  $t$  tende all'infinito



## Stabilità di un moto rispetto a perturbazioni dell'ingresso

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

moto di riferimento

$$x_2(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B [u(\tau) + \delta u(\tau)] d\tau$$

$$\delta x_2(t) = x_2(t) - x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \delta u(\tau) d\tau$$

Si noti che  $\delta x_2(t)$  non dipende dal moto di riferimento: si può parlare di stabilità del sistema.

Il sistema è stabile ingresso limitato - stato limitato (i.l.s.l.) se e solo se l'integrale

$$\int_0^t \|e^{A(t-\tau)} B\| d\tau < M$$

è limitato. ciò accade se e solo se tutti gli autovalori della parte raggiungibile e controllabile del sistema sono a parte reale negativa (autovalori della matrice  $\hat{A}_{c,r}$ )

Per i sistemi discreti tali autovalori devono avere modulo inferiore all'unità

Stabilità di una risposta rispetto a perturbazioni dell'ingresso

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

uscita di riferimento

$$y_2(t) = Ce^{At}x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B [u(\tau) + \delta u(\tau)] d\tau$$

uscita perturbata

$$\delta y_2(t) = y_2(t) - y(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \delta u(\tau) d\tau$$

Il sistema è stabile ingresso limitato - uscita limitata (i.l.u.l.) se e solo se l'integrale

$$\int_0^t \|C e^{A(t-\tau)} B\| d\tau < M$$

è limitato. Ciò accade se e solo se tutti gli autovalori della parte raggiungibile controllabile - osservabile ricostruibile del sistema sono a parte reale negativa (autovalori della matrice  $\hat{A}_{oc_1}$ )

Per sistemi discreti tali autovalori devono avere modulo inferiore all'unità

Si noti che sia per i sistemi continui che per quelli discreti

asintotica  
stabilità



stabilità  
i.l.s.l.



stabilità  
i.l.u.l

non vale il viceversa

## Linearizzazione dei sistemi dinamici

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

Si consideri il moto di riferimento

$$\bar{x}(t) = \phi(t, \bar{t}_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot))$$

per il quale risulta

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$$

$$\bar{y}(t) = g(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$$

Si consideri una perturbazione sullo stato iniziale  $\delta x_0$  e sull'ingresso  $\delta u(\cdot)$ .

Si ottiene così un moto perturbato

$$x'(\cdot) = \bar{x}(\cdot) + \delta x(\cdot) \quad \text{tale che:}$$

$$\dot{x}'(t) = \frac{d}{dt} (\bar{x}(t) + \delta x(t)) = f(\bar{x}(t) + \delta x(t), \bar{u}(t) + \delta u(t))$$

$$y'(t) = \bar{y}(t) + \delta y(t) = g(\bar{x}(t) + \delta x(t), \bar{u}(t) + \delta u(t))$$

Se le funzioni sono sviluppabili in serie di Taylor:

$$\dot{x}'(t) + \delta \dot{x} = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) + \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{\substack{\bar{x}(t) \\ \bar{u}(t)}} \delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \bigg|_{\substack{\bar{x}(t) \\ \bar{u}(t)}} \delta u(t) + \dots$$

$$\bar{y}(t) + \delta y(t) = g(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) + \frac{\partial g}{\partial x} \bigg|_{\substack{\bar{x}(t) \\ \bar{u}(t)}} \delta x(t) + \frac{\partial g}{\partial u} \bigg|_{\substack{\bar{x}(t) \\ \bar{u}(t)}} \delta u(t) + \dots$$

Arrestando lo sviluppo al 2° termine e trascurando i termini rimanenti si ottiene

$$\delta \dot{x}(t) = A(t) \delta x(t) + B(t) \delta u(t)$$

$$\delta y(t) = C(t) \delta x(t) + D(t) \delta u(t)$$

con

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{\substack{\bar{x}(t) \\ \bar{u}(t)}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \bigg|_{\substack{\bar{x}(t) \\ \bar{u}(t)}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \bigg|_{\substack{\bar{x}(t) \\ \bar{u}(t)}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \bigg|_{\substack{\bar{x}(t) \\ \bar{u}(t)}} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \bigg|_{\substack{\bar{x}(t) \\ \bar{u}(t)}} \end{bmatrix}$$

e analogamente

$$B(t) = \frac{\partial f}{\partial u} \bigg|_{\substack{\bar{x}(t) \\ \bar{u}(t)}}$$

$$C(t) = \frac{\partial g}{\partial x} \bigg|_{\substack{\bar{x}(t) \\ \bar{u}(t)}}$$

$$D(t) = \frac{\partial g}{\partial u} \bigg|_{\substack{\bar{x}(t) \\ \bar{u}(t)}}$$

Si noti che se il sistema non lineare e stazionario viene linearizzato nell'intorno di uno stato di equilibrio corrispondente a ingresso costante si ottiene un modello stazionario

La stabilità di tale stato d'equilibrio rispetto al quale si è linearizzato il sistema non lineare può essere valutata studiando la stabilità del modello lineare

$$\delta \dot{x}(t) = A \delta x(t) + B \delta u(t)$$

### Criterio ridotto di Liapunov

Lo stato di equilibrio è **asintoticamente stabile** se tutti gli autovalori di  $A$  sono a parte reale negativa, è **instabile** se uno o più autovalori hanno parte positiva

Il criterio non copre il caso di autovalori con parte reale negativa o nulla. In tal caso occorre ricorrere al metodo diretto di Liapunov

## Assegnabilità degli autovalori

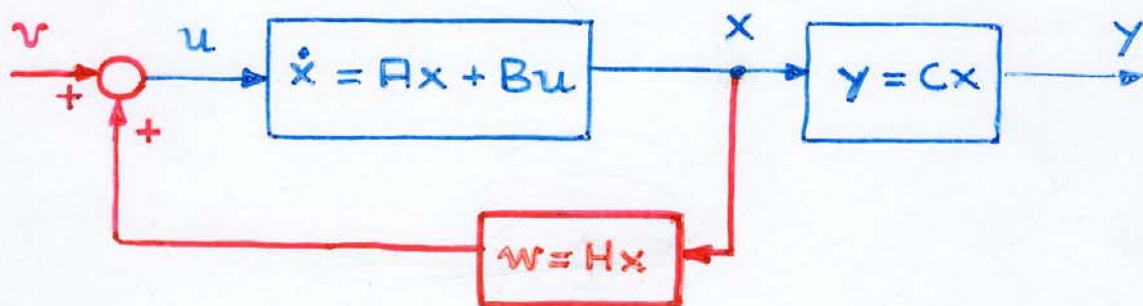
Si consideri il sistema lineare e stazionario:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$y(t) = Cx(t) \quad u \in \mathbb{R}^r$$

Si supponga che lo stato  $x(t)$  sia accessibile e si realizzi la retroazione algebrica dello stato all'ingresso del sistema:

$$u(t) = Hx(t) + v(t)$$



Risulta:

$$\dot{x}(t) = (A + BH)x(t) + Bv(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

**Teorema:** Gli autovalori di  $(A + BH)$  sono posizionabili arbitrariamente in funzione della matrice di retroazione  $H$  ( $r \times n$ ) se e solo se il sistema di partenza  $(A, B, C)$  è completamente raggiungibile-controllabile (si omette la dimostrazione.)

Ciò significa che, detti  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  gli autovalori che si vogliono assegnare con la retroazione, il sistema di  $n$  equazioni

$$\det(\lambda I - A - BH) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)$$

ammette soluzione negli  $n, r$  parametri, rappresentati dagli elementi della matrice  $H$ , se e solo se il sistema  $(A, B, C)$  è completamente raggiungibile-controllabile.

- Si noti che se  $r=1$  (sistemi ad 1 ingresso) la soluzione è unica.
- Gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  devono soddisfare il vincolo di essere presenti nell'insieme in coppia con i complessi coniugati, per avere un polinomio caratteristico a coefficienti reali.



Se il sistema non è completamente raggiungibile - controllabile può essere messo nella forma:

$$\dot{z}(t) = \begin{array}{c} \hat{A}_c \\ \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A}_{c_1} & \hat{A}_{c_2} \\ \hline 0 & \hat{A}_{c_3} \end{array} \right] z(t) + \begin{array}{c} \hat{B}_c \\ \left[ \begin{array}{c} \hat{B}_{c_1} \\ \hline 0 \end{array} \right] u(t) \end{array} \end{array}$$

$$y(t) = \underbrace{[\hat{C}_{c_1} \mid \hat{C}_{c_2}]}_{\hat{C}_c} z(t)$$

La retroazione  $u(t) = \underbrace{[H_1 \mid H_2]}_H z(t) + v(t)$  porta alla matrice:

$$\hat{A}_c + \hat{B}_c H = \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A}_{c_1} + \hat{B}_{c_1} H_1 & \hat{A}_{c_2} + \hat{B}_{c_1} H_2 \\ \hline 0 & \hat{A}_{c_3} \end{array} \right]$$

La retroazione non modifica gli autovalori di  $\hat{A}_{c_3}$ , cioè del sottosistema che non è raggiungibile - controllabile.

## Retroazione algebrica dell'uscita

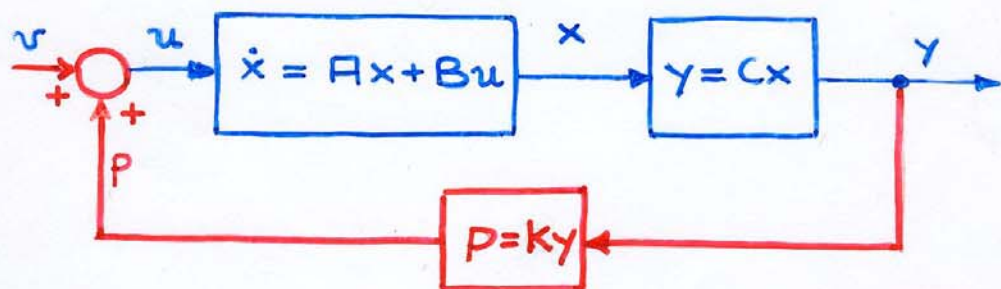
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$u(t) = k y(t) + v(t)$$

Risultato:

$$\dot{x}(t) = (A + BkC)x(t) + Bv(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$



**Teorema:** La retroazione algebrica dell'uscita sull'ingresso modifica gli autovalori della sola parte osservabile ricostruibile - raggiungibile controllabile del sistema (autovalori di  $\hat{A}_{oc,1}$ )

- Non è detto che agendo su  $k$  si riesca a posizionare arbitrariamente gli autovalori di tale sottosistema.

Infatti se consideriamo il sistema in forma minima scomposto nella parte raggiungibile controllabile ed in quella non raggiungibile controllabile:

$$\dot{w}(t) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{oc_1} & \hat{A}_{oc_2} \\ 0 & \hat{A}_{oc_3} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} \hat{B}_{oc_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [\hat{C}_{oc_1} \quad \hat{C}_{oc_2}] w(t)$$

risulta:

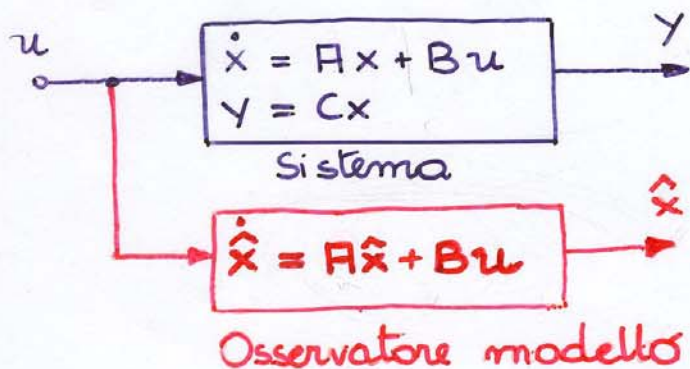
$$\hat{A}_{oc} + \hat{B}_{oc} k \hat{C}_{oc} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{oc_1} + \hat{B}_{oc_1} k \hat{C}_{oc_1} & \hat{A}_{oc_2} + \hat{B}_{oc_1} k \hat{C}_{oc_2} \\ 0 & \hat{A}_{oc_3} \end{bmatrix}$$

- La retroazione non modifica gli autovalori di  $\hat{A}_{oc_3}$  (parte non raggiungibile controllabile).
- La parte non osservabile ricostruibile non influenza l'uscita e non è pertanto modificata da tale retroazione.

Ossevatore (o Estimatore) asintotico dello stato di un sistema dinamico.

Ha lo scopo di ricostruire lo stato di un sistema dinamico dalla conoscenza del comportamento ingresso uscita.

1° schema



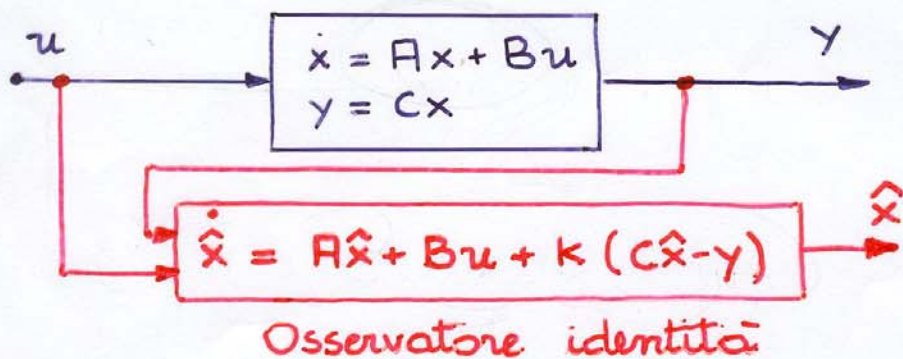
$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t) = \text{errore di stima}$$

Risulta:

$$\dot{e}(t) = Ae(t)$$
$$e(t) = e^{At} e(0)$$

L'errore di stima tende a zero quando il tempo tende all'infinito solo se il sistema sotto osservazione è asintoticamente stabile

2° schema



$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$

$$\dot{e}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + kC\hat{x}(t) - kCx(t) - Ax(t) - Bu(t)$$

$$\dot{e}(t) = (A + kC)e(t)$$

$$e(t) = e^{(A+kC)t} e(0)$$

**Teorema:** Gli autovalori di  $(A+kC)$  sono posizionabili arbitrariamente in funzione di  $k$  se il sistema sotto osservazione è completamente osservabile ricostruibile (forma minima)

(Si omette la dimostrazione)

Se, agendo su  $k$ , si ottengono autovalori con parte reale negativa, l'errore di stima tende a zero quando il tempo tende all'infinito.

Se il sistema non è in forma minima può essere messo nella forma:

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{01} & 0 \\ \hat{A}_{03} & \hat{A}_{02} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} \hat{B}_{01} \\ \hat{B}_{02} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [\hat{C}_{01} \quad 0] z(t)$$

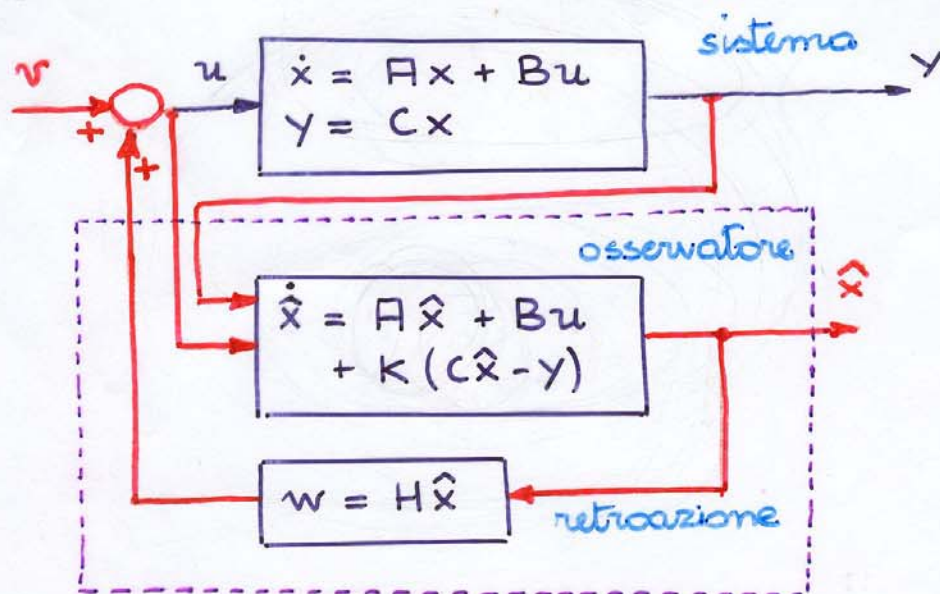
Risulta:

$$\hat{A}_0 + K\hat{C}_0 = \hat{A}_0 + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} [\hat{C}_{01} \quad 0] = \begin{bmatrix} \hat{A}_{01} + k_1 \hat{C}_{01} & 0 \\ \hat{A}_{03} + k_2 \hat{C}_{01} & \hat{A}_{02} \end{bmatrix}$$

Non vengono cioè modificati gli autovalori della parte non osservabile ricostruibile.

Per sistemi non in forma minima l'errore di stato tende a zero per  $t \rightarrow \infty$  quando gli autovalori di  $\hat{A}_{02}$  sono già a parte reale negativa e  $k_1$  è progettata in modo da rendere tali anche gli autovalori di  $(\hat{A}_{01} + k_1 \hat{C}_{01})$ .

Retroazione stato stimato - ingresso realizzata mediante osservatore



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BH\hat{x} + Bv & (u = v + H\hat{x}) \\ \dot{\hat{x}} = (A + KC)\hat{x} - KCx + BH\hat{x} + Bv \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BH)x + BHe + Bv \\ \dot{e} = (A + KC)e \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BH & BH \\ 0 & A + KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v$$

Gli autovalori del sistema complessivo sono quelli di  $(A + BH)$ , posizionabili arbitrariamente se il sistema è completamente raggiungibile controllabile, più quelli di  $(A + KC)$ , posizionabili arbitrariamente se il sistema è completamente osservabile ricostruibile.

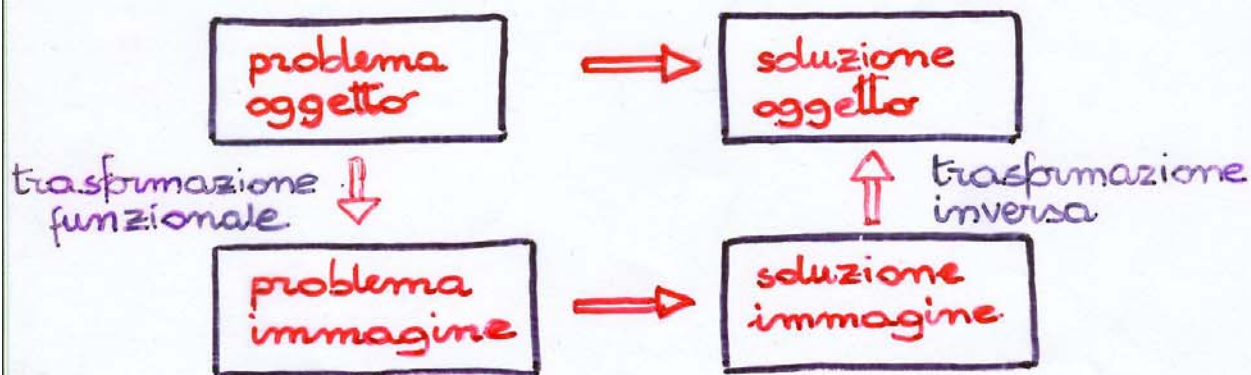
- Retroazione algebrica stato ingresso
- Retroazione algebrica uscita ingresso
- Osservatori dello stato
- Retroazione stato stimato ingresso mediante osservatore

Valgono gli stessi risultati per i sistemi discreti.



# Trasformazioni funzionali

- Stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra la funzione in esame (funzione oggetto) ed una funzione di natura diversa (funzione immagine)
- Operazioni eseguite sulla funzione oggetto corrispondono ad operazioni più semplici sulla funzione immagine.
- Al problema oggetto viene associato un problema immagine di più facile soluzione
- Dalla soluzione immagine si passa alla soluzione oggetto con l'operazione di antitrasformazione (trasformazione inversa)



Esempio: con la trasformata di Laplace, la soluzione di un'equazione differenziale diventa un problema algebrico.

# Trasformate di Laplace

Si consideri una funzione del tempo  $f(t)$  a valori reali o complessi.

Si definisce

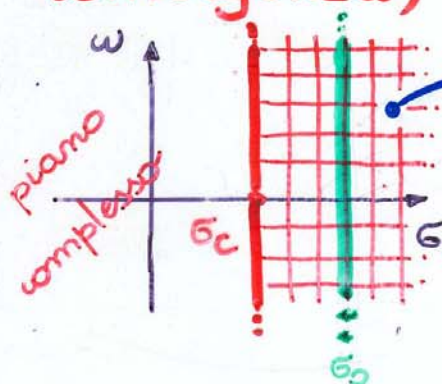
$$f(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

trasformata di Laplace di  $f(t)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} f(s) e^{st} ds$$

antitrasformata di Laplace di  $f(s)$

La trasformata  $f(s)$  è definita in un dominio del piano  $s$  (**dominio di convergenza**) del tipo:



dominio di convergenza }:

$$\begin{cases} s = \sigma + j\omega \\ \sigma > \sigma_c \end{cases}$$

$\sigma_c$  = asissa di convergenza

nel quale l'integrale  $\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$  esiste. L'antitrasformazione è fatta lungo una qualsiasi retta parallela all'asse  $\omega$  con  $\sigma_0 > \sigma_c$

## Condizioni sufficienti perché $f(t)$ ammetta trasformata:

1.  $f(t)$  nulla per  $t < 0$
2.  $f(t)$  limitata al finito
3.  $f(t)$  continua a tratti
4.  $f(t)$  di ordine esponenziale

La condizione 1 non è strettamente necessaria per la trasformabilità di  $f(t)$  (nella trasformazione i valori di  $f(t)$  per  $t < 0$  vengono ignorati) ma per la **biunivocità della trasformazione**, in quanto nell'antitrasformazione si ottiene comunque una funzione nulla per  $t < 0$ .

La trasformazione di Laplace è **lineare** cioè:

$$f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \quad c_1, c_2 \text{ costanti}$$

↓

$$F(s) = c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)$$

Inoltre

$$f(s^*) = f^*(s)$$

$$s = \sigma + j\omega, \\ s^* = \sigma - j\omega$$

Si usa scrivere

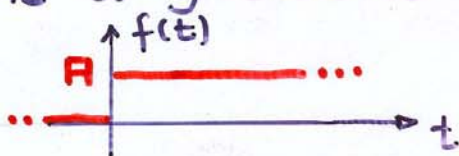
$$f(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}(f(t))$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} f(s) e^{st} ds = \mathcal{L}^{-1}(f(s))$$

## Esempi

- Si consideri la funzione a gradino

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ A & \text{per } t > 0 \end{cases}$$



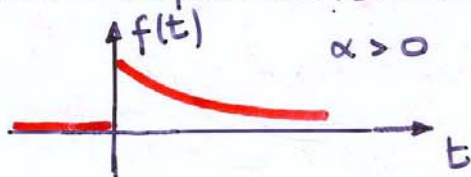
Risulta:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} A e^{-st} dt = \left[ \frac{A e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = \frac{A}{s}$$

per cui  $\sigma_c = 0$  (deve essere  $s \neq 0$ )

- Si consideri la funzione esponenziale

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ A e^{-\alpha t} & \text{per } t > 0 \end{cases}$$



Risulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t)) &= \int_0^{\infty} A e^{-\alpha t - st} dt = \left[ \frac{A e^{-(s+\alpha)t}}{-(s+\alpha)} \right]_0^{\infty} = \\ &= \frac{A}{s+\alpha} \quad \text{con } \sigma_c = -\alpha \end{aligned}$$

Si dimostra, applicando la definizione di trasformata, che:

$$L(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \sigma_c = \operatorname{Re}(a)$$

dove  $n$  è un intero positivo ed  $a$  una costante reale o complessa

- Viene sottointeso che la funzione considerata sia **nulla** per valori del tempo negativi.

Da tale relazione si possono ricavare le trasformate di Laplace dei segnali tipici che vengono impiegati come ingressi di prova nei sistemi dinamici:

gradino unitario

$$t^0$$

rampa unitaria

$$t^1$$

esponenziale

$$t^0 e^{at}$$

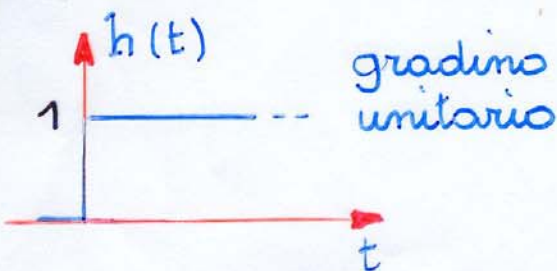
sinusoide

$$\sin \omega t = (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) / 2j$$

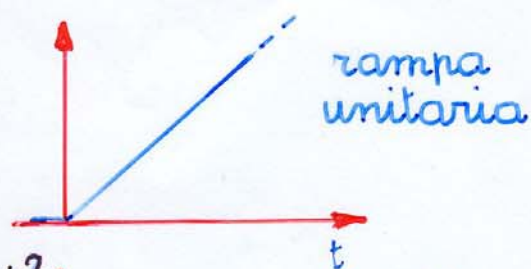
cosinusoide

$$\cos \omega t = (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) / 2$$

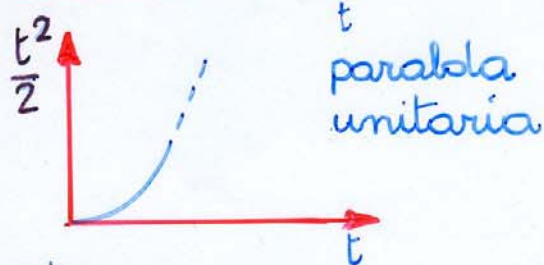
# Trasformate di Laplace di segnali tipici



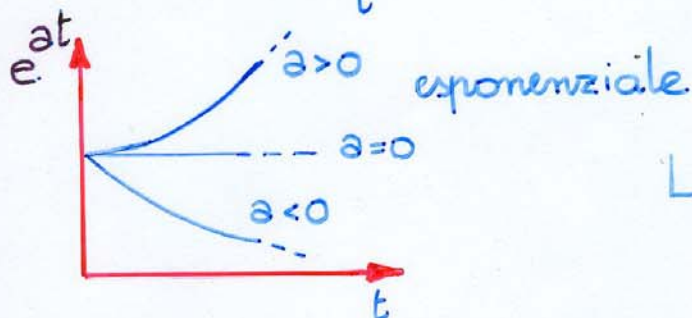
$$L(h(t)) = \frac{1}{s}$$



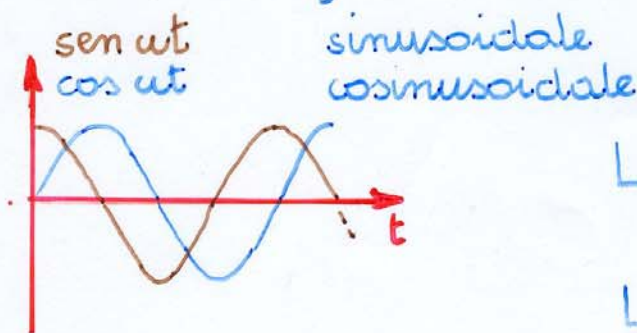
$$L(t) = \frac{1}{s^2}$$



$$L\left(\frac{t^2}{2}\right) = \frac{1}{s^3}$$



$$L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$$



$$L(\text{sen } \omega t) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$L(\text{cos } \omega t) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

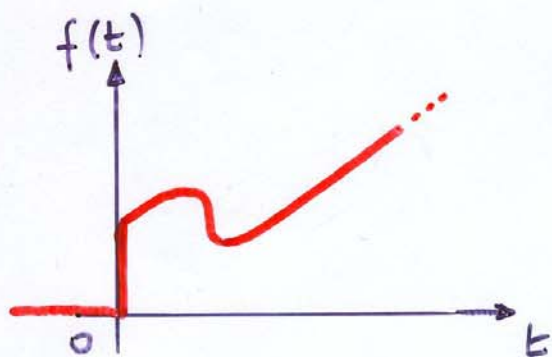
$$L(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

# Teoremi sulle trasformate

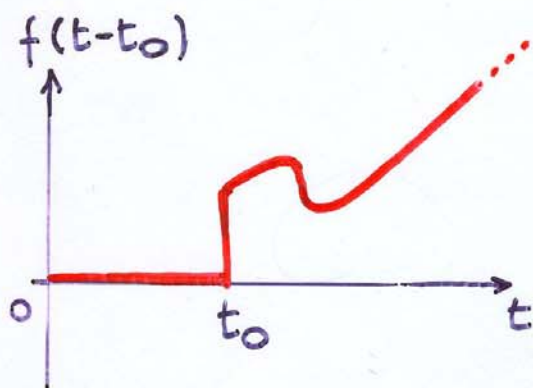
## Teorema della traslazione nel tempo

Sia  $f(s)$  la trasformata di Laplace di  $f(t)$ , nulla per  $t < 0$ . Risulta

$$L(f(t-t_0)) = f(s) e^{-t_0 s}, \quad t_0 \geq 0$$

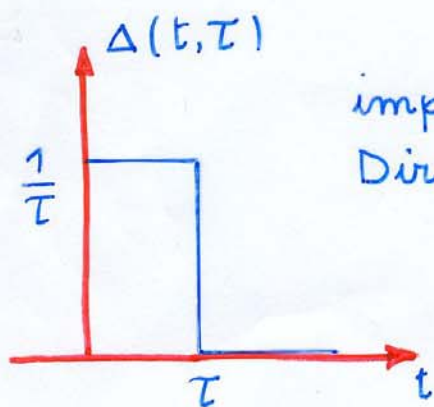


$f(s)$

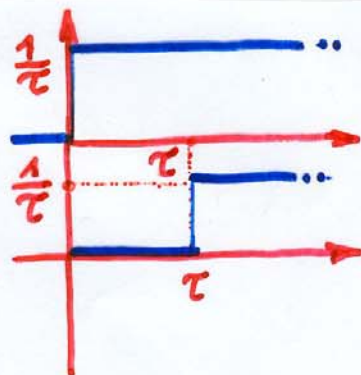


$f(s) e^{-t_0 s}$

- Con l'ausilio di tale teorema si può calcolare la trasformata di Laplace dell'impulso di Dirac.



impulso di  
Dirac ( $\tau \rightarrow 0$ )  
 $\delta(t)$



$$L(\Delta(t, \tau)) = \frac{1}{\tau s} - \frac{1}{\tau s} e^{-\tau s} = \frac{1 - e^{-\tau s}}{\tau s}$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\tau s}}{\tau s} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{s e^{-\tau s}}{s} = 1$$

regola dell'Hospital

Si noti che:

l'impulso di Dirac è "la derivata" del gradino unitario;

$$1 = s \cdot \frac{1}{s}$$

il gradino unitario è la derivata della rampa unitaria;

$$\frac{1}{s} = s \cdot \frac{1}{s^2}$$

la rampa unitaria è la derivata della parabola unitaria

$$\frac{1}{s^2} = s \cdot \frac{1}{s^3}$$



## Teorema della trasformata della derivata

Sia  $f(s)$  la trasformata di Laplace di  $f(t)$ . Risulta

$$L\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = sf(s) - f(0^+)$$

## Teorema della trasformata dell'integrale

Sia  $f(s)$  la trasformata di Laplace di  $f(t)$ . Risulta

$$L\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{1}{s} f(s)$$

## Teorema del valore finale

Sia  $f(s)$  la trasformata di  $f(t)$ . Se  $f(t)$  ed  $f'(t)$  hanno asissa di convergenza non positiva ed esiste  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  risulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s)$$

## Teorema del valore iniziale

Sia  $f(s)$  la trasformata di Laplace di  $f(t)$ . Se esiste il  $\lim_{s \rightarrow \infty} sf(s)$  risulta:

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s)$$

## Teorema della traslazione in $s$

Sia  $f(s)$  la trasformata di Laplace di  $f(t)$  ed  $a$  un qualunque numero complesso. Risulta:

$$L(f(t)e^{-at}) = f(s+a)$$

## Teorema della trasformata dell'integrale di convoluzione

Siano  $f_1(s)$  ed  $f_2(s)$  le trasformate di Laplace di  $f_1(t)$  ed  $f_2(t)$ , entrambe nulle per  $t < 0$ . Risulta:

$$\begin{aligned} & L\left(\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right) = \\ & = L\left(\int_0^t f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau\right) = \\ & = f_1(s) \cdot f_2(s) \end{aligned}$$

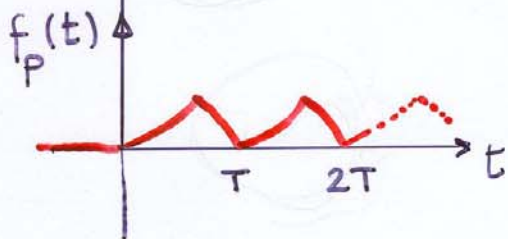
## Trasformata di una funzione periodica

Sia  $f_p(t)$  una funzione periodica con periodo  $T$  e nulla per  $t < 0$ . Sia  $f(t)$  la funzione corrispondente al primo periodo. Siano  $f_p(s) = L(f_p(t))$  e  $f(s) = L(f(t))$ . Risulta:

$$f_p(s) = \frac{f(s)}{1 - e^{-Ts}}$$

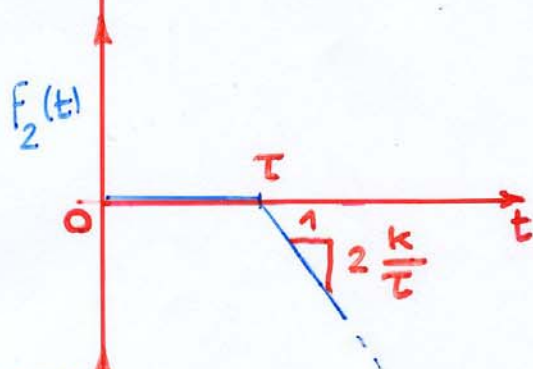
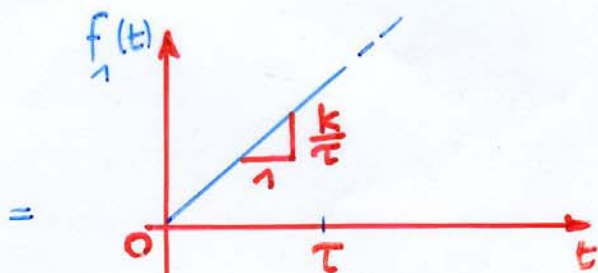
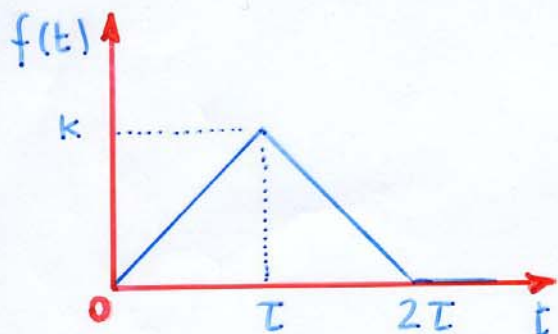


$$f(s)$$



$$\frac{f(s)}{1 - e^{-Ts}}$$

# Esempio di calcolo della trasformata di Laplace di un segnale



$$f(s) = \frac{k}{\tau} \frac{1}{s^2} - 2 \frac{k}{\tau} \frac{1}{s^2} e^{-\tau s} + \frac{k}{\tau} \frac{1}{s^2} e^{-2\tau s}$$

$$f(s) = \frac{k}{\tau s^2} (1 - 2e^{-\tau s} + e^{-2\tau s})$$

# Uso delle trasformate di Laplace nelle equazioni differenziali

si consideri il circuito:



$$\text{Dati: } i(0^+) = i_0$$

$$v_u(0^+) = e_0$$

$$v_i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V_0 & t > 0 \end{cases}$$

calcolare  $v_u(t)$ .

## Soluzione

$$v_i(t) = L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) + v_u(t),$$

$$i(t) = C \frac{dv_u(t)}{dt} \rightarrow \frac{di(t)}{dt} = C \frac{d^2 v_u(t)}{dt^2}$$

$$v_i(t) = LC \frac{d^2 v_u(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_u(t)}{dt} + v_u(t)$$

trasformando:

$$L \left( \frac{dv_u(t)}{dt} \right) = s v_u(s) - e_0$$

$$\begin{aligned} L \left( \frac{d^2 v_u(t)}{dt^2} \right) &= s L \left( \frac{dv_u(t)}{dt} \right) - \frac{dv_u(t)}{dt} \Big|_{t=0^+} = \\ &= s^2 v_u(s) - s e_0 - \frac{1}{C} i_0 \end{aligned}$$

cioè:

$$\begin{aligned} v_i(s) &= LC (s^2 v_u(s) - s e_0 - \frac{1}{C} i_0) \\ &+ RC (s v_u(s) - e_0) + v_u(s) \end{aligned}$$

o anche:

$$v_u(s) = \underbrace{\frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}}_{\text{effetto dell'ingresso}} v_i(s) + \underbrace{\frac{Li_0 + LCse_0 + RCe_0}{LCs^2 + RCs + 1}}_{\text{effetto delle condizioni iniziali}}$$

con  $v_i(s) = \frac{V_0}{s}$

L'antitrasformazione di tale espressione, cioè il passaggio da  $v_u(s)$  a  $v_u(t)$  non presenta alcuna difficoltà, essendo  $v_u(s)$  razionale, come si vedrà nel seguito.

A titolo d'esempio, supposto:

$$\begin{pmatrix} e_0 = 0 \\ i_0 = 0 \\ V_0 = 10 \text{ Volts} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} L = 20 \cdot 10^{-3} \text{ H} \\ C = 5 \cdot 10^{-6} \text{ F} \\ R = 220 \Omega \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_u(s) &= \frac{1}{10^{-7}s^2 + 11 \cdot 10^{-4}s + 1} \cdot \frac{10}{s} = \\ &= \frac{10^8}{s^2 + 11 \cdot 10^3 s + 10^7} \cdot \frac{1}{s} = \frac{10^8}{(s + 10^3)(s + 10^4)} \cdot \frac{1}{s} \\ &= 10^8 \left( \frac{0.11 \cdot 10^{-6}}{s + 10^3} + \frac{-0.11 \cdot 10^{-7}}{s + 10^4} + \frac{10^{-7}}{s} \right) \end{aligned}$$

da cui:

$$v_u(t) = 10^8 \left( 0.11 \cdot 10^{-6} e^{-10^3 t} - 0.11 \cdot 10^{-7} e^{-10^4 t} + 10^{-7} \right) \quad t > 0$$

## Trasformata di Laplace di $e^{At}$ ( $n \times n$ )

L'esponenziale di matrice  $e^{At}$  è la soluzione dell'equazione differenziale matriciale:

$$\dot{X}(t) = AX(t) \quad X(0) = I$$

Trasformando secondo Laplace:

$$sX(s) - I = AX(s)$$

$$(sI - A)X(s) = I$$

$$X(s) = L[e^{At}]$$

$$L[e^{At}] = (sI - A)^{-1} = \frac{\text{agg}(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

Ogni termine di  $(sI - A)^{-1}$  è il rapporto di due polinomi: quello a denominatore è il polinomio caratteristico di  $A$  (di grado  $n$ ) quello a numeratore ha grado al massimo eguale ad  $(n-1)$ .

Se il polinomio caratteristico di  $A$  è diverso dal polinomio minimo, in ogni termine di  $(sI - A)^{-1}$  ci sono radici comuni tra il numeratore e il denominatore: eseguite tali semplificazioni il m.c.m. dei denominatori dei termini di  $(sI - A)^{-1}$  è il polinomio minimo di  $A$ .

# Modelli ingresso - uscita

Si consideri il modello ingresso-stato-uscita di un sistema dinamico:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \quad x(0) = x_0$$

Si trasformi secondo Laplace:

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + Bu(s) \quad X(s) = L[x(t)]$$

$$Y(s) = CX(s) + Du(s) \quad u(s) = L[u(t)]$$

$$\text{Dalla prima equazione:} \quad Y(s) = L[y(t)]$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}Bu(s)$$

che sostituita nella seconda fornisce:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + [C(sI - A)^{-1}B + D]u(s)$$

che è la trasformata di Laplace dell'equazione

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  è chiamata matrice di trasferimento del sistema e ne caratterizza il comportamento ingresso-uscita a partire dallo stato  $x_0 = 0$

$$Y(s) = G(s)u(s)$$



In realtà la matrice di trasferimento, che è un modello ingresso uscita, rappresenta solo la parte raggiungibile controllabile - osservabile ricostruibile del sistema, cioè:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \hat{C}_{oc_1} (sI - \hat{A}_{oc_1})^{-1} \hat{B}_{oc_1} + D$$

Ogni termine di  $G(s)$  è il rapporto di due polinomi.

Quello a denominatore è il polinomio minimo di  $\hat{A}_{oc_1}$  di grado  $\leq n_{oc}$ . Le sue radici sono chiamate **i poli del sistema** e coincidono con gli autovalori della matrice  $\hat{A}_{oc_1}$ .

Quelli a numeratore hanno grado minore di  $n_{oc}$  se  $D=0$  (sistemi puramente dinamici). Se  $D \neq 0$  hanno, al massimo, grado pari ad  $n_{oc}$ .

Per sistemi con 1 ingresso ed 1 uscita (s.i.s.o. = single input - single output) la matrice di trasferimento si riduce ad uno scalare, chiamato **funzione di trasferimento**

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

## Trasformata di Laplace della risposta impulsiva

Per un sistema puramente dinamico ( $D=0$ )

$$W(t) = C e^{At} B$$

$$L[W(t)] = C L[e^{At}] B = C (sI - A)^{-1} B$$

La trasformata di Laplace di  $W(t)$  è la matrice di trasferimento del sistema

Anche la risposta impulsiva modella solo la parte raggiungibile controllabile - osservabile ricostruibile del sistema, cioè:

$$W(t) = \hat{C}_{oc_1} e^{\hat{A}_{oc_1} t} \hat{B}_{oc_1}$$

Se il modello del sistema dinamico è del tipo:

$$y^{(m)}(t) + a_{n-1}^{(m-1)} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1^{(1)} y'(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

$u(t)$  = ingresso (scalare)

$y(t)$  = uscita (scalare)

La funzione di trasferimento può essere ottenuta direttamente (cioè senza costruire un modello equivalente ingresso-stato-uscita) trascurando l'equazione secondo Laplace (con condizioni iniziali nulle):

$$(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = b_0 U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Se invece:

$$y^{(m)}(t) + a_{n-1}^{(m-1)} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1^{(1)} y'(t) + a_0 y(t) = b_m^{(m)} u^{(m)}(t) + b_{m-1}^{(m-1)} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1^{(1)} u'(t) + b_0 u(t)$$

risulta:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$m \leq n$  perché il sistema non sia anticipativo

## Realizzazione di una funzione di trasferimento

Realizzare una  $\bar{G}(s)$  significa trovare un modello nello spazio degli stati  $(A, B, C, D)$  di ordine  $n$  (minimo) tale che

$$C(sI - A)^{-1}B + D = \bar{G}(s)$$

Si considerino sistemi ad 1 ingresso ed 1 uscita aventi a denominatore di  $\bar{G}(s)$  un polinomio di grado 3 (solo per semplicità di rappresentazione)

$$\begin{aligned}\bar{G}(s) &= \frac{c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \\ &= D + \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad D = c_3\end{aligned}$$

Si deve ora ricavare  $A, B, C$  da:

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

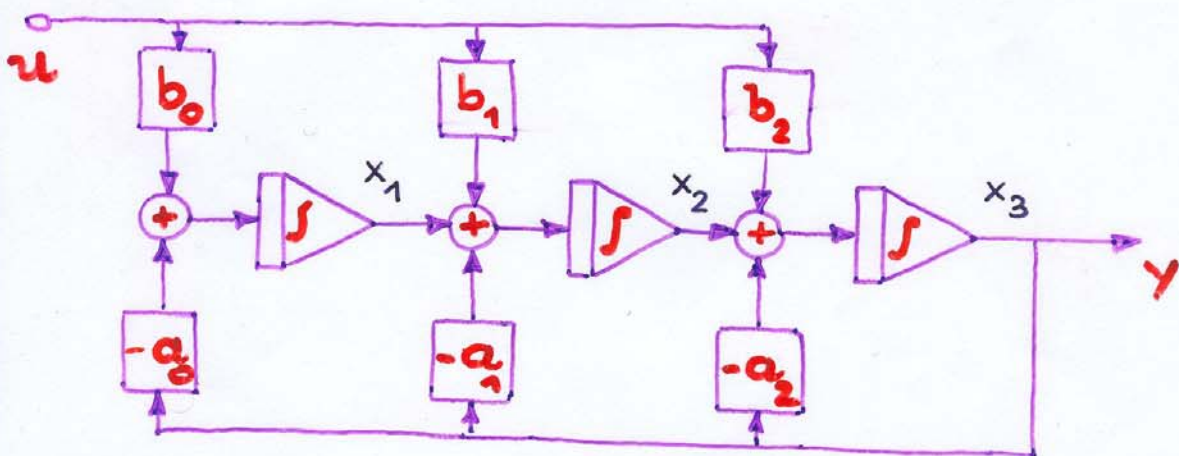
1º metodo

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

$$s^3 y(s) = (b_2 s^2 + b_1 s + b_0) u(s) - (a_2 s^2 + a_1 s + a_0) y(s)$$

$$y(s) = \frac{b_2 u(s) - a_2 y(s)}{s} + \frac{b_1 u(s) - a_1 y(s)}{s^2} + \frac{b_0 u(s) - a_0 y(s)}{s^3}$$

coe:



$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -a_0 x_3(t) + b_0 u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - a_1 x_3(t) + b_1 u(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) - a_2 x_3(t) + b_2 u(t) \end{cases}$$

$$y(t) = x_3(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema  $(A, B, C)$  è completamente osservabile ricostruibile. Infatti:

$$Q^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 1 & -a_2 - a_1 + a_2^2 \end{bmatrix}, \quad \det Q^T = -1$$

Il sistema è completamente raggiungibile controllabile se e solo se non ci sono fattori comuni tra numeratore e denominatore di  $G(s)$  (cancellazione zero-polo)

2º metodo

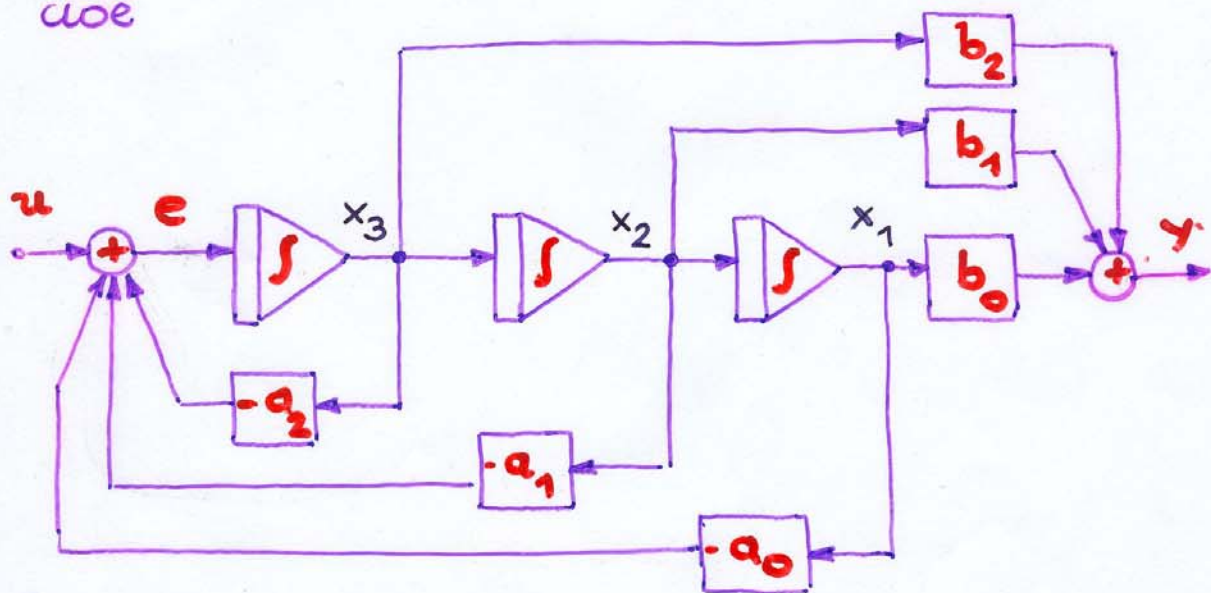
$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$G(s) = \frac{b_2 s^{-1} + b_1 s^{-2} + b_0 s^{-3}}{1 + a_2 s^{-1} + a_1 s^{-2} + a_0 s^{-3}} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

$$Y(s) = (b_2 s^{-1} + b_1 s^{-2} + b_0 s^{-3}) \frac{u(s)}{1 + a_2 s^{-1} + a_1 s^{-2} + a_0 s^{-3}}$$

$$E(s) = u(s) - (a_2 s^{-1} + a_1 s^{-2} + a_0 s^{-3}) e(s)$$

coe



$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - a_2 x_3(t) + u(t) \\ y(t) = b_0 x_1(t) + b_1 x_2(t) + b_2 x_3(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [b_0 \ b_1 \ b_2]$$

Il sistema  $(A, B, C)$  è completamente raggiungibile controllabile. Infatti:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 1 & -a_2 & -a_1 + a_2^2 \end{bmatrix} ; \det P = -1$$

Il sistema è completamente osservabile ricostruibile se e solo se non ci sono fattori comuni tra numeratore e denominatore di  $G(s)$  (cancellazione zero-polo)

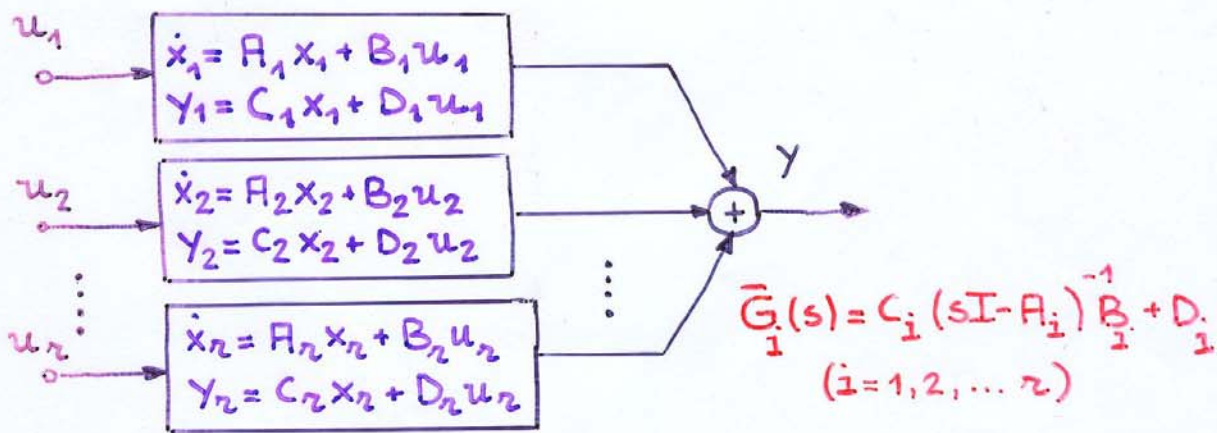


# Realizzazione per sistemi MISO (Multi Input Single Output)

$$\bar{G}(s) = [\bar{G}_1(s) \bar{G}_2(s) \dots \bar{G}_r(s)] \quad (1 \times r)$$

$$Y(s) = \bar{G}_1(s)u_1(s) + \bar{G}_2(s)u_2(s) + \dots + \bar{G}_r(s)u_r(s)$$

$$\bar{G}_i(s) = \frac{c_i(s)}{a_i(s)} \quad (i=1,2,\dots,r) \quad \left. \begin{array}{l} c_i(s) \\ a_i(s) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{privi di} \\ \text{radici comuni} \\ \text{ni} \end{array}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

$$Y = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_r] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} + [D_1 \ D_2 \ \dots \ D_r] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

A tale sistema (completamente raggiungibile controllabile) va applicato l'algoritmo per la riduzione alla forma minima (parte osservabile ricostruibile).

# Realizzazione per sistemi SIMO (Single Input Multi Output.)

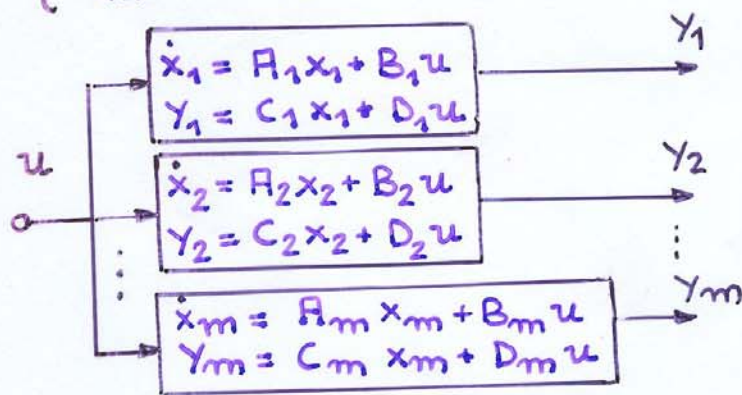
$$\bar{G}(s) = \begin{bmatrix} \bar{G}_1(s) \\ \bar{G}_2(s) \\ \vdots \\ \bar{G}_m(s) \end{bmatrix}$$

$(m \times 1)$

$$\bar{G}_i(s) = \frac{c_i(s)}{a_i(s)} \quad i=1,2,\dots,m$$

$\left. \begin{matrix} c_i(s) \\ a_i(s) \end{matrix} \right\}$  privi di radici comuni

$$\begin{cases} Y_1(s) = \bar{G}_1(s) u(s) \\ Y_2(s) = \bar{G}_2(s) u(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) = \bar{G}_m(s) u(s) \end{cases}$$



$$\bar{G}_i(s) = C_i (sI - A_i)^{-1} B_i + D_i$$

$(i=1,2,\dots,m)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & C_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_m \end{bmatrix} u$$

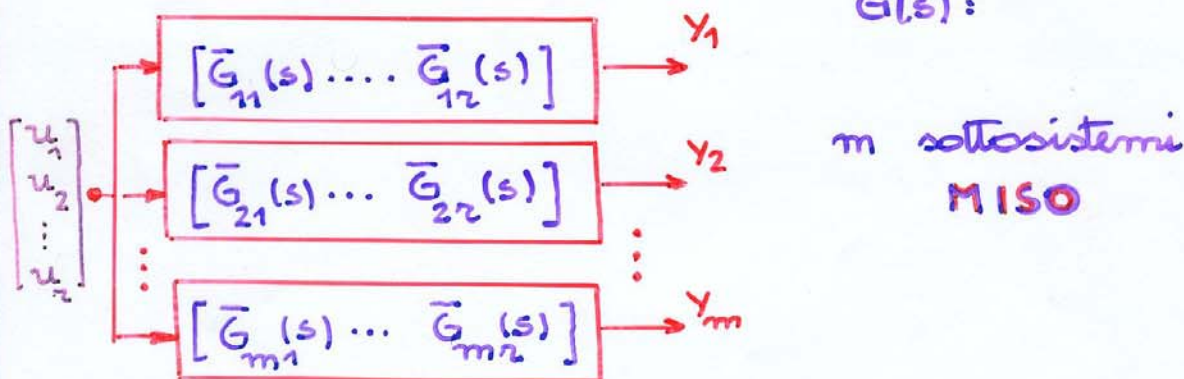
Q tale sistema (completamente osservabile ricostruibile) va applicato l'algoritmo per la riduzione alla parte raggiungibile controllabile

# Realizzazione per sistemi MIMO (MultiInput MultiOutput)

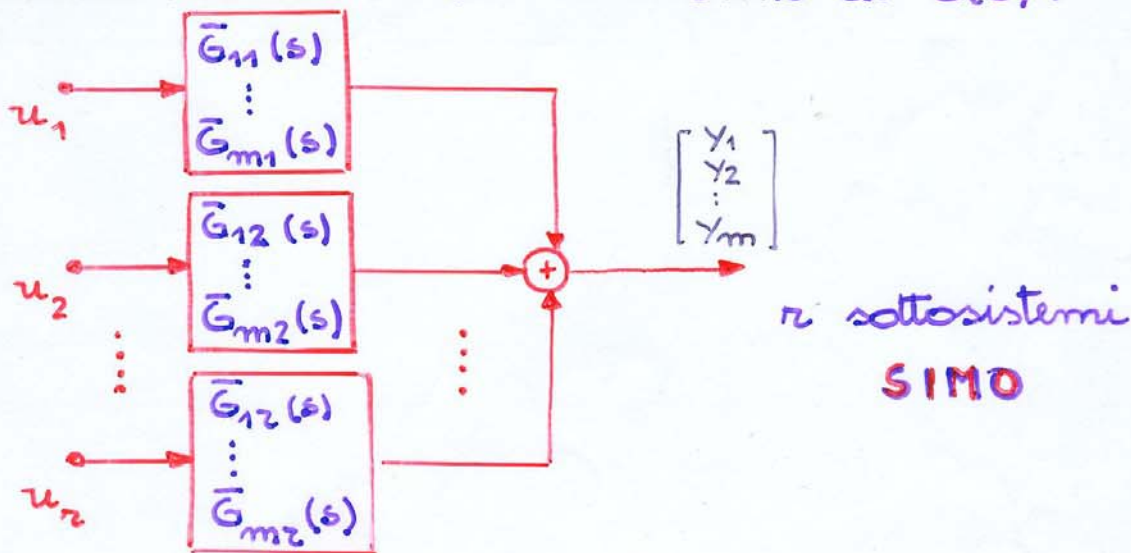
$$\bar{G}(s) = \begin{bmatrix} \bar{G}_{11}(s) & \dots & \bar{G}_{1r}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{G}_{m1}(s) & \dots & \bar{G}_{m2}(s) \end{bmatrix}$$

$(m \times r)$

La realizzazione può essere ricondotta agli schemi precedenti, considerando le righe di  $G(s)$ :

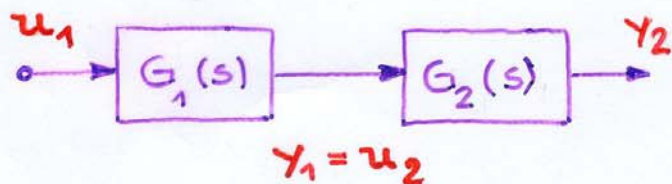


Considerando invece le colonne di  $G(s)$ :



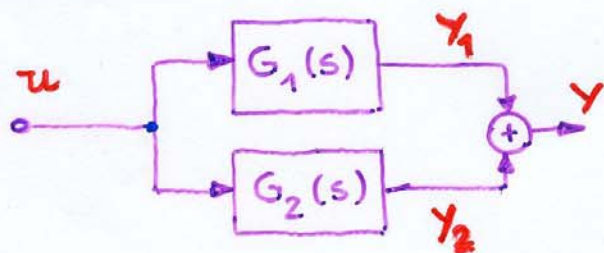
# Funzioni di trasferimento di sistemi interconnessi

## Serie (cascata)



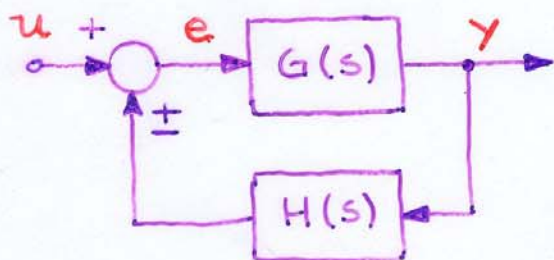
$$Y_2(s) = \underbrace{G_2(s)G_1(s)}_{G(s)} u_1(s)$$

## Parallelo



$$Y(s) = \underbrace{[G_1(s) + G_2(s)]}_{G(s)} u(s)$$

## Retroazione



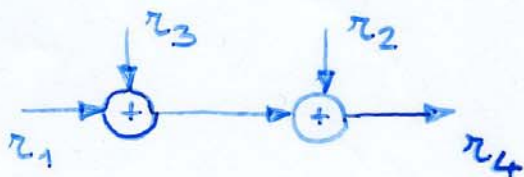
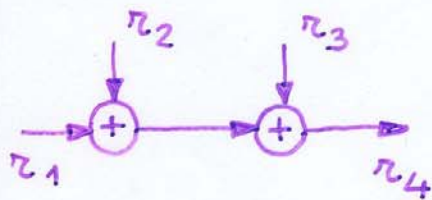
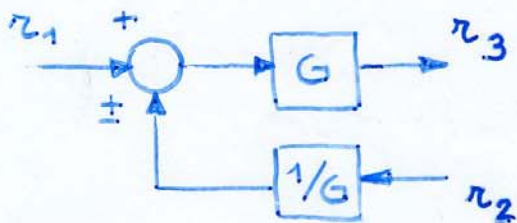
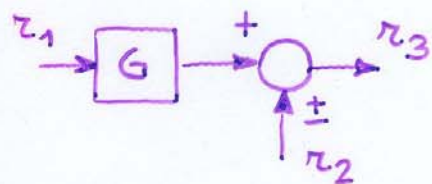
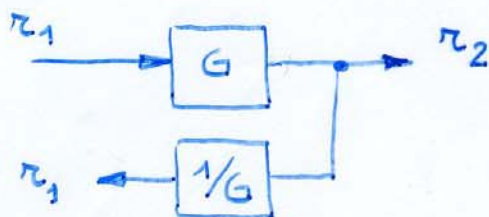
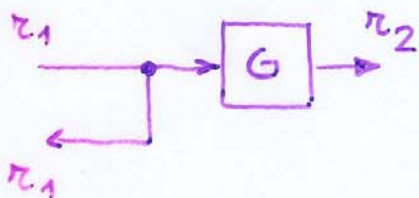
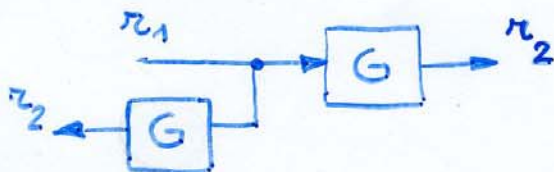
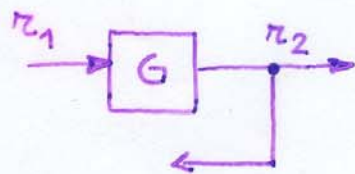
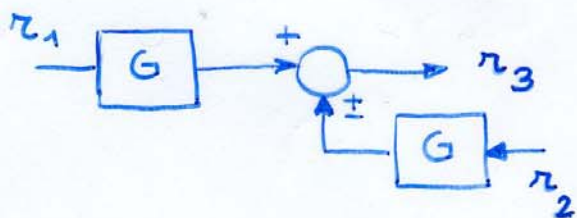
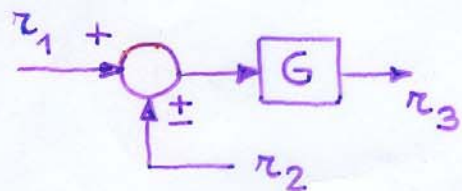
$$Y(s) = G(s) e(s)$$

$$e(s) = u(s) \pm H(s) y(s)$$

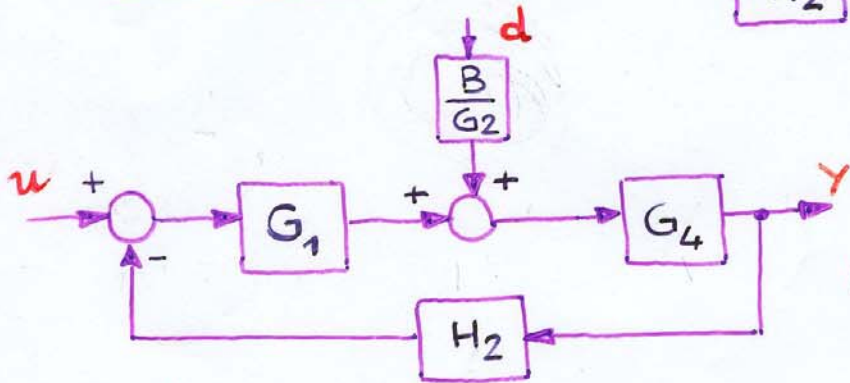
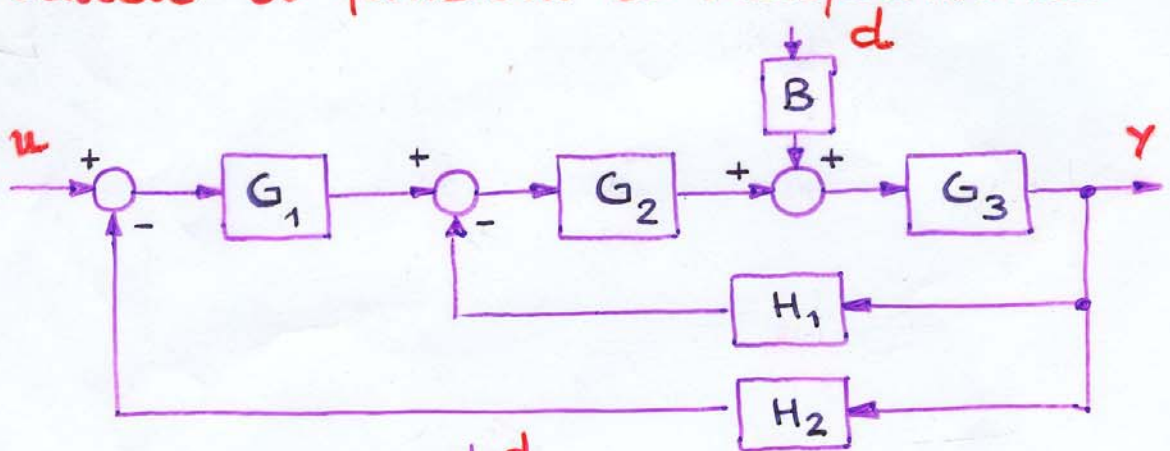
$$Y(s) = G(s) u(s) \pm G(s) H(s) y(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\left( \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)} \right)}_{G_2(s)} u(s)$$

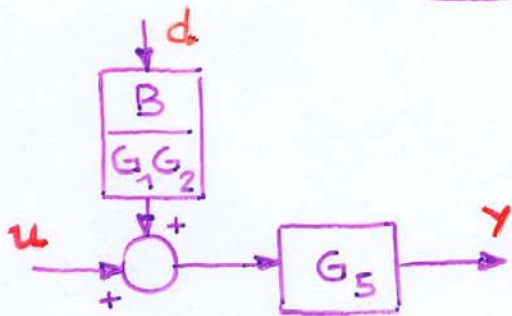
# Regole per la riduzione degli schemi a blocchi



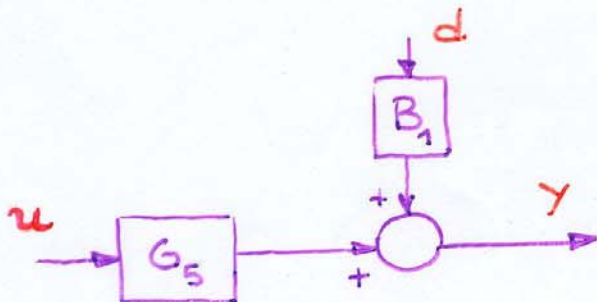
# Calcolo di funzioni di trasferimento



$$G_4 = \frac{G_2 G_3}{1 + G_2 G_3 H_1}$$



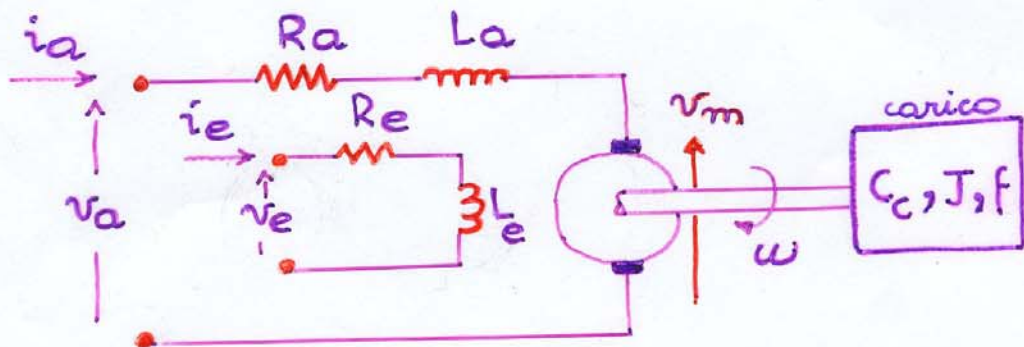
$$G_5 = \frac{G_1 G_4}{1 + G_1 G_4 H_2}$$



$$B_1 = \frac{B G_5}{G_1 G_2}$$

$$y = G_5 u + B_1 d$$

# Motore in corrente continua



$$v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + \underbrace{K i_e(t) \omega(t)}_{v_m(t)}$$

$$v_e(t) = R_e i_e(t) + L_e \frac{di_e(t)}{dt}$$

$$\underbrace{K i_e(t) i_a(t)}_{C_m(t)} = J \frac{d\omega(t)}{dt} + f\omega(t) + C_c(t)$$

Controllo d'armatura :  $i_e(t) = \text{costante}$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_m}{L_a} \\ \frac{K_m}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} v_a(t) \\ C_c(t) \end{bmatrix}$$

$$K_m = K_{ie}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} v_a(t) \\ C_c(t) \end{bmatrix}$$

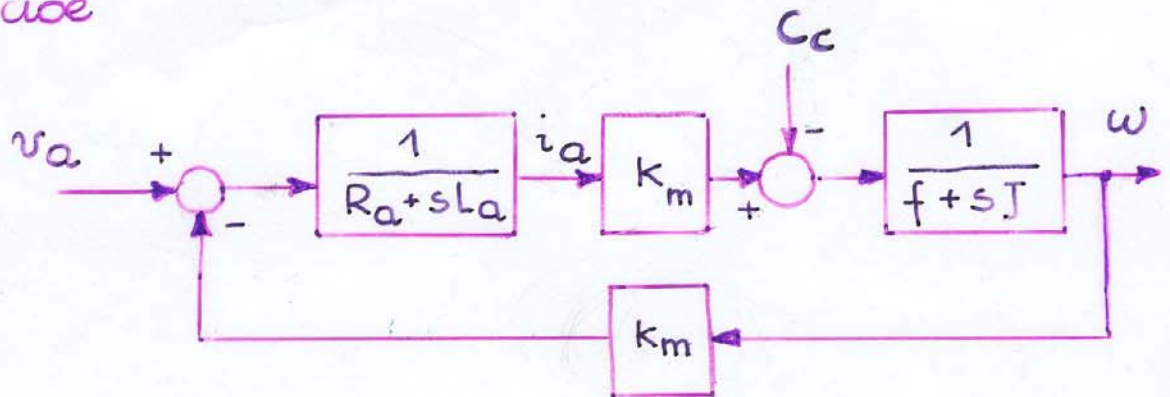
$$y(t) = \omega(t), \quad C = [0 \ 1]$$

Con le trasformate di Laplace:

$$v_a(s) - k_m \omega(s) = (R_a + sL_a) i_a(s)$$

$$k_m i_a(s) - C_c(s) = (f + sJ) \omega(s)$$

cioè



$$\omega(s) = G_1(s) v_a(s) + G_2(s) C_c(s)$$

$$G_1(s) = \frac{k_m}{(R_a + sL_a)(f + sJ) + k_m^2}$$

$$G_2(s) = \frac{-(R_a + sL_a)}{(R_a + sL_a)(f + sJ) + k_m^2}$$



Controllo d'eccitazione o di campo:

$$i_a = \text{costante}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_e(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_e}{L_e} & 0 \\ \frac{k_p}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_e} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_e(t) \\ C_c(t) \end{bmatrix}$$

$$k_p = k_{i_a}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_A$$

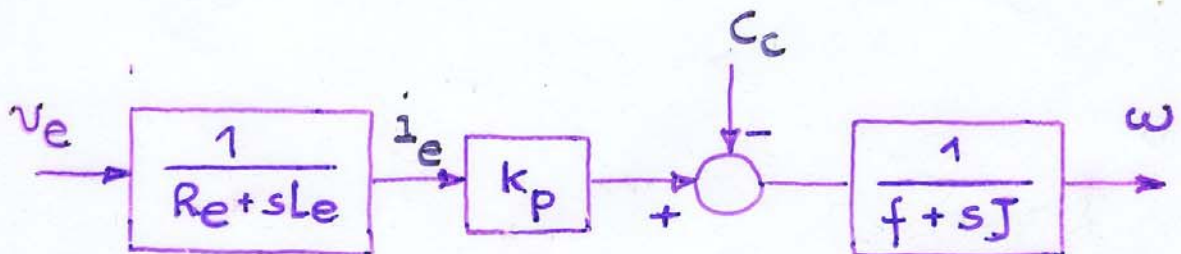
$$\underbrace{\hspace{10em}}_B$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_e(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} v_e(t) \\ C_c(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \omega(t), c = [0 \ 1]$$

Con le trasformate di Laplace:

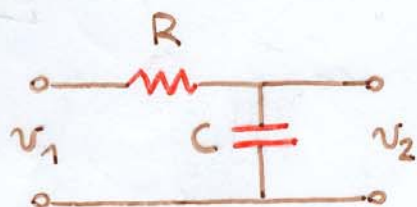


$$\omega(s) = G_1(s) v_e(s) + G_2(s) C_c(s)$$

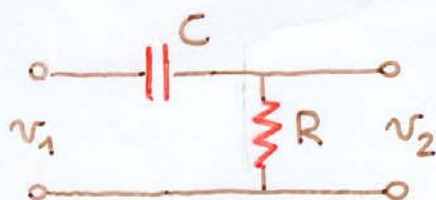
$$G_1(s) = \frac{k_p}{(R_e + sL_e)(f + sJ)}$$

$$G_2(s) = \frac{-1}{f + sJ}$$

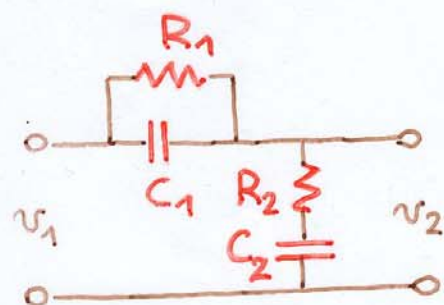
# Funzioni di trasferimento di circuiti elettrici



$$\frac{v_2(s)}{v_1(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$



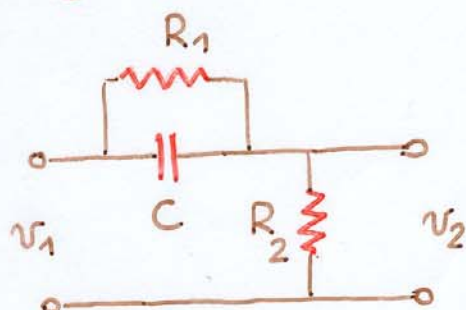
$$\frac{v_2(s)}{v_1(s)} = \frac{RCs}{RCs + 1}$$



$$\begin{aligned} \frac{v_2(s)}{v_1(s)} &= \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12})s + 1} \\ &= \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \tau_a s)(1 + \tau_b s)} \end{aligned}$$

$$\tau_1 = R_1 C_1 \quad \tau_2 = R_2 C_2$$

$$\tau_{12} = R_1 C_2 \quad \tau_1 \tau_2 = \tau_a \tau_b \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_{12} = \tau_a + \tau_b$$



$$\frac{v_2(s)}{v_1(s)} = \frac{s + \frac{1}{R_1 C}}{s + (R_1 + R_2)/R_1 R_2 C}$$

# Antitrasformazione di funzioni razionali

$$f(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (m < n)$$

Se le radici di  $a(s)$  (poli di  $f(s)$ ) sono tutte distinte:

$$f(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{(s-p_i)}$$

dove  $k_i = \left[ (s-p_i) \frac{b(s)}{a(s)} \right]_{s=p_i}$  è chiamato residuo di  $f(s)$  nel polo  $p_i$ .

L'antitrasformata risulta:

$$\rightarrow f(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{p_i t}$$

Se le radici di  $a(s)$  non sono distinte:

$$f(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{(s-p_1)^{n_1} (s-p_2)^{n_2} \dots (s-p_h)^{n_h}} = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^{n_i} \frac{k_{ij}}{(s-p_i)^{n_i-j+1}} \quad \left( \sum_{i=1}^h n_i = n \right)$$

$$k_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left[ (s-p_i)^{n_i} \frac{b(s)}{a(s)} \right] \right\}_{s=p_i} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, h \\ j = 1, 2, \dots, n_i \end{matrix}$$

$$\rightarrow f(t) = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^{n_i} \frac{k_{ij} t^{n_i-j} e^{p_i t}}{(n_i-j)!}$$

L'antitrasformata di una funzione razionale è una combinazione lineare dei modi:  $e^{p_1 t}$ ,  $t e^{p_1 t}$ ,  $t^2 e^{p_1 t}$ , ...,  $t^{n_1-1} e^{p_1 t}$ ,  
 ...,  $e^{p_h t}$ ,  $t e^{p_h t}$ , ...,  $t^{n_h-1} e^{p_h t}$

Si noti che per 2 poli complessi coniugati i residui sono complessi coniugati:

$$\frac{k_1}{s-p_1} + \frac{\bar{k}_1}{s-\bar{p}_1} = \frac{u_1 + jv_1}{s-\sigma_1 - j\omega_1} + \frac{u_1 - jv_1}{s-\sigma_1 + j\omega_1}$$

posto  $\frac{M_1}{2} = \sqrt{u_1^2 + v_1^2}$ ,  $\phi = \arctg \frac{v_1}{u_1}$

$$\frac{k_1}{s-p_1} + \frac{\bar{k}_1}{s-\bar{p}_1} = \frac{M_1}{2} \left[ \frac{e^{j\phi}}{s-\sigma_1 - j\omega_1} + \frac{e^{-j\phi}}{s-\sigma_1 + j\omega_1} \right]$$

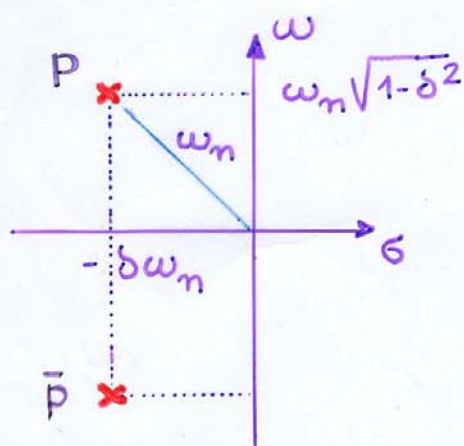
antitrasformando:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{k_1}{p_1} + \frac{\bar{k}_1}{\bar{p}_1} \right) &= \frac{M_1}{2} \left[ e^{\sigma_1 t + j(\omega_1 t + \phi)} + e^{\sigma_1 t - j(\omega_1 t + \phi)} \right] = \\ &= M_1 e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t + \phi) = \\ &= M_1 e^{\sigma_1 t} \sin \left( \omega_1 t + \phi + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

L'antitrasformata di una funzione razionale  
le fratta ( $m < n$ ) **tende a zero** per  $t \rightarrow \infty$   
quando tutti i poli hanno parte negativa,  
**rimane limitata** quando non ha alcun  
polo a parte reale positiva e quelli a  
parte reale nulla sono semplici.

L'antitrasformata **tende all' $\infty$**  per  $t \rightarrow \infty$   
quando i poli sono a parte reale positiva  
o sono a parte reale nulla e moltepli-  
cità maggiore di uno.

$$\text{Se } f(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{k}{s-p} + \frac{\bar{k}}{s-\bar{p}} \quad (0 \leq \delta < 1)$$



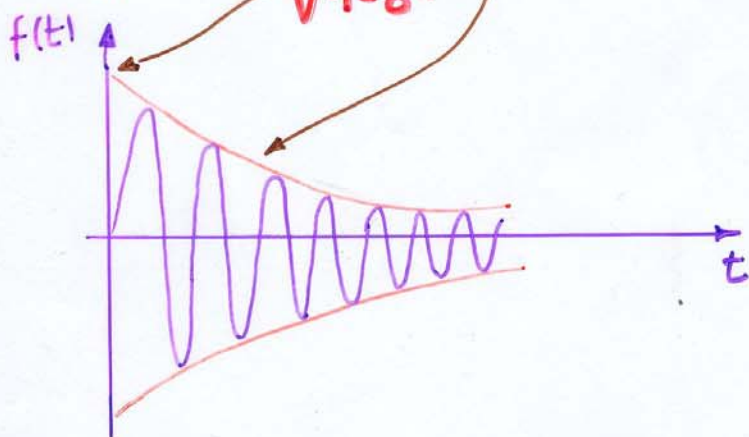
$\omega_n$  = pulsazione naturale

$\delta$  = coefficiente di smorzamento

$$k = \frac{-j\omega_n}{2\sqrt{1-\delta^2}}$$

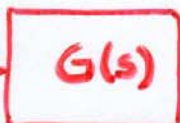
In tal caso risulta:

$$f(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\delta^2} t$$



## Risposte canoniche di un sistema

Si consideri il sistema:

$u(s)$    $y(s)$

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

$(m < n)$

Si applichino in ingresso segnali tipici:

impulso di Dirac  $u(s) = 1$

gradino unitario  $u(s) = \frac{1}{s}$

rampa unitaria  $u(s) = \frac{1}{s^2}$

Le risposte che si ottengono si chiamano **risposte canoniche** e caratterizzano completamente il comportamento dinamico del sistema:

$$Y(s) = G(s) u(s)$$

antitrasformando:

$$y(t) = \int_0^t w(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

$$w(t) = L^{-1}(G(s)) = \text{risposta impulsiva}$$

La risposta impulsiva è l'antitrasformata della funzione di trasferimento (per sistemi puramente dinamici  $(m < n)$ )

Si noti che :

la risposta al gradino unitario  $\left(\frac{G(s)}{s}\right)$  è  
la derivata della risposta alla rampa  
unitaria  $\left(\frac{G(s)}{s^2}\right)$ ;

la risposta impulsiva  $(G(s))$  è la deriva  
ta della risposta al gradino unitario  
 $\left(\frac{G(s)}{s}\right)$ .

La risposta al gradino unitario è chiu  
mata **risposta indiciale del sistema**



## Sistemi del primo ordine

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau s} = \frac{1/\tau}{s+1/\tau}$$

La risposta al gradino unitario vale

$$Y(s) = \frac{1}{s(1+\tau s)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/\tau}$$

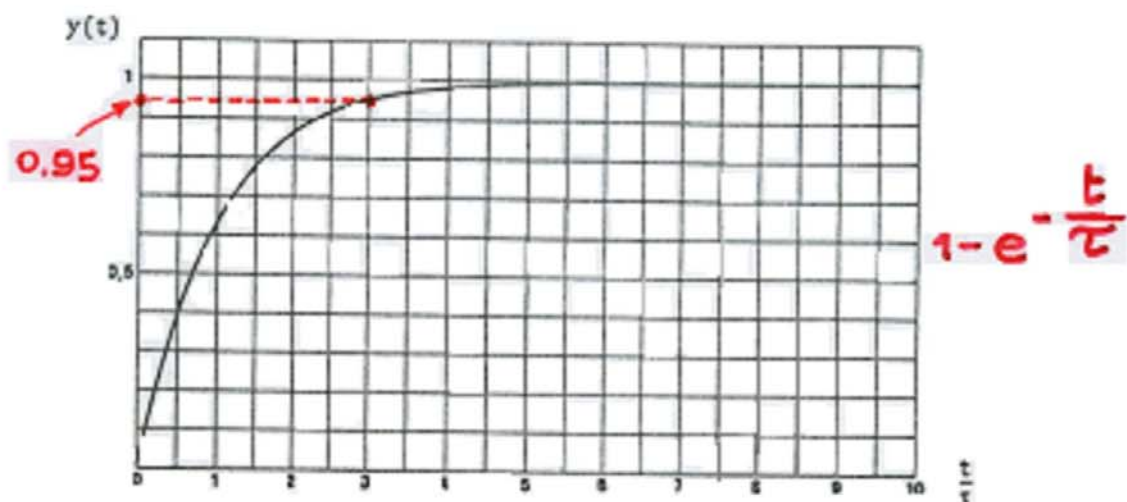
$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Si definisce tempo di assestamento il minimo valore del tempo  $T_a$  tale che:

$$|y(t) - Y_\infty| \leq \frac{5}{100} Y_\infty, \quad t \geq T_a$$

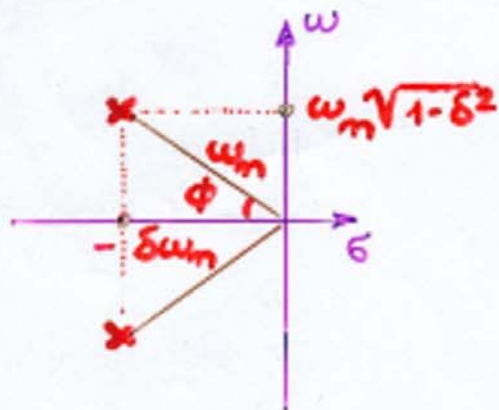
$$\text{con } Y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$$

Per sistemi del primo ordine risulta  $T_a = 3\tau$



## Sistemi del secondo ordine

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\delta\frac{s}{\omega_n} + 1}$$



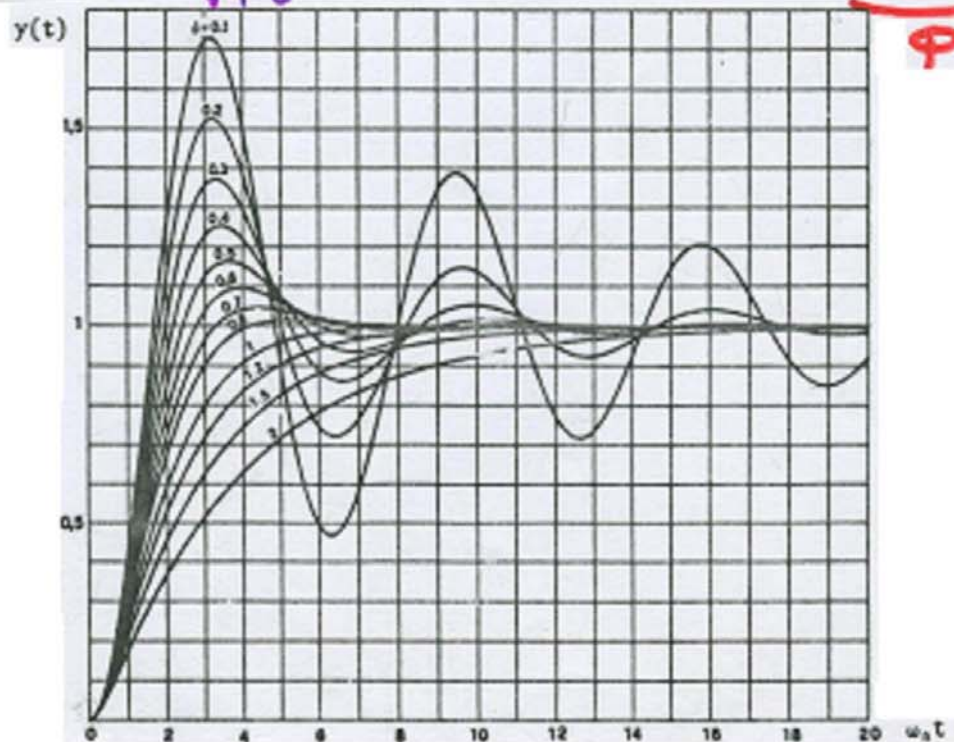
$$0 \leq \delta < 1$$

$\omega_n$  = pulsazione naturale

$\delta$  = coeff. di smorzamento

La risposta al gradino unitario vale:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \operatorname{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2} t + \arctg\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}\right)$$



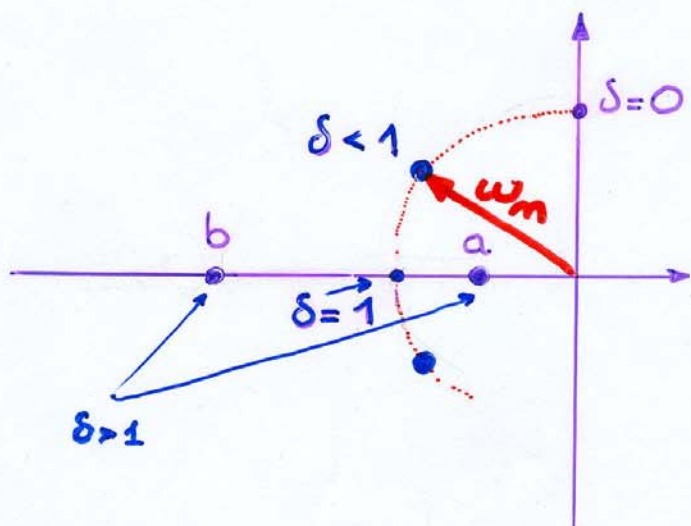
Per  $\delta = 1$  i pdi sono reali e coincidenti  
 $-\omega_n$  (doppio) e risulta:

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}$$

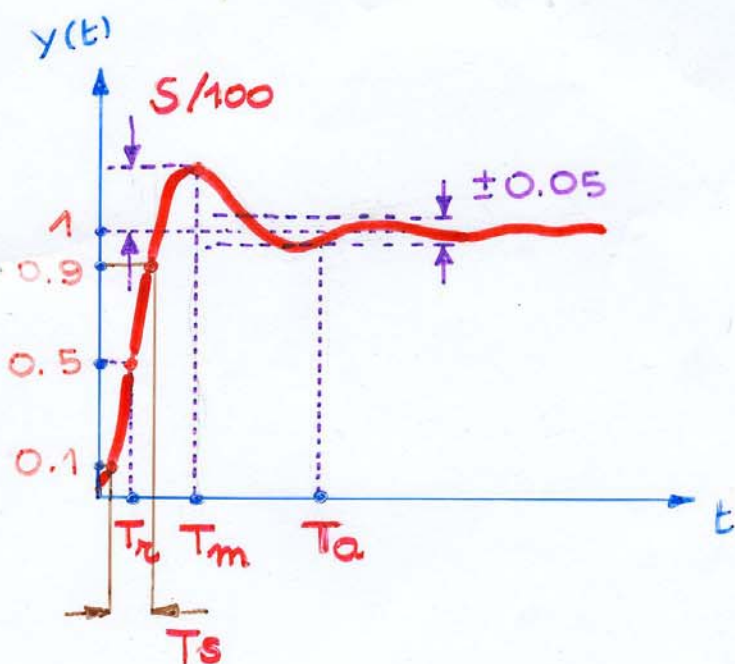
Per  $\delta > 1$  i pdi sono reali e distinti e  
risulta:

$$y(t) = 1 + k_1 e^{at} + k_2 e^{bt} \quad \text{con:}$$

$$\begin{cases} a = -\delta\omega_n + \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1} \\ b = -\delta\omega_n - \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1} \end{cases}, \quad \begin{cases} k_1 = \frac{b}{a-b} \\ k_2 = \frac{-a}{a-b} \end{cases}$$



Si possono definire i seguenti parametri:



$T_r$  = tempo di ritardo: il valore di  $t$  per il quale la risposta assume valore metà del valore finale  $y(\infty)$

$T_s$  = tempo di solita: l'intervallo di tempo intercorrente tra l'istante in cui la risposta è il 10% del valore finale e l'istante in cui è il 90% del valore finale  $y(\infty)$ .

$S$  = massima sovralongazione =  $100 \frac{y(T_m) - y(\infty)}{y(\infty)}$

$T_m$  = istante di massima sovralongazione

$T_a$  = tempo di assestamento, definito come per i sistemi del primo ordine

## Relazione tra $\delta$ ed $S$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\delta \omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \phi), \quad \omega = \omega_n \sqrt{1-\delta^2}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{-e^{-\delta \omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \omega \cos(\omega t + \phi) + \frac{\delta \omega_n e^{-\delta \omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = 0$$

$$-\omega \cos(\omega t + \phi) + \delta \omega_n \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = 0$$

$$\operatorname{tg}(\omega t + \phi) = \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}, \quad \phi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$$

$$\operatorname{tg}(\omega t + \phi) = \operatorname{tg} \phi$$

$$\omega t = n\pi, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$t = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}, \quad T_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}$$

In tali istanti

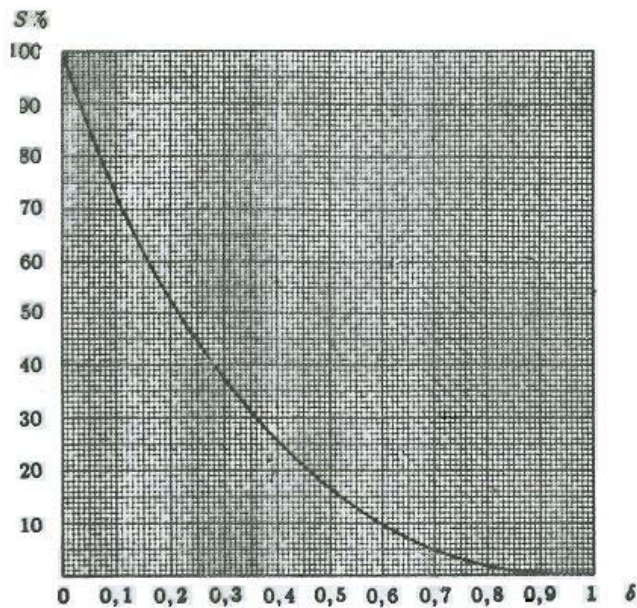
$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\delta \omega_n \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}}}{\sqrt{1-\delta^2}} \operatorname{sen}\left(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} + \phi\right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-n\pi\delta/\sqrt{1-\delta^2}}}{\sqrt{1-\delta^2}} \operatorname{sen}(n\pi + \phi)$$

$$= 1 - (-1)^n e^{\frac{-n\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

$$\operatorname{sen} \phi = \sqrt{1-\delta^2}$$

$$S = 100 e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$



Valori accettabili  
per  $S$ :  $5 \div 40\%$   
ai corrisponde  
 $\delta$ :  $0.7 \div 0.28$

Per il tempo di assestamento si può calcolare un'espressione approssimata (limite superiore) ipotizzando che in  $T_a$  sia  $\frac{dy(t)}{dt} = 0$ :

$$y(T_a) = 1 - e^{-\delta \omega_n T_a} = 1 - 0.05$$

$$e^{-\delta \omega_n T_a} = 0.05$$

$$\delta \omega_n T_a = 3$$

$$T_a = \frac{3}{\delta \omega_n}$$

Si noti che la massima sovraelongazione  $S$  è legata a  $\delta$  o a  $\phi$  ed il tempo di assestamento  $T_a$  a  $\delta \omega_n$ , cioè alla parte reale dei due poli complessi

# Risposta armonica (Risposta frequenziale)

Si consideri un sistema lineare e stazionario, caratterizzato da una funzione di trasferimento  $G(s)$  con tutti i poli a parte reale negativa.

Si ecciti il sistema con un segnale sinusoidale:

$$x(t) = X \sin \omega t \quad x(s) = \frac{X \omega}{s^2 + \omega^2}$$

In uscita si ottiene, a partire dallo stato zero

$$y(s) = G(s) x(s) = \frac{X \omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)} \quad G(s) \rightarrow \frac{N(s)}{D(s)}$$

Antitrasformando:

$$y(t) = \bar{y}(t) + k_1 e^{j\omega t} + k_2 e^{-j\omega t}$$

dove  $\bar{y}(t)$  corrisponde ai poli di  $G(s)$  e gode della proprietà  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{y}(t) = 0$

I residui  $k_1$  e  $k_2$  valgono:

$$k_1 = \left[ G(s) \frac{X \omega}{s+j\omega} \right]_{s=j\omega} = \frac{X}{2j} G(j\omega)$$

$$k_2 = \left[ G(s) \frac{X \omega}{s-j\omega} \right]_{s=-j\omega} = \frac{X}{-2j} G(-j\omega)$$

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = |G(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

Si ponga:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

$$G(-j\omega) = |G(j\omega)| e^{-j\phi(\omega)}$$

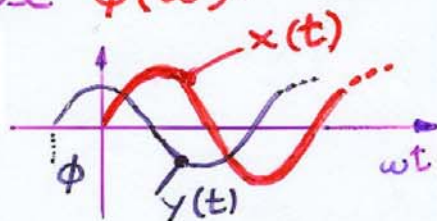
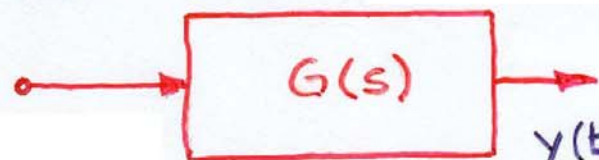
Risulta:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = |G(j\omega)| X \frac{e^{j(\omega t + \phi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \phi(\omega))}}{2j}$$

$$= |G(j\omega)| X \text{sen}(\omega t + \phi(\omega))$$

Il sistema, eccitato da una sinusoidale, a regime, presenta in uscita una sinusoidale con la stessa pulsazione, con ampiezza  $|G(j\omega)|X$  e fase  $\phi(\omega)$ .

$$x(t) = X \text{sen} \omega t$$



$$y(t) = Y(\omega) \text{sen}(\omega t + \phi(\omega))$$

Misurando sperimentalmente  $Y(\omega)$  e  $\phi(\omega)$  si ricava  $G(j\omega)$  e quindi  $G(s)$ .

$$|G(j\omega)| = \frac{Y(\omega)}{X}$$

$$\arg(G(j\omega)) = \phi(\omega)$$



# Diagrammi di BODE

Sono rappresentazioni grafiche della risposta armonica

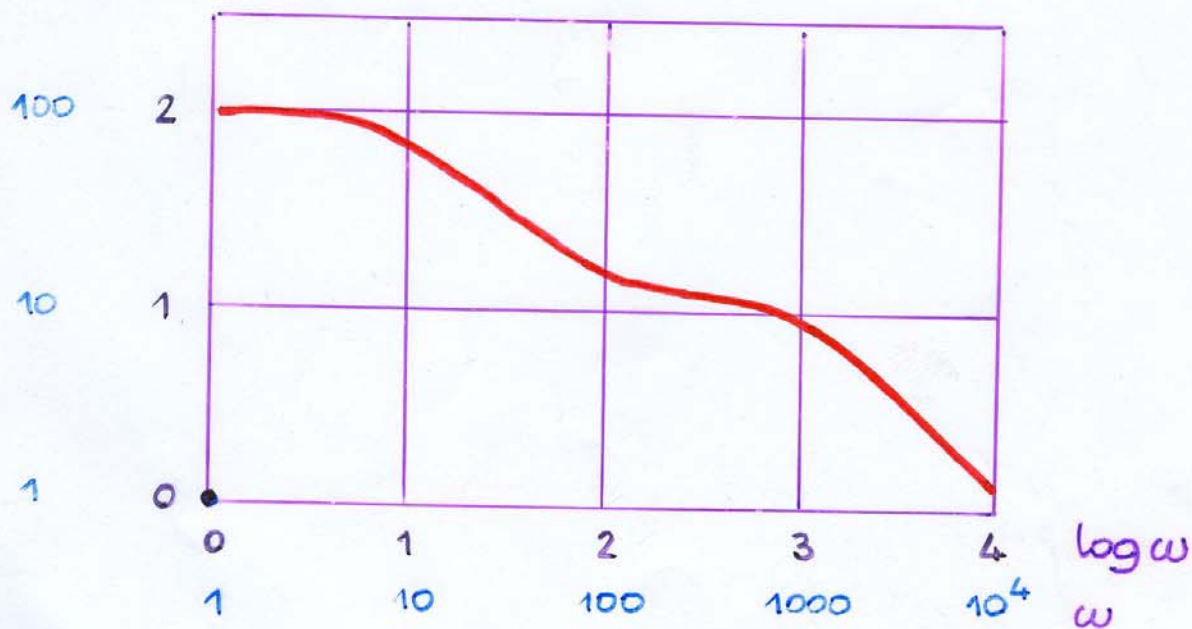
$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

$|G(j\omega)|$  : modulo di  $G(j\omega)$

$\phi(\omega)$  : argomento di  $G(j\omega)$

Il diagramma cartesiano ( $\log \omega \div \log |G(j\omega)|$ ) è chiamato **diagramma delle ampiezze (moduli)**

$|G(j\omega)|$     $\log |G(j\omega)|$



È un diagramma logaritmico

A volte nel diagramma delle ampiezze  
è riportata sull'asse delle ordinate la  
variabile

$$20 \log [G(j\omega)]$$

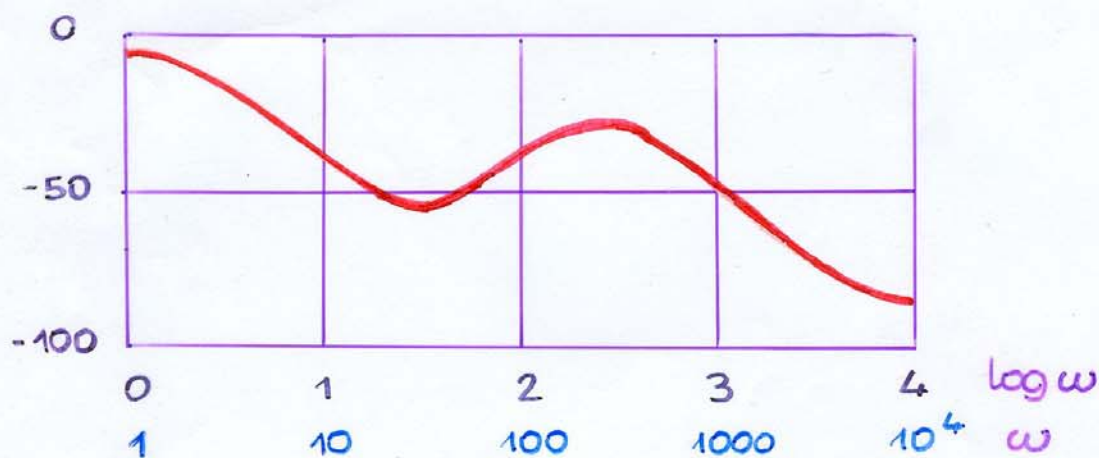
cioè il modulo della risposta armonica  
misurata in **decibel (db)**

$ G(j\omega) $	$\log  G(j\omega) $	$ G(j\omega) _{db}$
1	0	0
2	0.301	6
5	0.699	13.98
10	1	20
20	1.301	26
50	1.699	33.98
100	2	40
1000	3	60
0.1	-1	-20

- Ogni 6db si raddoppia il valore di  $|G(j\omega)|$ .
- Ogni 20db il valore di  $|G(j\omega)|$  viene moltiplicato per 10.

Il diagramma cartesiano ( $\log \omega - \phi(\omega)$ )  
è chiamato **diagramma delle fasi (argomenti)**

$$\phi(\omega) = \arg G(j\omega) \quad (\text{gradi})$$



È un diagramma semilogaritmico

**Vantaggi associati all'uso di diagrammi  
logaritmici - semilogaritmici**

- consentono la rappresentazione di grandezze che variano in campi estesi,
- consentono di ricavare facilmente i diagrammi del prodotto di risposte armoniche ("somma dei diagrammi" delle relative risposte armoniche).

## Diagrammi di Bode di funzioni elementari

Si consideri la funzione di trasferimento

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \\ &= \frac{\bar{k} (s-z_1)^{m_1} (s-z_2)^{m_2} \dots (s-z_\ell)^{m_\ell}}{(s-p_1)^{n_1} (s-p_2)^{n_2} \dots (s-p_h)^{n_h}} = \\ &= \frac{k (1+\tau_{z_1} s)^{m_1} \dots \left(1 + 2 \frac{\delta_i}{\omega_{n_i}} s + \frac{1}{\omega_{n_i}^2} s^2\right)^{m_i} \dots}{(1+\tau_{p_1} s)^{n_1} \dots \left(1 + 2 \frac{\delta_j}{\omega_{n_j}} s + \frac{1}{\omega_{n_j}^2} s^2\right)^{n_j} \dots} \end{aligned}$$

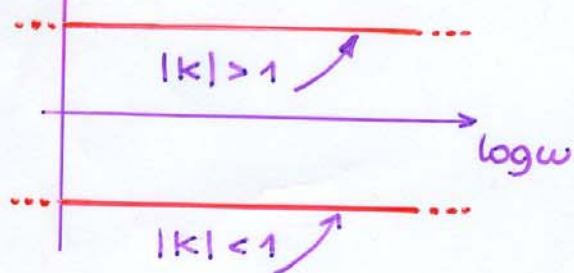
Le funzioni elementari che compongono  $G(s)$  sono:

$$\begin{aligned} &k \quad (\leq 0) \\ &s^{\pm 1} \\ &(1+\tau s)^{\pm 1} \\ &\left(1 + 2 \frac{\delta}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2\right)^{\pm 1} \end{aligned}$$

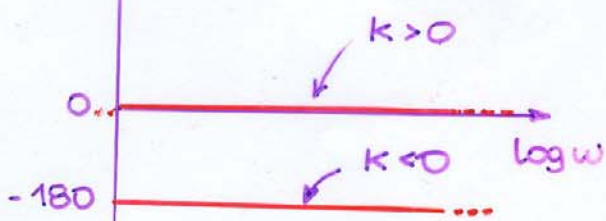
Si costruiscono i relativi diagrammi di Bode

$$G(j\omega) = k$$

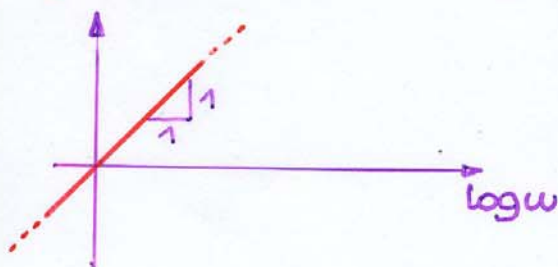
$$\log |G(j\omega)| = |k|$$



$$\arg G(j\omega)$$

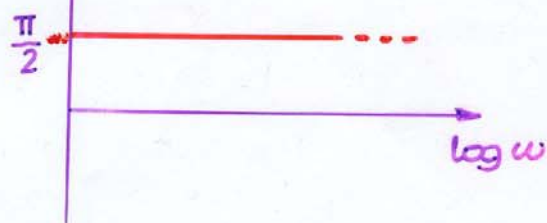


$$\log |G(j\omega)|$$

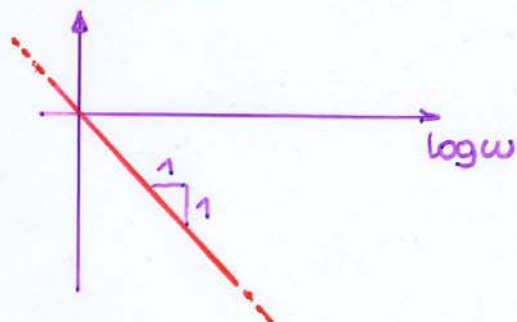


$$G(j\omega) = j\omega$$

$$\arg G(j\omega)$$

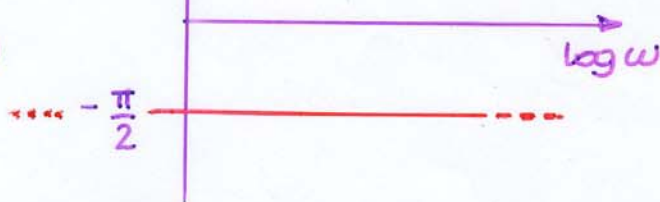


$$\log |G(j\omega)|$$



$$G(j\omega) = (j\omega)^{-1}$$

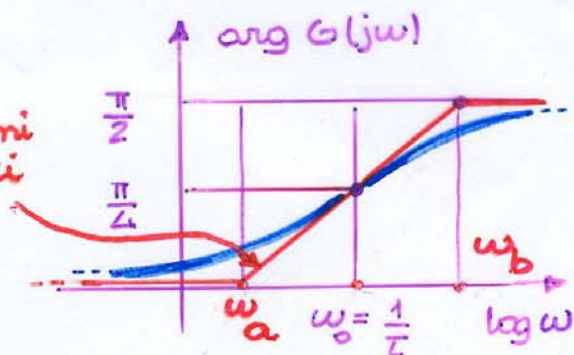
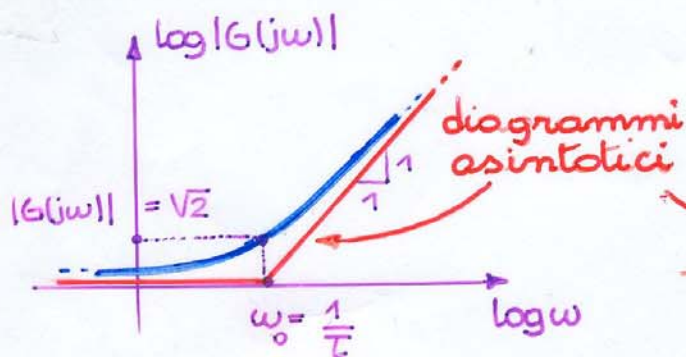
$$\arg G(j\omega)$$



$$G(j\omega) = (j\omega)^h = \omega^h e^{jh\frac{\pi}{2}}$$

$$\ln G(j\omega) = h \cdot \ln(\omega) + jh\frac{\pi}{2}, \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

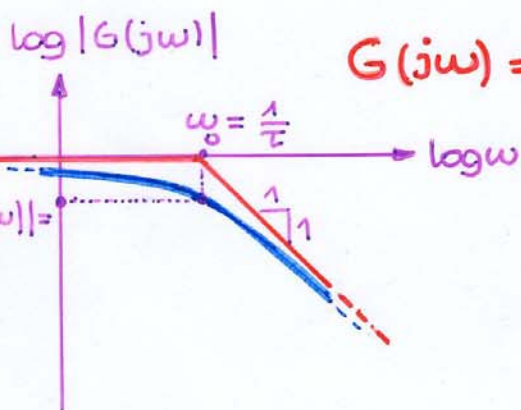
$$G(j\omega) = (1 + j\omega\tau) \quad \tau > 0$$



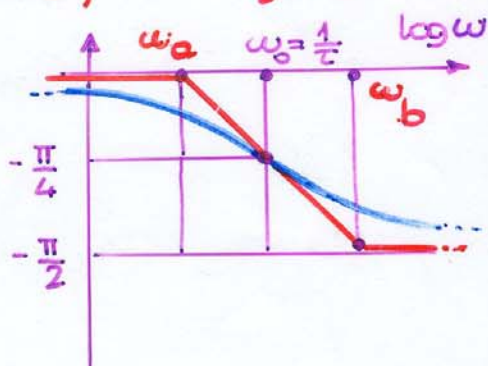
$$|G(j\omega)| = \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$$

$$\arg |G(j\omega)| = \arctg \omega\tau$$

$$\begin{cases} |G(j\omega)|_{\omega = \frac{1}{\tau}} = \sqrt{2} = 3 \text{ dB} \\ \arg G(j\omega)_{\omega = \frac{1}{\tau}} = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$



$$G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{-1} \quad \tau > 0$$



$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

$$\arg G(j\omega) = -\arctg \omega\tau$$

$$G(j\omega) = 1 - j\omega\tau, \quad \tau > 0$$

$$\begin{cases} |G(j\omega)| = \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \\ \arg G(j\omega) = -\arctg \omega\tau \end{cases}$$

$$G(j\omega) = (1 - j\omega\tau)^{-1}, \quad \tau > 0$$

$$\begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \\ \arg G(j\omega) = \arctg \omega\tau \end{cases}$$

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T, \quad T > 0 \quad \omega_0 = \frac{1}{T} \text{ ascissa di rottura}$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

Nel diagramma asintotico:

$$\text{per } \omega < \frac{1}{T} \quad |G(j\omega)| \approx 1 \quad \log |G(j\omega)| = 0$$

$$|G(j\omega)|_{\text{db}} = 0$$

$$\text{per } \omega > \frac{1}{T} \quad |G(j\omega)| \approx \omega T$$

$$\log |G(j\omega)| = \log \omega - \log \frac{1}{T}$$

equazione della retta a pendenza unitaria (o a 20 db per decade.)

$$\arg G(j\omega) = \arctg \omega T, \quad \begin{cases} \omega = e^{\ln \omega} \\ \left[ \frac{d}{dx} \arctg f(x) = \frac{df/dx}{1+f^2(x)} \right] \end{cases}$$

$$\left. \frac{d(\arg G(j\omega))}{d(\ln \omega)} \right|_{\omega = \frac{1}{T}} = \frac{d(\arg G(j\omega))}{d\omega} \frac{d\omega}{d(\ln \omega)} \Big|_{\omega = \frac{1}{T}} =$$

$$= \frac{T}{1 + \frac{1}{T^2} \cdot T^2} \cdot \frac{1}{T} = \frac{1}{2}$$

pendenza della retta tangente in  $\omega_0 = \frac{1}{T}$

$$\frac{\pi/4}{\ln \omega_b - \ln \omega_a} = \frac{\pi/4}{\ln \omega_b - \log \omega_0} = \frac{1}{2} \quad \text{cioè}$$

$$\ln \frac{\omega_b}{\omega_a} = \ln \frac{\omega_b}{\omega_0} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\omega_b}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_0} = e^{\frac{\pi}{2}} = 4.81$$

$$\rightarrow \begin{cases} \omega_b = 4.81 \omega_0 = 4.81 \cdot \frac{1}{T} \\ \omega_a = \frac{\omega_0}{4.81} = \frac{1}{4.81 \cdot T} \end{cases}$$

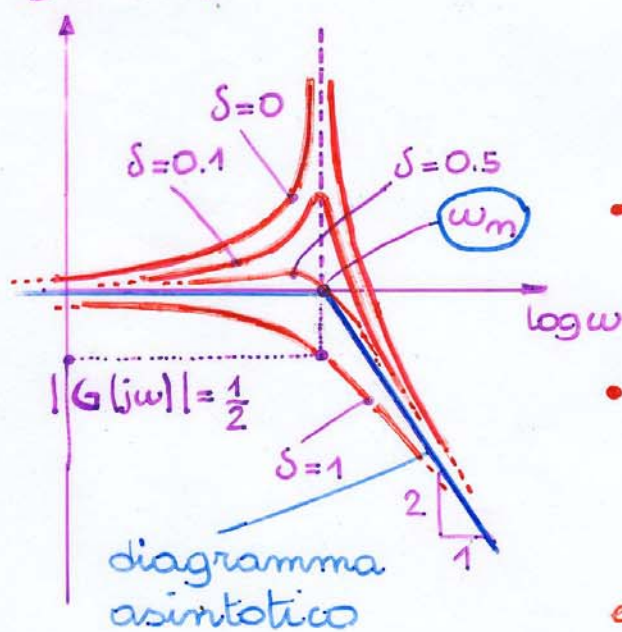
$$G(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j 2\delta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^{-1}$$

$$0 \leq \delta < 1$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

$$\arg G(j\omega) = - \arctg \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$\log |G(j\omega)|$



Nel diagramma asintotico:

- $\frac{\omega}{\omega_n} < 1 \quad |G(j\omega)| = 1$

- $\frac{\omega}{\omega_n} > 1 \quad |G(j\omega)| \approx \frac{\omega_n^2}{\omega^2}$

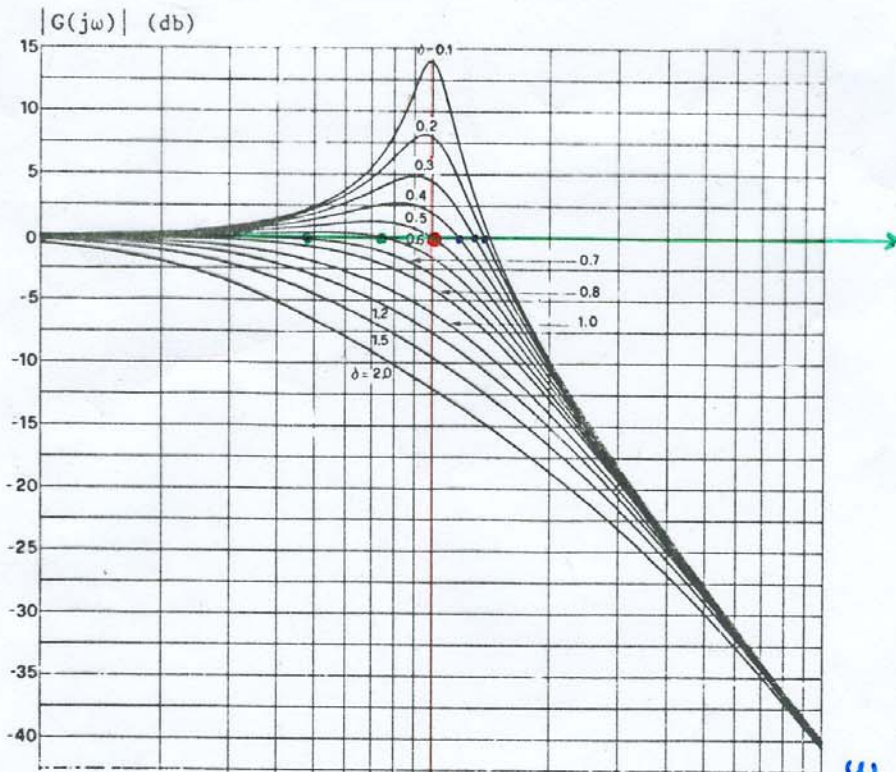
$$\log |G(j\omega)| = 2 \log \omega_n - 2 \log \omega$$

equazione della retta a pendenza -2 (o a -40 db per decade)

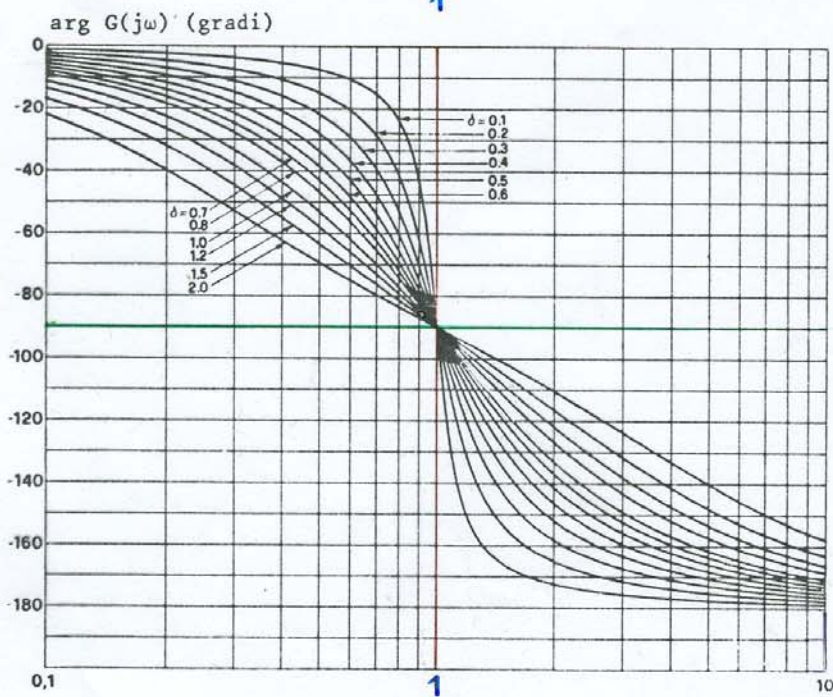
Il diagramma delle ampiezze per:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \delta < \frac{1}{2} \quad \text{interseca l'asse delle ascisse a destra di } \omega_n \\ \frac{1}{2} < \delta < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{interseca l'asse delle ascisse a sinistra di } \omega_n \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \delta < 1 \quad \text{non interseca l'asse delle ascisse.} \end{array} \right.$$





3/3



3/3

$$\arg G(j\omega) = -\arctg \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_m}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}} = -\arctg \frac{2\delta u}{1-u^2}, \quad u = \frac{\omega}{\omega_m}$$

per  $\omega \rightarrow 0$      $\arg G(j\omega) \rightarrow 0$      $\arg G(j\omega_m) = -\frac{\pi}{2}$   
 per  $\omega \rightarrow \infty$      $\arg G(j\omega) \rightarrow -\pi$

$$\left. \frac{d \arg G(j\omega)}{d \ln \omega} \right|_{\omega=\omega_m} = \left. \frac{d \arg G(j\omega)}{du} \frac{du}{d \ln \omega} \right|_{\omega=\omega_m} =$$

$$= \frac{2\delta(1-u^2) - (-2u)2\delta u}{(1-u^2)^2} \cdot u \Big|_{u=1} = - \frac{2\delta(1-u^2) + 4\delta u^2}{(1-u^2)^2 + 4\delta^2 u^2} u \Big|_{u=1} = -\frac{1}{\delta}$$

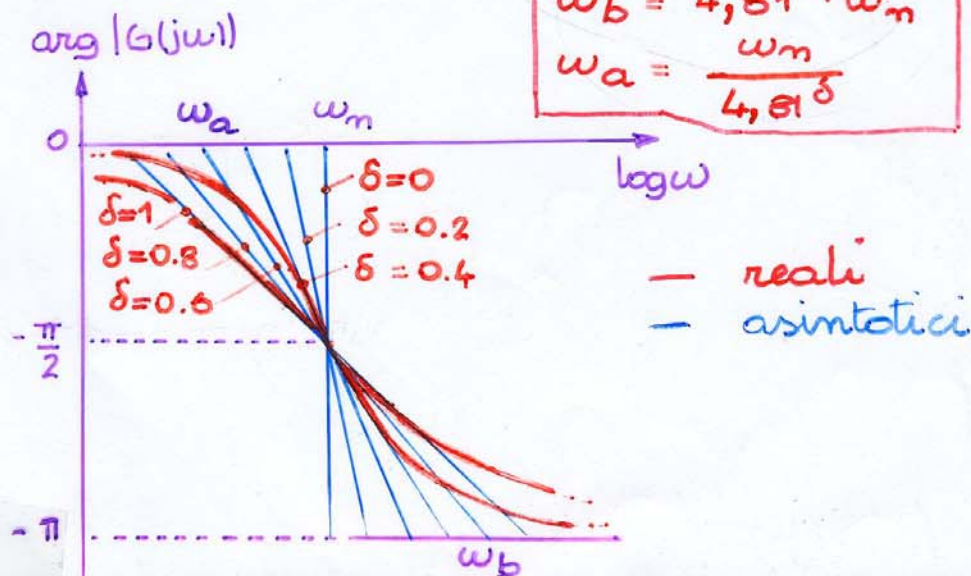
pendenza della retta tangente in  $\omega = \omega_m$

$$\frac{\pi/2}{\ln \omega_n - \ln \omega_a} = \frac{\pi/2}{\ln \omega_b - \ln \omega_m} = \frac{1}{\delta}$$

$$\ln \frac{\omega_m}{\omega_a} = \ln \frac{\omega_b}{\omega_m} = \frac{\pi\delta}{2} \quad \frac{\omega_m}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_m} = e^{\frac{\pi}{2}\delta} = 4,81^\delta$$

$$\omega_b = 4,81^\delta \cdot \omega_m$$

$$\omega_a = \frac{\omega_m}{4,81^\delta}$$



I diagrammi di  $G(j\omega) = (1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} + j2\delta\frac{\omega}{\omega_m})$

$0 \leq \delta < 1$  si ottengono dai precedenti ribaltati rispetto l'asse delle ascisse.

Per  $-1 < \delta \leq 0$  rimane inalterato il modulo e cambia il segno l'argomento.

**Picco di risonanza**: il massimo valore del modulo della risposta armonica.

Corrisponde al minimo della funzione

$$(1-u^2)^2 + 4\delta^2 u^2, \quad u = \frac{\omega}{\omega_m}$$

derivando

$$-4(1-u^2)u + 8\delta^2 u = 0$$

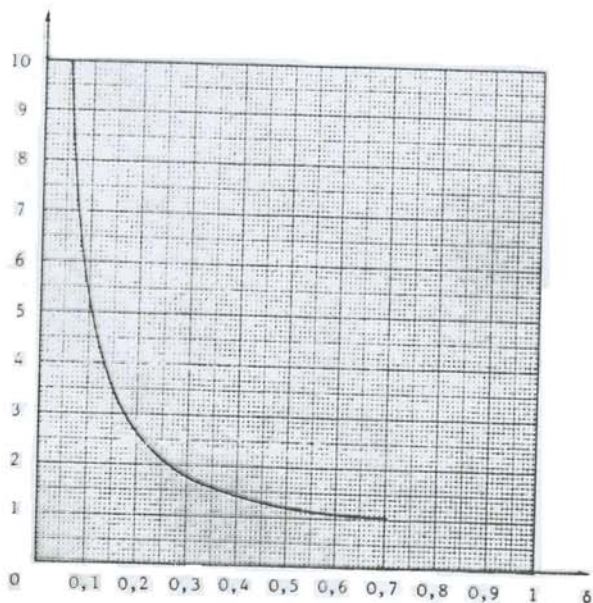
$$u [8\delta^2 - 4(1-u^2)] = 0 \quad u = 0$$

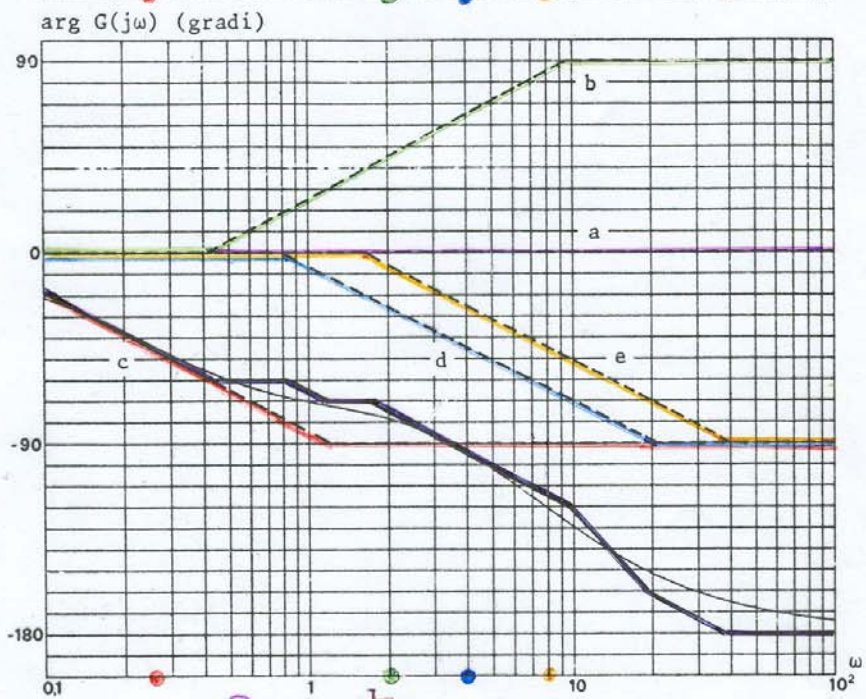
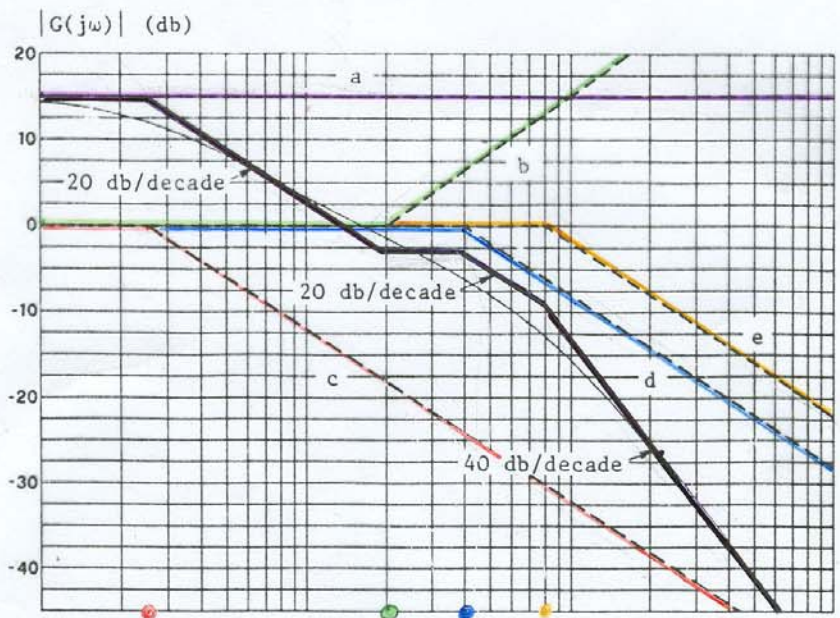
$$2\delta^2 = 1 - u^2$$

$$u = \sqrt{1 - 2\delta^2}$$

$$\omega_r = \omega_m \sqrt{1 - 2\delta^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}} \quad \omega = \omega_r$$





$$G(j\omega) = \frac{5.6 \left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)}{\underbrace{(1 + j\omega 4)}_c \underbrace{\left(1 + \frac{j\omega}{4}\right)}_d \underbrace{\left(1 + \frac{j\omega}{8}\right)}_e}$$

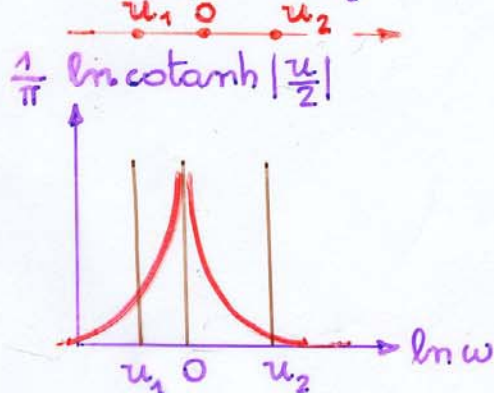
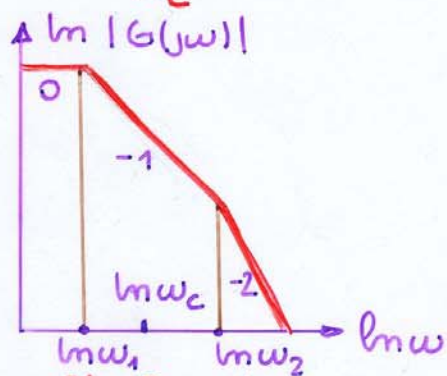
## Formula di Bode

Una funzione di trasferimento razionale fatta si dice a **fase minima** se non ha nè poli nè zeri nel semipiano destro del piano  $s$

Per tali sistemi  $\arg(G(j\omega))|_{\omega=\omega_c}$  può essere calcolato dalla conoscenza del diagramma delle ampiezze:

$$\arg(G(j\omega_c)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \ln |G(j\omega)|}{d u} \ln \coth \frac{|u|}{2} du$$

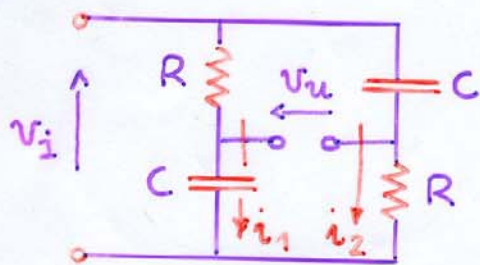
$$u = \ln \frac{\omega}{\omega_c} = \ln \omega - \ln \omega_c$$



La fase nell'intorno di  $\omega_c$  dipende dalla pendenza del diagramma delle ampiezze in quell'intorno.

Infatti nell'integrale è tale pendenza che viene pesata maggiormente

# Sistemi a fase non minima



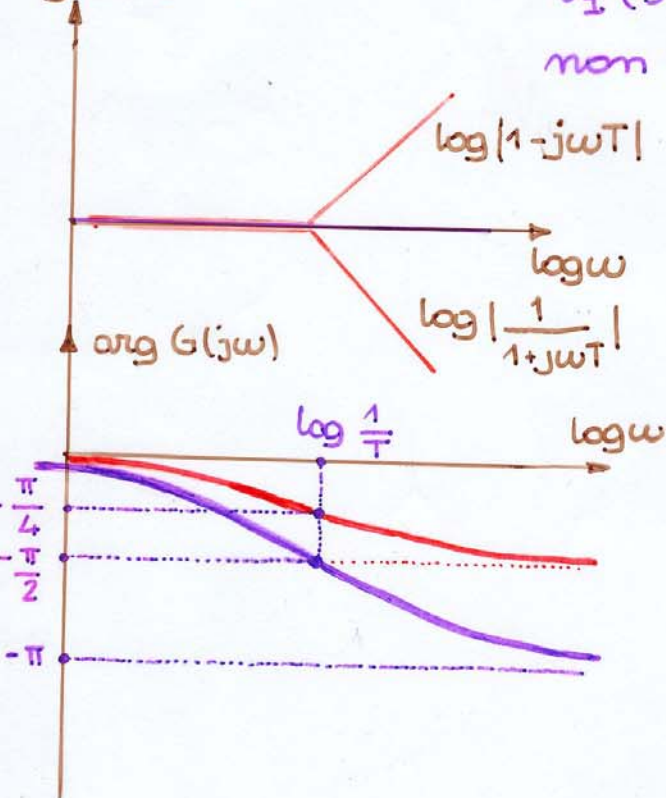
$$i_1 = \frac{v_i}{R + \frac{1}{sC}} \quad , \quad i_2 = \frac{v_i}{R + \frac{1}{sC}}$$

$$v_u = i_2 \frac{1}{sC} - i_1 R$$

$$\frac{v_u(s)}{v_i(s)} = \frac{1 - Ts}{1 + Ts} \quad , \quad T = RC$$

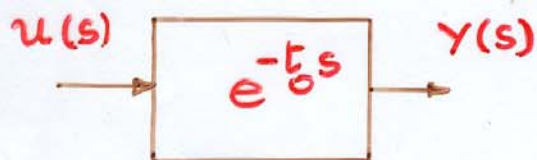
non è a fase minima

$\log |G(j\omega)|$



Applicando la formula di Bode si sarebbe dedotta una fase identicamente nulla

## Sistemi a fase non minima



$$y(t) = u(t - t_0)$$

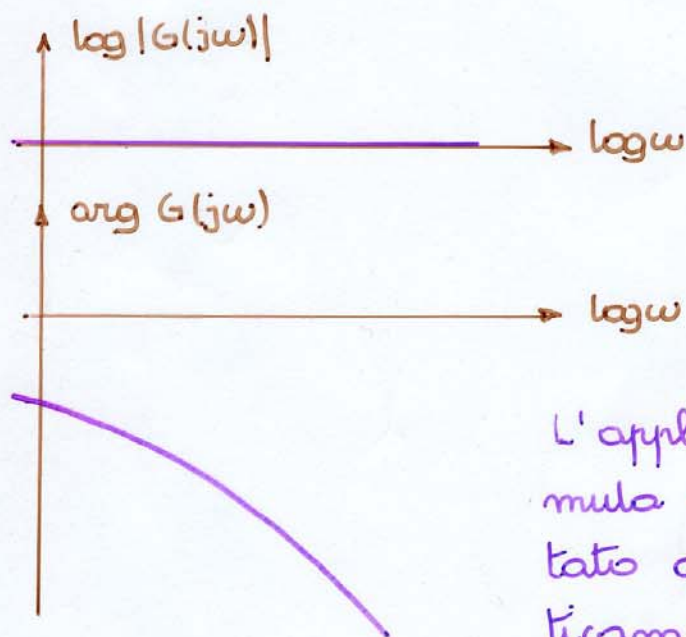
$$y(s) = e^{-t_0 s} u(s)$$

$$G(j\omega) = \cos \omega t_0 - j \sin \omega t_0$$

(trascendente)

$$|G(j\omega)| = 1$$

$$\arg G(j\omega) = -\arctg \operatorname{tg} \omega t_0 = -\omega t_0 = -t_0 \cdot 10^{\log \omega}$$

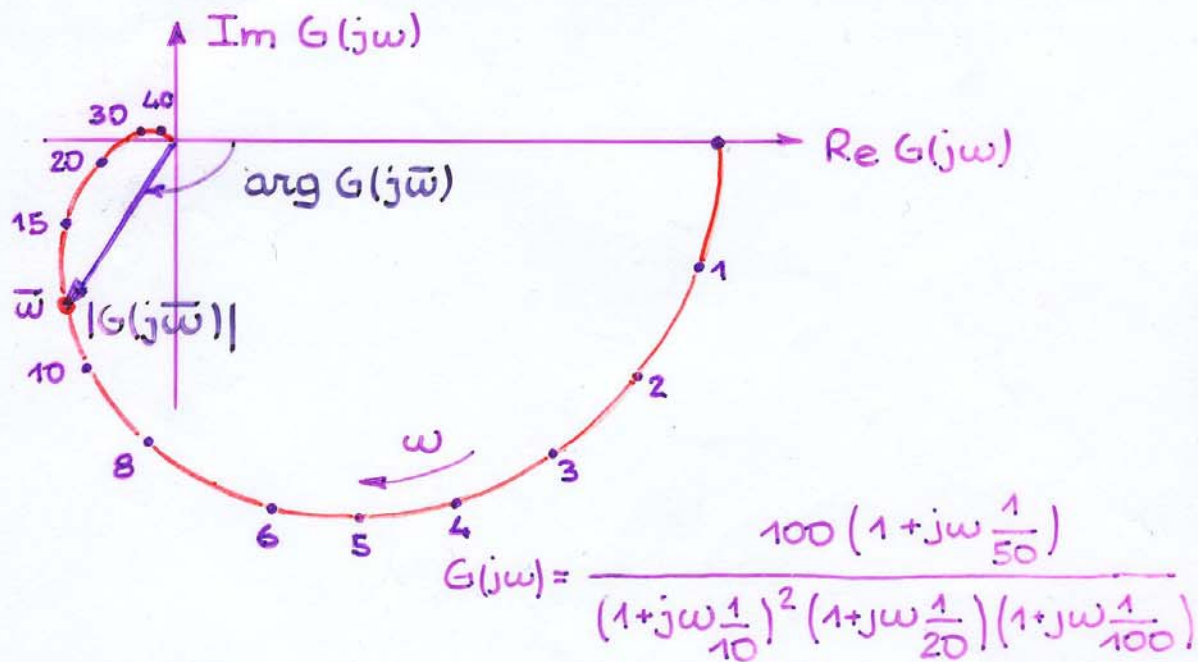


L'applicazione della formula di Bode avrebbe portato ad una fase identicamente nulla.

# Diagrammi polari o di Nyquist

Sono diagrammi che rappresentano nel piano di Gauss il numero complesso  $G(j\omega)$  al variare di  $\omega$

La curva è graduata in valori di  $\omega$



Il diagramma può essere tracciato separando la parte reale e la parte immaginaria di  $G(j\omega)$ .

I diagrammi di Bode sono facilmente determinabili sul diagramma di Nyquist in funzione di  $\omega$  e viceversa.



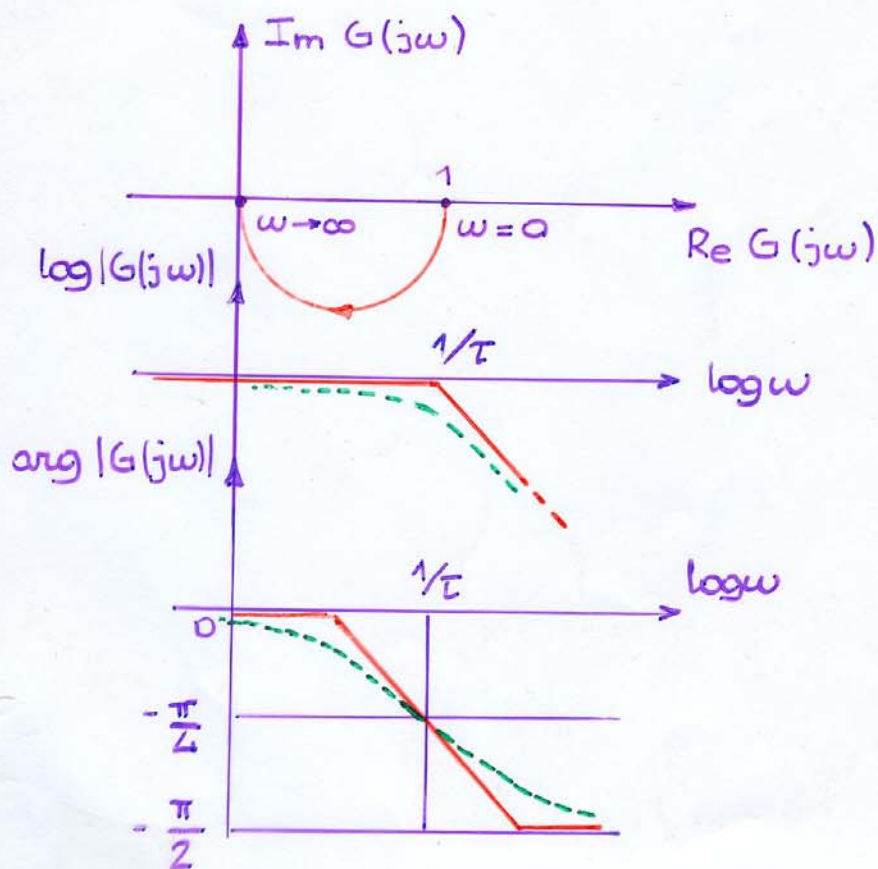
# Esempio

$$1) \quad G(s) = \frac{1}{1+\tau s}, \quad \tau > 0$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau} \quad \left\{ \begin{array}{l} |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \\ \arg |G(j\omega)| = -\arctg \omega\tau \end{array} \right.$$

$$\omega = 0 \quad \begin{array}{l} |G(j0)| = 1 \\ \arg G(j0) = 0 \end{array}$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad \begin{array}{l} |G(j\omega)| \rightarrow 0 \\ \arg G(j\omega) \rightarrow -\arctg \infty = -\frac{\pi}{2} \end{array}$$



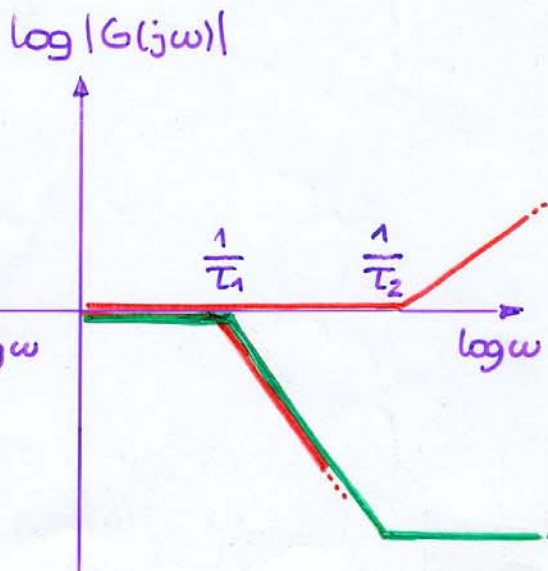
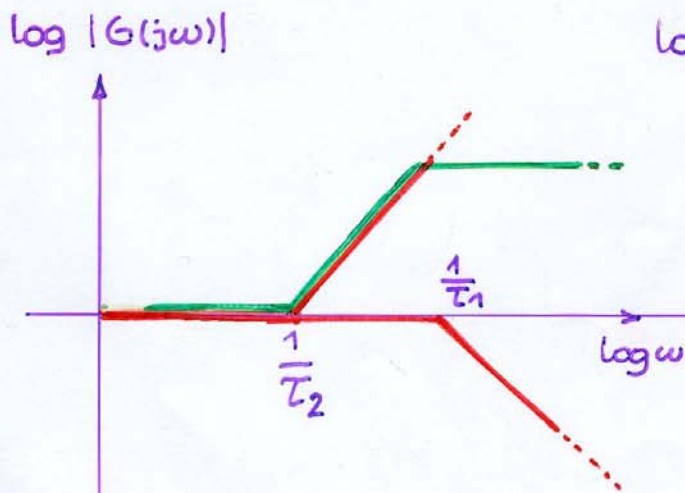
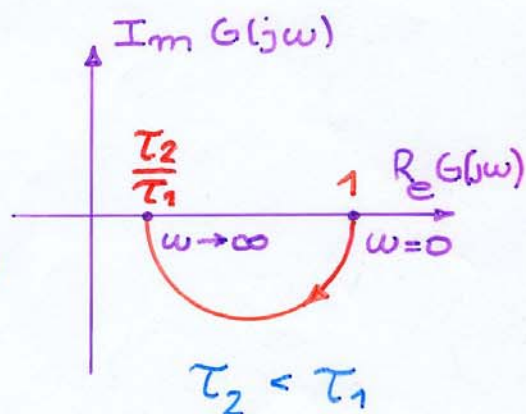
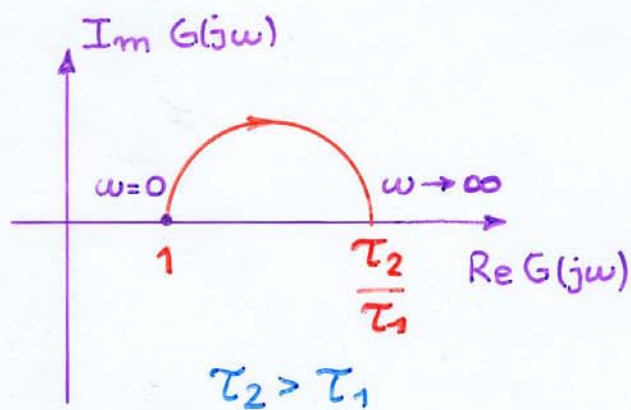
$$2) G(s) = \frac{1 + \tau_2 s}{1 + \tau_1 s}, \quad \tau_1 > 0, \tau_2 > 0$$

$$\begin{cases} |G(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + \omega^2 \tau_2^2}{1 + \omega^2 \tau_1^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \arg G(j\omega) = \arctg \omega \tau_2 - \arctg \omega \tau_1 \end{cases}$$

$$\omega = 0 \quad |G(j0)| = 1 \quad \arg G(j0) = 0$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad |G(j\omega)| \rightarrow \frac{\tau_2}{\tau_1} \quad \arg G(j\omega) \rightarrow 0$$



$$3) \quad G(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+0.5)}$$

$$G(j\omega) = \frac{4(1+0.5j\omega)}{(1+j\omega)(1+2j\omega)}$$

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = 4 \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \arg G(j\omega) = 0 \end{cases}$$

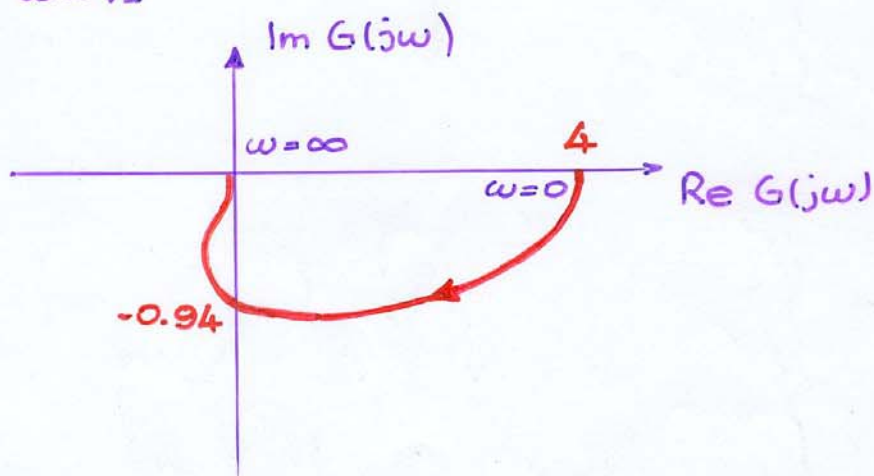
$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg G(j\omega) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\operatorname{Re} G(j\omega) = \frac{4(1-0.5\omega^2)}{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}$$

$$\operatorname{Im} G(j\omega) = \frac{-4\omega(2.5+\omega^2)}{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}$$

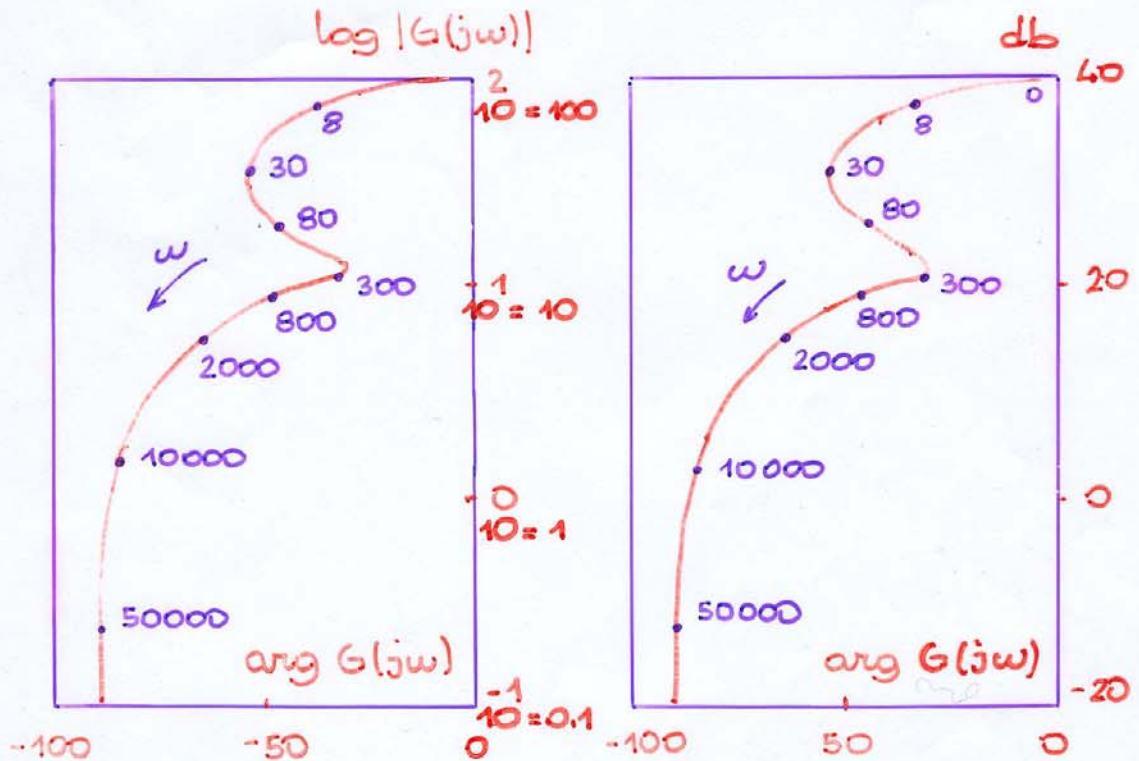
$$\operatorname{Re} G(j\omega) = 0 \quad \text{per } \omega = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{Im} G(j\omega)_{\omega=\sqrt{2}} = -0.94$$



# Diagrammi di Nichols

Sono diagrammi della risposta armonica  $G(j\omega)$  che hanno in asse  $\arg G(j\omega)$  e in ordinata  $|G(j\omega)|$  in logaritmi o in db.



I diagrammi di Nichols di più sistemi in cascata si ottengono sommando le coordinate dei punti corrispondenti alla stessa pulsazione.

Lo stesso accade fattorizzando la risposta armonica nelle funzioni elementari (come nella costruzione dei diagrammi di Bode.)

$$G(j\omega) = k$$

Il diagramma di Nichols si riduce ad un punto, corrispondente a fase uguale a 0 o a  $\pi$  a seconda del segno di  $k$ .

$$G(j\omega) = (j\omega)^{-h}$$

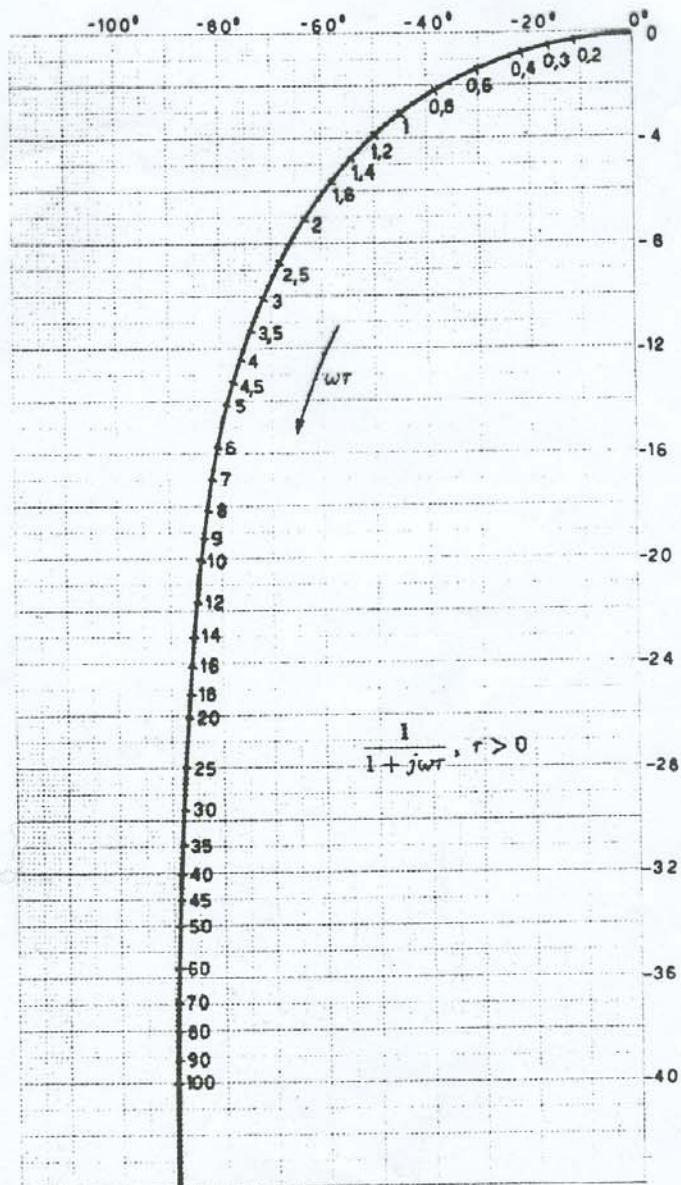
Il diagramma di Nichols è una retta parallela all'asse delle ordinate che interseca l'asse delle ascisse nel punto  $-h \frac{\pi}{2}$ .

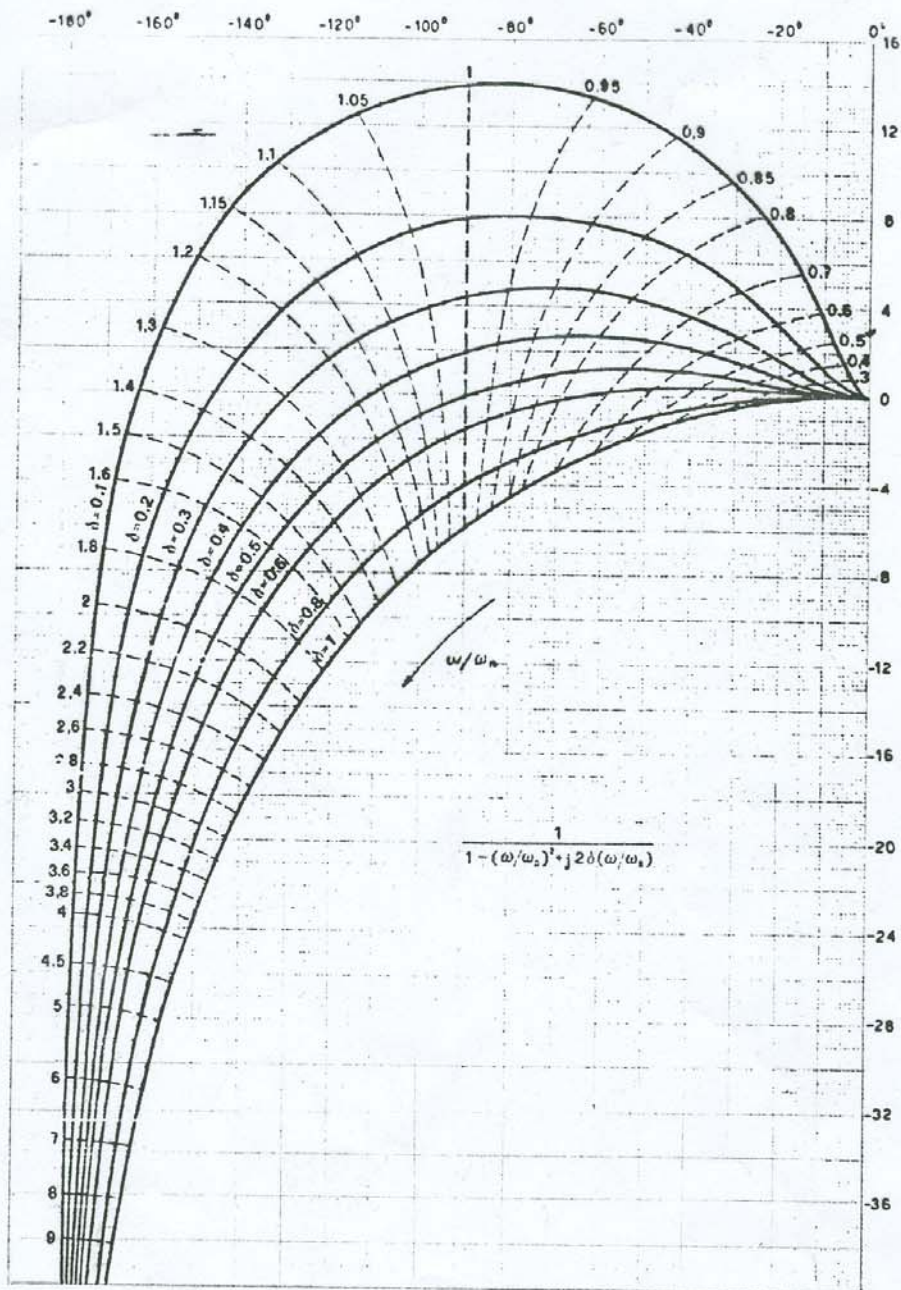
$$G(j\omega) = (1 + j\omega T)^{-1}, \quad T > 0$$

Il diagramma è rappresentato nella figura seguente. Il diagramma di  $(1 + j\omega T)$  è lo stesso ribaltato attorno all'origine. Cambiando il segno di  $T$  si ribalta il diagramma rispetto all'asse delle ordinate.

$$G(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} + j 2\delta \frac{\omega}{\omega_m}\right)^{-1} \quad 0 < \delta \leq 1$$

Il diagramma è rappresentato nella figura seguente. Il diagramma di  $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} + j 2\delta \frac{\omega}{\omega_m}\right)$  è lo stesso ribaltato attorno all'origine.





**Esempio:** Si voglia costruire il diagramma di Nichols della risposta armonica

$$G(j\omega) = \frac{5.6 (1 + \frac{j\omega}{2})}{(1 + j\omega 4) (1 + \frac{j\omega}{4}) (1 + \frac{j\omega}{8})}$$

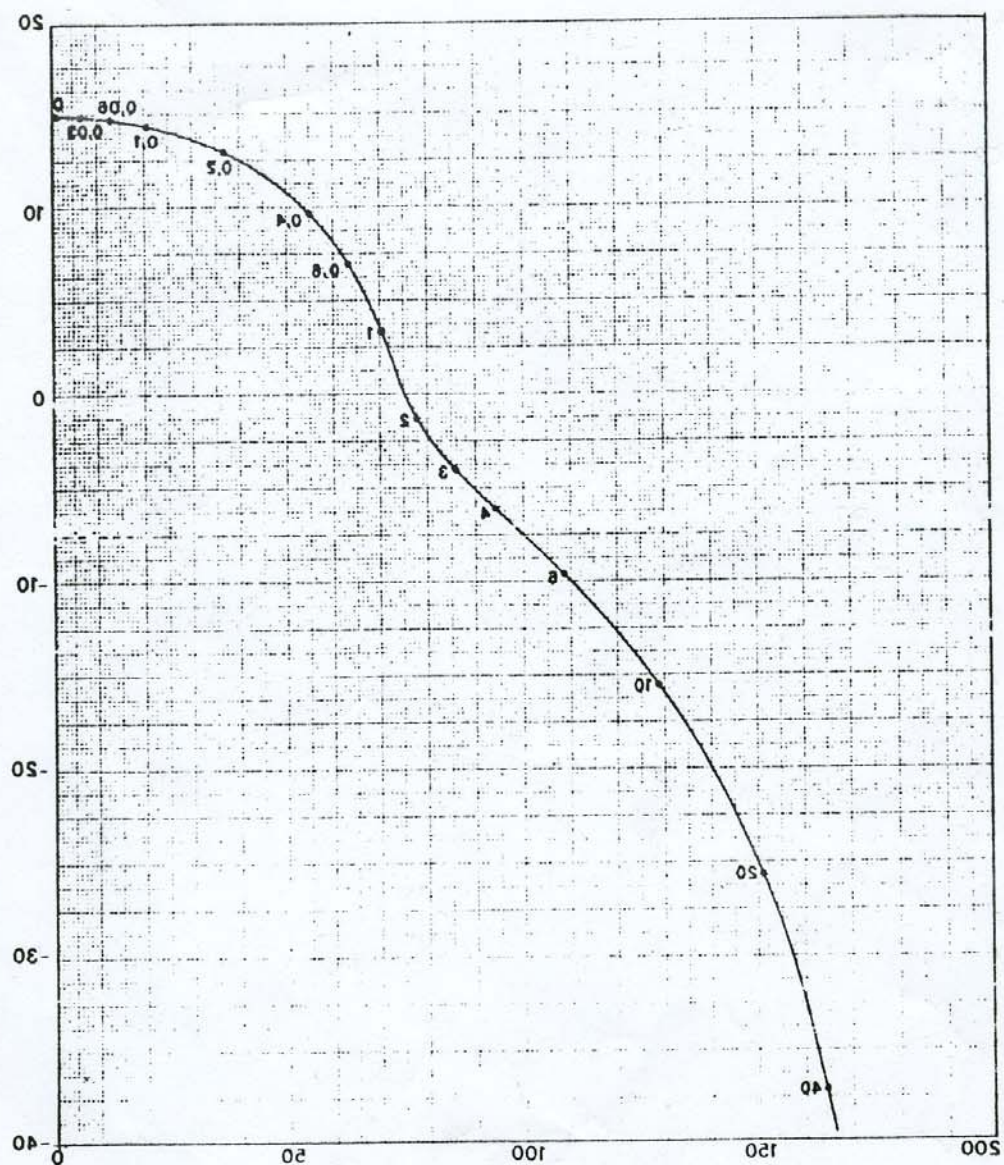
nell'intervallo di pulsazioni più significativo (quello compreso tra l'inverso della minima e massima costante di tempo opportunamente allargato).

Si calcolino i valori della seguente tabella

TERMINI	$\omega$	0,0	0,03	0,06	0,1	0,2	0,4	0,6	1,0	2,0	3,0	4,0	6,0	10,0	20,0
5,6	db	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96
	grad	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$(1 + j\omega 0,5)$	db	0,0	0,002	0,004	0,011	0,043	0,17	0,37	0,96	3,01	5,11	6,98	10,00	14,14	20,04
	grad	0,0	0,85	1,72	2,86	5,71	11,30	16,69	26,56	45,00	56,30	63,43	71,56	78,69	84,28
$(1 + j\omega 4)^4$	db	0,0	-0,062	-0,24	-0,64	-2,14	-5,51	-8,29	-12,30	-18,12	-21,60	-24,09	-27,61	-32,03	-38,06
	grad	0,0	-6,84	-13,49	-21,80	-38,66	-57,99	-67,38	-75,96	-82,87	-85,23	-86,42	-87,61	-88,57	-89,28
$(1 + j\omega 0,25)^4$	db	0,0	0,0	-0,001	-0,003	-0,011	-0,043	-0,096	-0,26	-0,97	-1,94	-3,01	-5,11	-8,60	-14,15
	grad	0,0	-0,43	-0,86	-1,43	-2,86	-5,71	-8,53	-14,03	-26,57	-36,86	-45,00	-56,31	-68,20	-78,69
$(1 + j\omega 0,125)^4$	db	0,0	0,0	-0,001	-0,003	-0,011	-0,024	-0,067	-0,263	-0,57	-0,96	-1,93	-4,09	-8,60	
	grad	0,0	-0,21	-0,42	-0,72	-1,43	-2,86	-4,28	-7,12	-14,03	-20,56	-26,56	-36,86	-51,34	-68,20
$G(j\omega)$	db	14,96	14,90	14,72	14,32	12,84	9,56	6,92	3,29	-1,38	-4,04	-6,12	-9,69	-15,62	-25,81
	grad	0,0	-6,63	-13,05	-21,09	-37,24	-55,26	-63,50	-70,55	-78,47	-86,35	-94,55	-109,2	-129,4	-151,9

da cui segue il diagramma





# Stabilità di funzioni di trasferimento

In virtù delle considerazioni svolte sulla stabilità nel dominio dei tempi segue che:

- il sistema descritto da una funzione di trasferimento razionale fratta è **asintoticamente stabile** se e solo se tutte i pdi hanno parte reale negativa, è **semplicemente stabile** se e solo se non presenta alcun pdo a parte reale positiva e gli eventuali pdi a parte reale nulla sono semplici.
- per la **stabilità i.l.u.l.** è necessario e sufficiente che tutti i pdi abbiano parte reale negativa.

stabilità asintotica  $\iff$  stabilità i.l.u.l.

$$\bullet y(t) = ce^{At} x_0 + \int_0^t ce^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + Du(t)$$

$$\bullet Y(s) = \underbrace{C(sI-A)^{-1}B}_{G(s)} u(s) + Du(s) + C(sI-A)^{-1}x_0 = \frac{N_1(s)}{D(s)} u(s) + \frac{N_2(s)}{D(s)} x_0$$

## Il criterio di Routh

Si consideri il denominatore della funzione di trasferimento di un sistema  $G(s)$  e lo si eguagli a zero per avere i poli:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Si ottiene così l'equazione caratteristica del sistema. Si supponga, senza perdita di generalità, che  $a_n$  sia maggiore di zero.

**Teorema:** Condizione necessaria (ma non sufficiente) perché le radici dell'equazione caratteristica abbiano tutte parte reale negativa è che sia

$$a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_{n-1} > 0, a_n > 0$$

Per valutare il segno della parte reale delle radici dell'equazione caratteristica si può usare il seguente criterio (di Routh)

si costruisce la tabella:

↓ 1ª colonna

riga	n		$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	...
	n-1		$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	...
	n-2		$b_{n-2}$	$b_{n-4}$	...	
	...		...			
	0					

dove:

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-4} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

La tabella va completata con le stesse regole fino alla riga 0, che comprende un solo elemento.

**Teorema:** Ad ogni variazione di segno che presentano i termini della prima colonna della tabella corrisponde una radice a parte reale positiva, ad ogni permanenza una radice con parte reale negativa  
(è omessa la dimostrazione.)

Esempio

$$s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0$$

3	1	1
2	-4	6
1	$\frac{-4-6}{-4}$	0
0	$\frac{2.5 \times 6}{2.5}$	

due variazioni e  
quindi due radici  
a parte reale positiva  
(le radici sono -1, 2, 3)

Esempio

$$2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$$

4	2	3	10
3	1	5	0
2	-7	10	0
1	$45/7$	0	
0	10		

due variazioni e quindi  
due radici a parte reale  
positiva

Durante la costruzione i termini di una stessa riga possono essere moltiplicati per uno stesso coefficiente positivo senza alterare il risultato.

Esempio

$$4s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1 = 0$$

4	4	5	1
3	3	2	0
2	7	3	0
1	5	0	
0	3		

← non si è diviso per 3

← non si è diviso per 7

## Casi singolari

a) il primo termine di una riga è nullo

$$s^3 + 3s - 2 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 3 \\ 2 & +0 & -2 \\ 1 & 2 & \\ 0 & -2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -0 & -2 \\ 1 & -2 & \\ 0 & -2 & \end{array}$$

Il risultato dell'analisi della tabella di Routh non cambia "associando un segno" a tale zero. Si noti che non è necessario dividere la riga successiva per il termine in questione, ma solo tener conto del suo segno

b) tutti i termini di una riga (necessariamente dispari) sono nulli.

La riga in esame sia la  $(2m-1)$ -esima. In tal caso le variazioni di segno che si verificano nei primi  $(n-2m+1)$  termini della prima colonna riguardano solo  $(n-2m)$  radici dell'equazione.

Le rimanenti  $2m$  radici si ottengono dall'equazione ausiliaria

$$b_{2m} s^{2m} + b_{2m-2} s^{2m-2} + \dots + b_0 = 0$$

costruita con i coefficienti della riga  $(2m)$ -esima.

Esempio  $s^6 + s^5 - 2s^4 - 3s^3 - 7s^2 - 4s - 4 = 0$

6	1	-2	-7	-4
5	1	-3	-4	0
4	1	-3	-4	0
3	0	0	0	←

nessuna variazione

L'equazione ausiliaria è

$$s^4 - 3s^2 - 4 = 0$$

Posto  $s^2 = z$

$$z^2 - 3z - 4 = 0 \quad \begin{cases} z_1 = 4 \\ z_2 = -1 \end{cases}$$

coe

$$s_1 = 2, s_2 = -2, s_3 = j, s_4 = -j$$

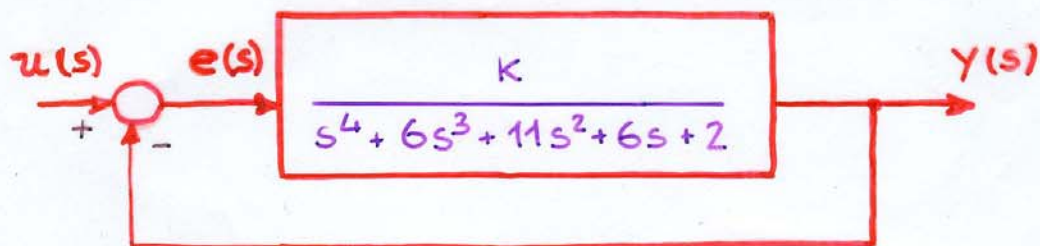
In alternativa si può derivare l'equazione ausiliaria e proseguire la tabella

3	4	-6
2	-6	-16
1	-100	0
0	-16	

1 variazione di segno  
(corrispondente a + 2)

Le eventuali radici immaginarie dell'equazione ausiliaria non portano a variazioni di segno negli ultimi elementi della prima colonna, così come quelle a parte reale negativa.

**Esempio:** Si consideri il sistema in retroazione:



Si determinino i valori di  $K$  corrispondenti alla stabilità asintotica del sistema.

L'equazione caratteristica del sistema è

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K + 2 = 0$$

Applicando il criterio di Routh

4	1	11	$K+2$
3	6	6	0
2	10	$K+2$	
1	$48-6K$	0	
0	$K+2$		

Asintotica stabilità

$$\begin{cases} 48-6K > 0 & K < 8 \\ K+2 > 0 & K > -2 \end{cases}$$

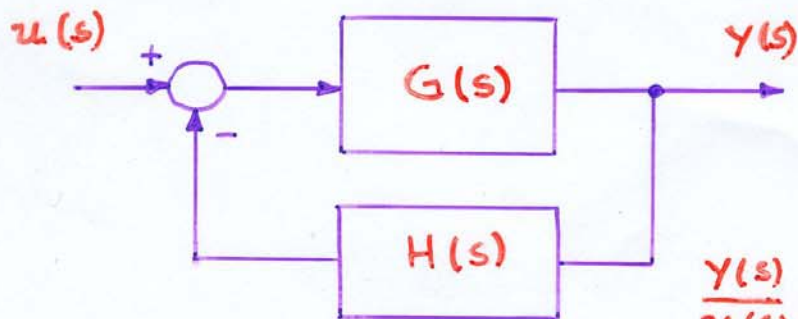
Per  $K = -2$  si ha un polo nell'origine (sistema semplicemente stabile)

Per  $K = 8$  si ha  $10s^2 + 10 = 0$ ,  $s = \pm j$   
cioè una coppia di poli immaginari (sistema semplicemente stabile)



## Il criterio di Nyquist

Per il sistema in retroazione rappresentato dallo schema a blocchi:



$$\begin{aligned}\frac{y(s)}{u(s)} &= \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \\ &= G_z(s)\end{aligned}$$

il criterio di Nyquist consente di stabilire la stabilità di  $G_z(s)$  dalla conoscenza della risposta armonica ad anello aperto

$$F(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega)$$

Il criterio di Nyquist si riferisce a diagrammi polari tracciati per  $\omega$  variabile da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

$$\text{Essendo} \quad F(-j\omega) = F^*(j\omega)$$

il completamento del diagramma per pulsazioni negative si ottiene ribaltando intorno all'asse delle ascisse quello tracciato per pulsazioni positive.

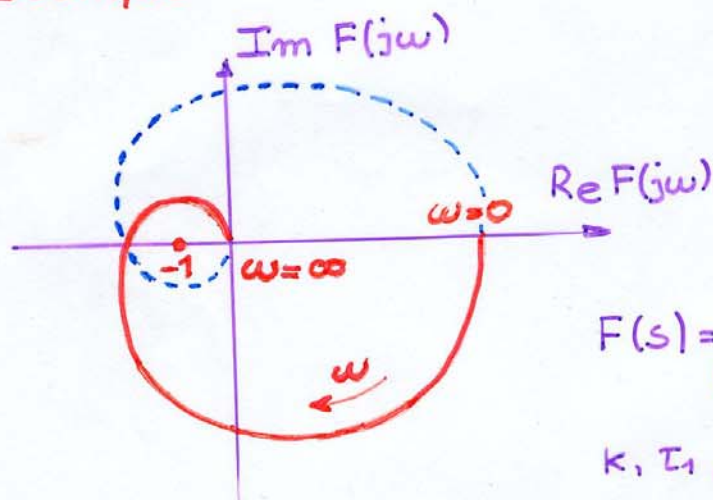
**Teorema** : Si supponga che  $F(s)$  abbia tutti i poli a parte reale negativa, ad eccezione di un eventuale polo nullo semplice o doppio.  
Condizione necessaria e sufficiente perché il corrispondente sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo di  $F(j\omega)$  non circondi né tocchi il punto critico  $-1+j0$ .

**Teorema** : Si supponga che  $F(s)$  non abbia poli sull'asse immaginario, ad eccezione di un eventuale polo nullo semplice o doppio.  
Condizione necessaria e sufficiente perché il corrispondente sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo di  $F(j\omega)$  circondi il punto critico  $-1+j0$  tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di  $F(s)$  con parte reale positiva.

Ogni giro in meno in senso antiorario o ogni giro in più in senso orario rispetto al numero di poli di  $F(s)$  con parte reale positiva corrisponde ad un polo con parte reale positiva nel sistema in retroazione  $G_r(s)$ .

(Sono omesse le dimostrazioni.)

## Esempio

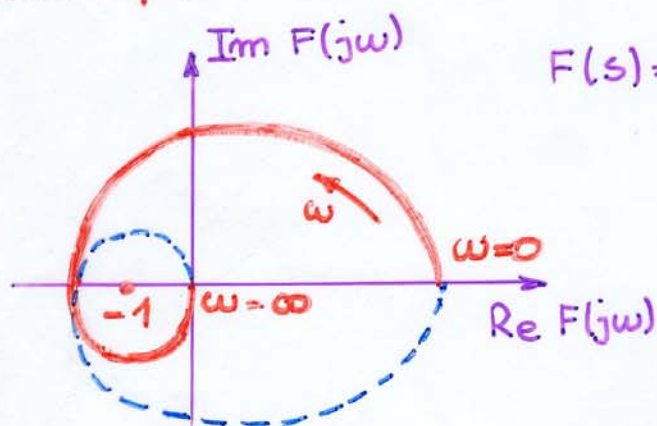


$$F(s) = \frac{k}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)}$$

$k, \tau_1, \tau_2, \tau_3$  positivi

Il punto critico è circondato 2 volte in senso orario: il sistema in retroazione ha due poli con parte reale positiva (instabile)

## Esempio

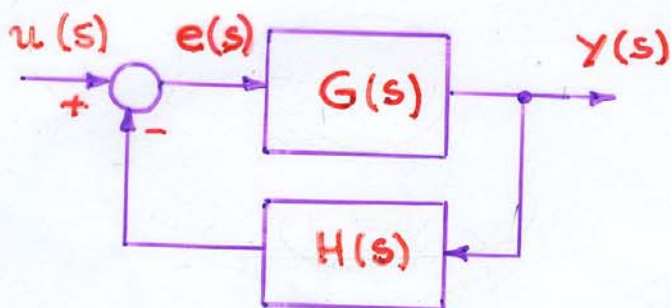


$$F(s) = \frac{k(1+\tau s)}{(1-\tau_1 s)(1-\tau_2 s)}$$

$k, \tau, \tau_1, \tau_2$  positivi

Il punto critico è circondato 2 volte in senso antiorario: il sistema in retroazione è asintoticamente stabile

## Sistemi in retroazione: proprietà



$$G_T(s) = \frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$u(t)$ : segnale d'ingresso (di riferimento) o set point

$y(t)$ : segnale d'uscita o variabile controllata.

$e(t)$ : segnale errore

$G(s)H(s)$ : guadagno di anello

$G(s)$ : f.d.t. della catena diretta

$H(s)$ : f.d.t. del trasduttore di segnale in retroazione

## Sensibilità alla variazione di un parametro

Si supponga che  $G(s)$  subisca una variazione per effetto di un suo parametro che passa dal valore nominale  $\alpha_0$  al valore  $\alpha_0 + \Delta\alpha$ .  
Sia, in prima approssimazione:

$$\begin{aligned} G(s, \alpha_0 + \Delta\alpha) &= G(s, \alpha_0) + \left. \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} \cdot \Delta\alpha \\ &= G(s) + \Delta G(s) \end{aligned}$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \Delta G_r(s) &= \frac{\partial}{\partial G} \left( \frac{G_r(s)}{1+GH} \right) \left. \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} \cdot \Delta\alpha = \\ &= \frac{1}{[1+G(s)H(s)]^2} \cdot \Delta G(s) \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta G_r(s)}{G_r(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)} \cdot \frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

In riferimento alla risposta armonica per le pulsazioni per cui  $|G(j\omega)H(j\omega)| \gg 1$  risulta:

$$\frac{|\Delta G_r(j\omega)|}{|G_r(j\omega)|} \ll \frac{|\Delta G(j\omega)|}{|G(j\omega)|}$$

cioè l'effetto della variazione del parametro è molto minore nel sistema in retroazione che non nel sistema ad anello aperto

Se invece varia  $H(s)$  per effetto di un parametro  $\beta$  risulta:

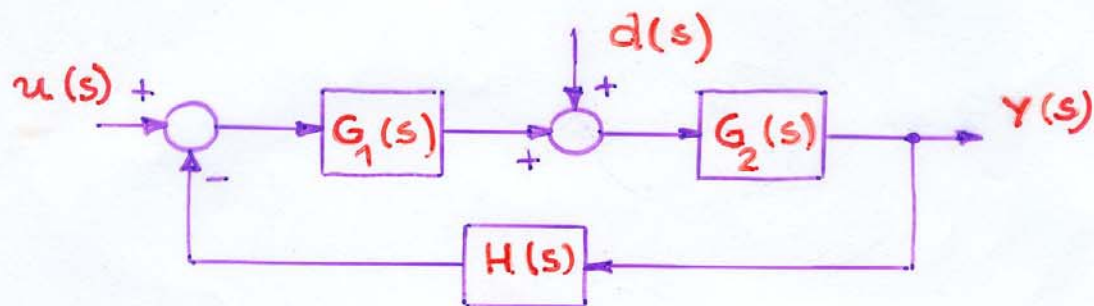
$$H(s, \beta_0 + \Delta\beta) = H(s, \beta_0) + \left. \frac{\partial H}{\partial \beta} \right|_{\beta = \beta_0} \cdot \Delta\beta$$
$$= H(s) + \Delta H(s)$$

$$\Delta G_r(s) = \frac{\partial}{\partial H} \left( \frac{G}{1+GH} \right) \frac{\partial H}{\partial \beta} \Big|_{\beta = \beta_0} \cdot \Delta\beta =$$
$$= \frac{-G(s)^2}{[1 + G(s)H(s)]^2} \cdot \Delta H(s)$$

$$\frac{\Delta G_r(s)}{G_r(s)} = \frac{-G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{\Delta H(s)}{H(s)}$$

Si errori relativi sono pertanto dello stesso ordine di grandezza quando  $|G(j\omega)H(j\omega)| \gg 1$

## Sensibilità ai disturbi



$d(t)$  : disturbo

Il suo effetto in uscita vale:

$$Y'(s) = G_2(s) d(s) \quad \text{in assenza di } H(s)$$

$$Y''(s) = \frac{G_2(s) d(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad \text{in presenza della retroazione}$$

L'effetto del disturbo in uscita viene attenuato per la presenza del termine  $|1 + G_1(j\omega)G_2(j\omega)H(j\omega)|$  se nel campo di frequenze del disturbo risulta

$$|G_1(j\omega)G_2(j\omega)H(j\omega)| \gg 1$$

## Larghezza di banda

Si supponga  $H(s) = h$  (costante reale)

$$G_r(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)h} = \frac{1}{\frac{1}{G(j\omega)} + h}$$

Per le pulsazioni per cui  $|G(j\omega)| \gg \frac{1}{h}$  risulta:

$$G_r(j\omega) \approx \frac{1}{h}$$

cioè la risposta armonica del sistema in retroazione rimane quasi costante al variare di  $\omega$  pur potendo variare  $G(j\omega)$ .

## Esempio

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad |G(j\omega)|_{\omega=0} = 1$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1} \quad |G(j\omega)|_{\omega=1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (-3 \text{ dB})$$

$$G_r(s) = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{h}{s+1}} = \frac{1}{s+1+h}, \quad h \gg 1$$

$$G_r(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1+h} \quad |G_r(j\omega)|_{\omega=0} = \frac{1}{1+h}$$

$$G_r(j\omega) = \frac{\frac{1}{1+h}}{1 + j\frac{\omega}{1+h}} \quad |G_r(j\omega)|_{\omega=1+h} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+h)}$$

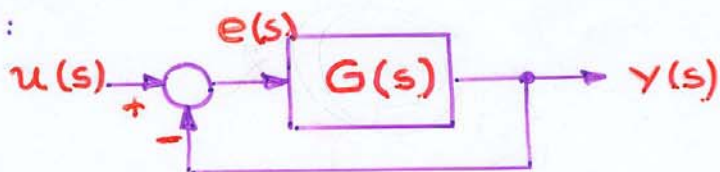
La frequenza di taglio superiore passa da  $\omega=1$  ad  $\omega=1+h$



## Errori a regime

Un sistema con funzione di trasferimento  $G(s)$  si dice di tipo  $h$  ( $h$  intero positivo o nullo) se presenta  $h$  pdi nell'origine.

Si chiude il sistema in retroazione unitaria:



Si studi l'errore  $e(t)$ , inteso come scostamento della variabile controllata  $y(t)$  dal riferimento imposto, quando il tempo tende all'infinito:

$$e(s) = \frac{1}{1+G(s)} u(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s)$$

- Errore a regime nella risposta al gradino

$$u(s) = R_0 \frac{1}{s}$$



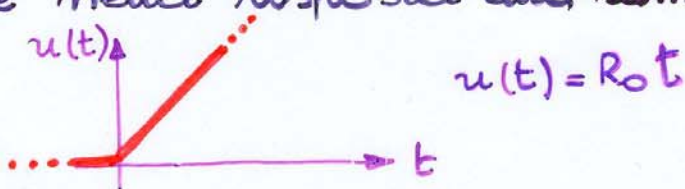
$$e_r = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_0}{1 + G(s)} = \frac{R_0}{1 + K_p}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \text{costante di errore di posizione}$$

L'errore a regime tende a zero quando  $K_p = \infty$  cioè  $G(s)$  è di tipo  $h > 0$ .

- Errore a regime nella risposta alla rampa

$$u(s) = R_0 \frac{1}{s^2}$$



$$e_r = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_0}{s G(s)} = \frac{R_0}{K_v}$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = \text{costante di errore di velocità}$$

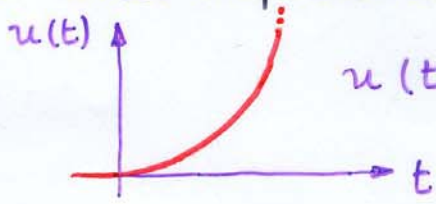
L'errore a regime tende a zero quando

$K_v = \infty$  cioè  $G(s)$  è di tipo  $h \geq 2$ :

Se $h = 0$	$K_v = 0$	$e_r = \infty$
$h = 1$	$K_v = K$	$e_r = \frac{R_0}{K}$
$h \geq 2$	$K_v = \infty$	$e_r = 0$

Errore a regime nella risposta alla parabola.

$$u(s) = R_0 \frac{1}{s^3}$$



$$u(t) = \frac{1}{2} R_0 t^2$$

$$e_r = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_0}{s^2 G(s)} = \frac{R_0}{K_a}$$

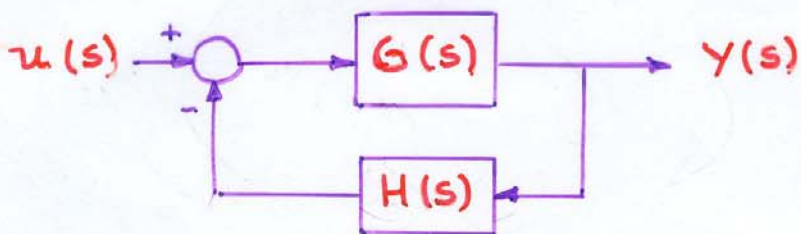
$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) =$  costante di errore di accelerazione

L'errore a regime tende a zero quando  $K_a = \infty$  cioè  $G(s)$  è di tipo  $h \geq 3$

In conclusione:

Tipo di sistema	$k_p$	$k_v$	$k_a$	gradino	rampa	parab.
0	k	0	0	$e_r = \frac{R_0}{1+k}$	$e_r = \infty$	$e_r = \infty$
1	$\infty$	k	0	$e_r = 0$	$e_r = \frac{R_0}{k}$	$e_r = \infty$
2	$\infty$	$\infty$	k	$e_r = 0$	$e_r = 0$	$e_r = \frac{R_0}{k}$

Le considerazioni precedenti possono estendersi ai sistemi con retroazione non unitaria



Se interessa che l'uscita del sistema sia proporzionale all'ingresso si definisce come errore:

$$e(t) = u(t) - \gamma y(t)$$

Risulta così:

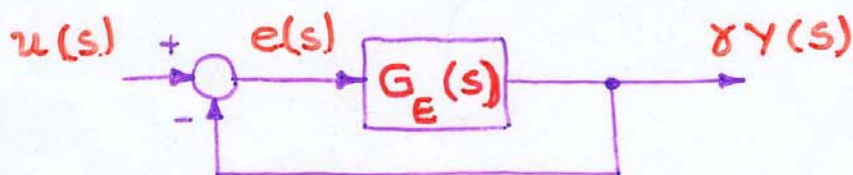
$$\begin{aligned} e(s) &= u(s) - \gamma y(s) = u(s) - \gamma \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} u(s) = \\ &= \frac{1 + G(s)H(s) - \gamma G(s)}{1 + G(s)H(s)} u(s) \end{aligned}$$

Ponendo:

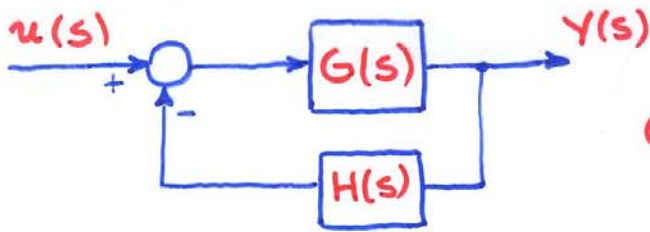
$$\frac{1 + G(s)H(s) - \gamma G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{e(s)}{u(s)} = \frac{1}{1 + G_E(s)}$$

$$\text{cioè: } G_E = \frac{G(s)\gamma}{1 + G(s)[H(s) - \gamma]}$$

si riduce il problema al caso di retroazione unitaria precedentemente esaminato:



# Luogo delle radici



$$G_r(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

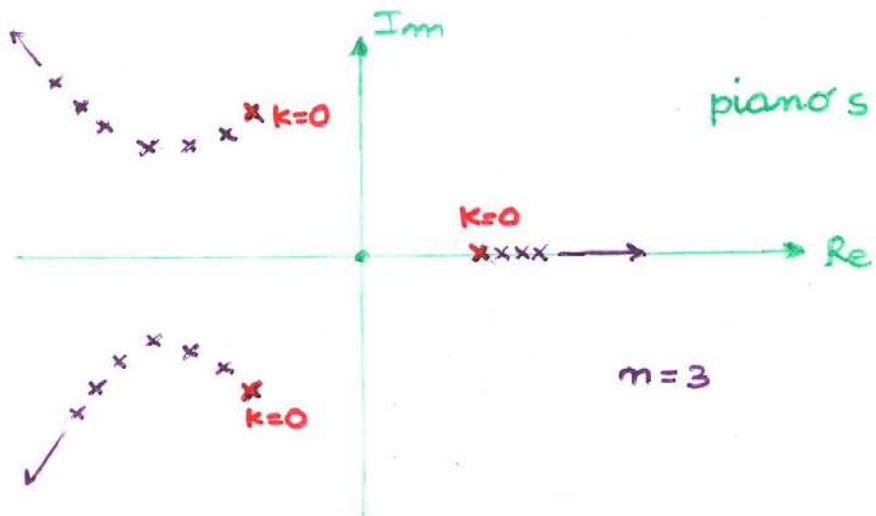
$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$G(s)H(s) = \frac{k(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \quad m \leq n$$

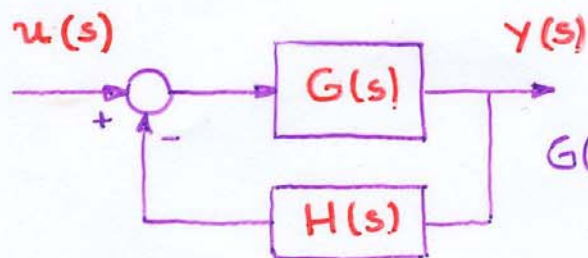
$$1 + \frac{k(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = 0$$

$$(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n) + k(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m) = 0$$

I pdi di  $G_r(s)$  sono le radici di questo polinomio: il luogo delle radici è una curva nel piano  $s$  che descrive come variano i pdi di  $G_r(s)$  al variare di  $k$ .



# Luogo delle radici



$$G(s)H(s) = \frac{K(s-z_1) \cdot \dots \cdot (s-z_m)}{(s-p_1) \cdot \dots \cdot (s-p_m)}$$

$$n \geq m$$

$$K > 0$$

$$G_r(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$\overline{G(s)H(s)} = \frac{G(s)H(s)}{k}$$

Al variare del parametro  $k$  da zero all'infinito le radici di  $(1 + G(s)H(s))$  cioè i **poli** di  $G_r(s)$  descrivono una curva nel piano  $s$  che si chiama **luogo delle radici**

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$1 + k \overline{G(s)H(s)} = 0 \Rightarrow$$

$$\overline{G(s)H(s)} = -1/k$$

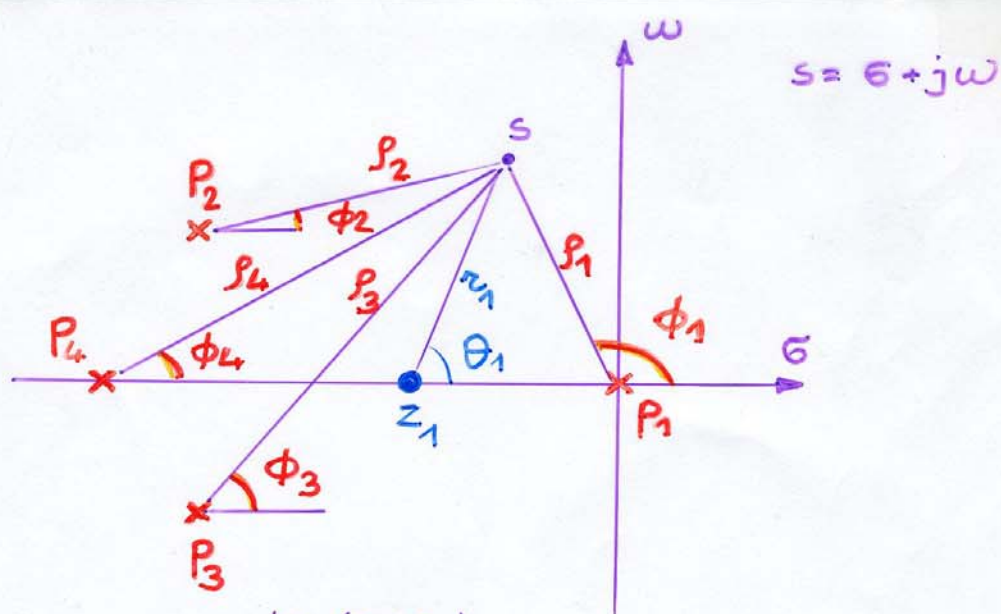
quando  $k < 0$  e lo

si fa variare da 0 a

$-\infty$  risulta:

$$\begin{cases} |\overline{G(s)H(s)}| = 1/k \\ \arg[\overline{G(s)H(s)}] = (2\nu + 1)\pi \\ \nu \text{ intero, } k > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\overline{G(s)H(s)}| = -1/k \\ \arg[\overline{G(s)H(s)}] = 2\nu\pi \\ \nu \text{ intero, } k < 0 \end{cases}$$



$$G(s)H(s) = \frac{k (s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)(s - p_4)} \quad k > 0$$

Il punto  $s$  appartiene al luogo delle radici se

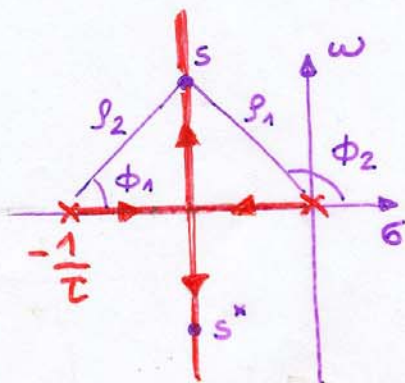
$$\begin{cases} \frac{r_1}{p_1 p_2 p_3 p_4} = \frac{1}{k} \\ \theta_1 - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = (2\nu + 1)\pi \end{cases}$$

Esempio

$$G(s)H(s) = \frac{k_1}{s(1 + \tau s)} = \frac{k_1/\tau}{s(s + \frac{1}{\tau})} = \frac{k}{s(s + \frac{1}{\tau})}, \quad \tau > 0$$

con  $0 \leq k_1 < \infty$  e di conseguenza  $0 \leq k < \infty$ .

I punti sull'asse reale compresi tra i due poli e quelli dell'asse del segmento compreso tra i 2 poli soddisfanno la condizione sugli argomenti



$$\frac{1}{p_1 p_2} = \frac{1}{k}$$

valori piccoli di  $k$  corrispondono a punti vicini ai pdi, valori grandi a punti sul ramo verticale

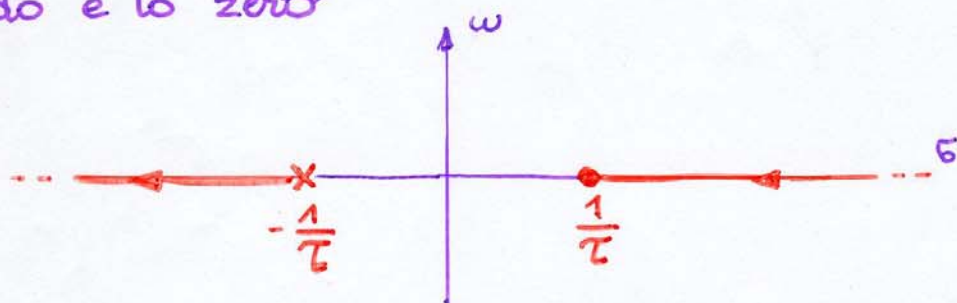
Al variare di  $k$  (o  $k_1$ ) tra 0 e  $\infty$  le radici di  $1 + G(s)H(s)$  partono dai pdi del sistema ad anello aperto ( $G(s)H(s)$ ) e vanno all' $\infty$

### Esempio

$$G(s)H(s) = k_1 \frac{1 - Ts}{1 + Ts} = -k_1 \frac{s - \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}} = k \frac{s - \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}}$$

$0 \leq k_1 < \infty$  e di conseguenza  $-\infty < k \leq 0$  ( $k = -k_1$ )

La condizione sugli argomenti è soddisfatta dai punti dell'asse reale non compresi tra il pdo e lo zero



Per  $k = -1$  il pdo del sistema va all'infinito

$$1 - \frac{s - \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}} = \frac{s + \frac{1}{T} - s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}} = \frac{2/T}{s + \frac{1}{T}}$$

si annulla solo per  $s \rightarrow \infty$

Per  $k < -1$  il pdo del sistema si sposta nel semipiano destro, cioè il sistema in retroazione diventa instabile



## Proprietà del luogo delle radici

**Proprietà 1** - Il luogo delle radici ha tanti rami quanti sono i poli della funzione di trasferimento di anello  $G(s)H(s)$  che si intersecano in corrispondenza delle radici multiple.

Ogni ramo parte da un polo ( $k$  nullo) e termina o in uno zero di  $G(s)H(s)$  o va all'infinito (rami all'infinito esistono quando  $n > m$ ) per  $|k| \rightarrow \infty$ .

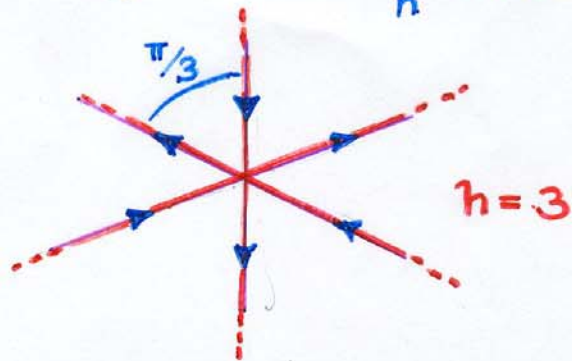
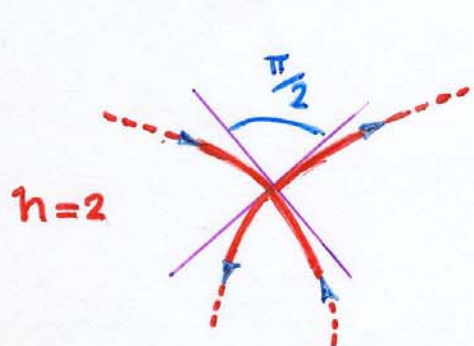
**Proprietà 2** - Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.

**Proprietà 3** - Se la costante  $k$  è maggiore di zero, un punto sull'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e poli. (Se  $k$  è negativa il numero totale deve essere pari).

**Proprietà 4** - Una radice multipla di ordine  $h$  corrisponde ad un punto comune ad  $h$  rami del luogo delle radici in cui risulta:

$$\begin{cases} 1 + G(s)H(s) = 0 \\ \frac{d^r}{ds^r} [G(s)H(s)] = 0 \end{cases} \quad r = 1, 2, \dots, h-1$$

**Proprietà 5** - In corrispondenza di una radice multipla di ordine  $h$  il luogo presenta  $h$  rami entranti ed  $h$  rami uscenti, alternati fra di loro, le cui tangenti dividono l'angolo giro in settori uguali di  $\frac{\pi}{h}$  radianti.



**Proprietà 6** - gli asintoti del luogo delle radici, in numero  $n-m$ , formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa:

$$\sigma_a = \frac{1}{n-m} \left[ \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right]$$

Se  $k > 0$  gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

$$\theta_i = \frac{1}{n-m} (2i+1)\pi, \quad i = 0, 1, \dots, n-m-1$$

Se  $k < 0$

$$\theta_i = \frac{1}{n-m} 2i\pi, \quad i = 0, 1, \dots, n-m-1$$

Proprietà 7 - Per  $k > 0$  l'angolo secondo il quale il luogo delle radici lascia un polo  $p_i$  è:

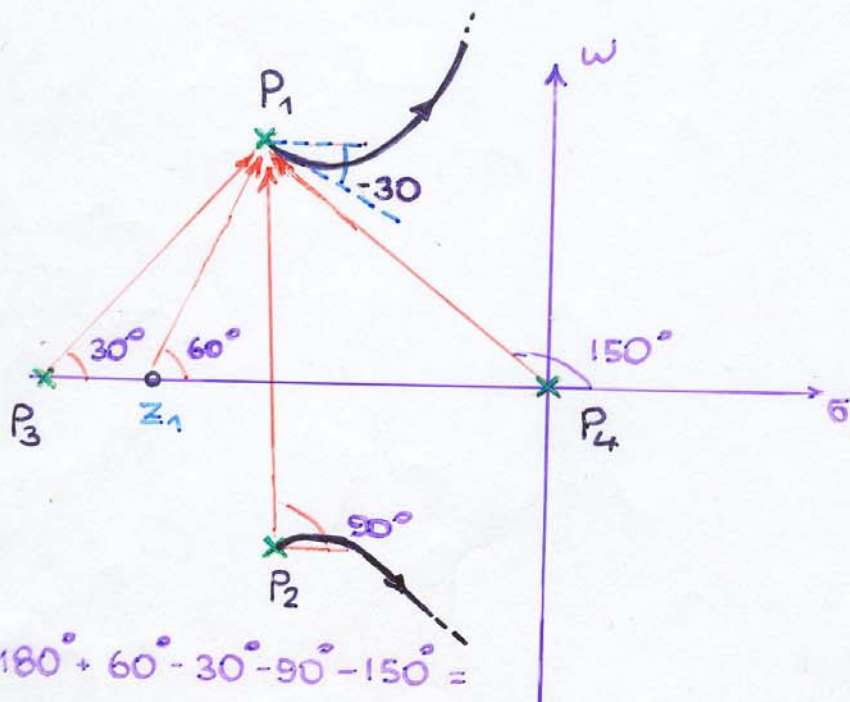
$$(2\nu + 1)\pi + \sum_{j=1}^m \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \in \mathcal{N}} \arg(p_i - p_j)$$

con  $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, (i-1), (i+1), \dots, n\}$ , l'angolo secondo cui il luogo tende ad un zero  $z_i$  è

$$(2\nu + 1)\pi - \sum_{j \in \mathcal{M}} \arg(z_i - z_j) + \sum_{j=1}^m \arg(z_i - p_j)$$

con  $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, (i-1), (i+1), \dots, m\}$

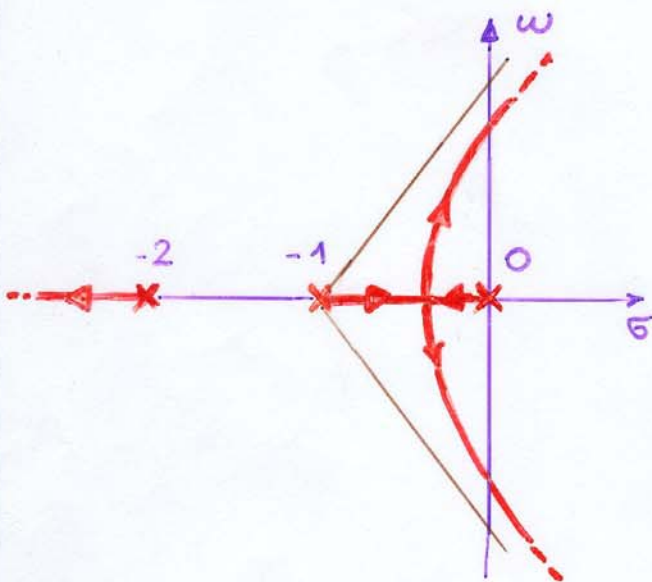
Se  $k < 0$  nell'enunciato si sostituisce  $(2\nu + 1)\pi$  con  $2\nu\pi$ ,  $\nu$  intero.



$$180^\circ + 60^\circ - 30^\circ - 90^\circ - 150^\circ = -30^\circ \quad (\text{in } p_1)$$

**Esempio**  $G(s)H(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$ ,  $k > 0$

- $n - m = 3$       3 asintoti che s'incontrano nell'ascissa  $\sigma_a = \frac{0-1-2}{3} = -1$  (ordinata nulla)
- Angoli degli asintoti con l'asse reale  
 $\theta_1 = \frac{1}{3} \pi$  ,  $\theta_2 = \frac{3}{3} \pi$        $\theta_3 = \frac{5}{3} \pi$
- Porzioni dell'asse reale appartenenti al luogo delle radici:  $\sigma \leq -2$  ,  $-1 \leq \sigma \leq 0$



Il punto di diramazione (di emergenza) sull'asse reale si ottiene da

$$1 + \frac{k}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

$$s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0 \quad \text{derivando}$$

$$3s^2 + 6s + 2 = 0 \rightarrow s_1 = -1.58 \text{ non appartiene al luogo}$$

$$s_2 = -0.422 \text{ punto di diramazione}$$

Il corrispondente valore di  $k$  risulta

$$k = 0.422(-0.422+1)(-0.422+2) = 0.385$$

• Intersezioni con l'asse immaginario

Applicando Routh all'equazione caratteristica

$$s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & \frac{6-k}{3} & 0 \\ 0 & k & \end{array}$$

per  $k=6$  si annulla la  
riga 1

L'equazione ausiliaria è  $3s^2 + 6 = 0$   
che ha come radici  $s_{1,2} = \pm j\sqrt{2}$

Vedendo calcolare le intersezioni del luogo con  
la retta verticale  $\sigma = -0.2$  occorre sostituire  
nell'equazione caratteristica  $z = s + 0.2$ :

$$z^3 + 2.4z^2 + 0.92z - 0.288 + k = 0$$

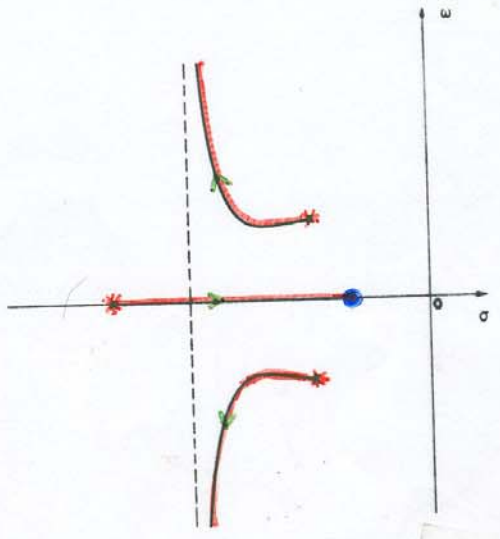
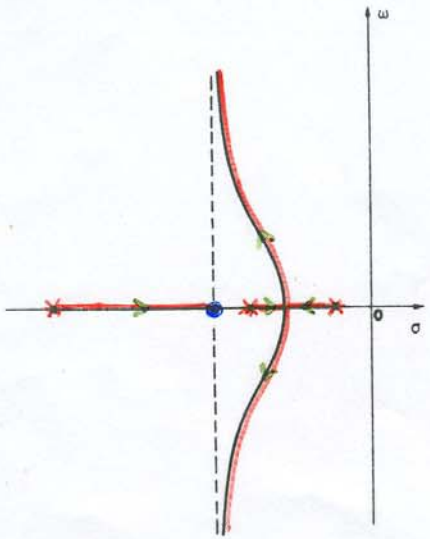
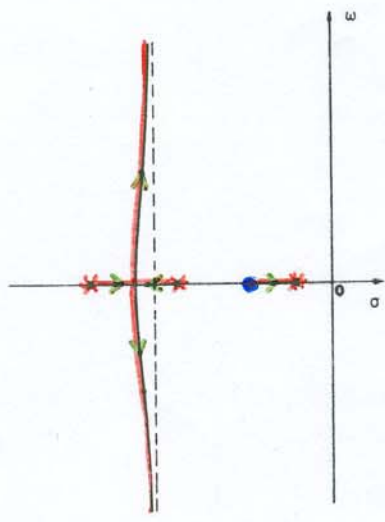
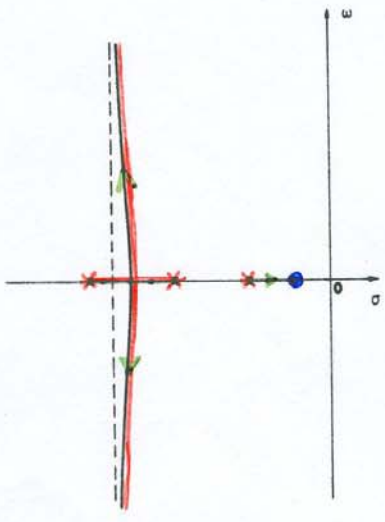
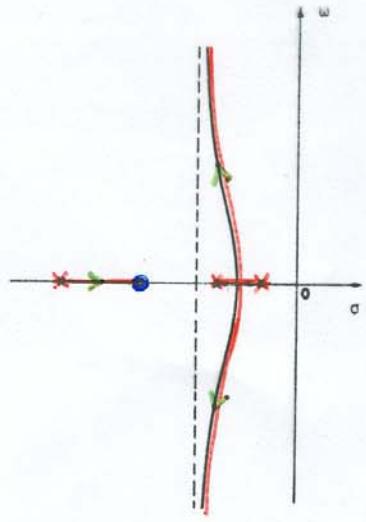
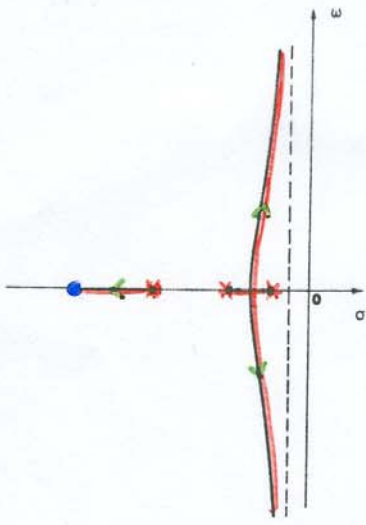
ed applicare Routh

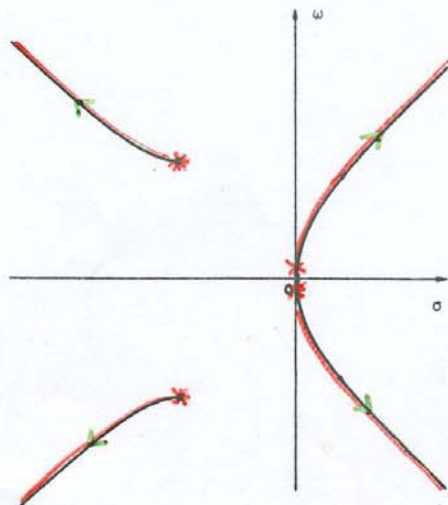
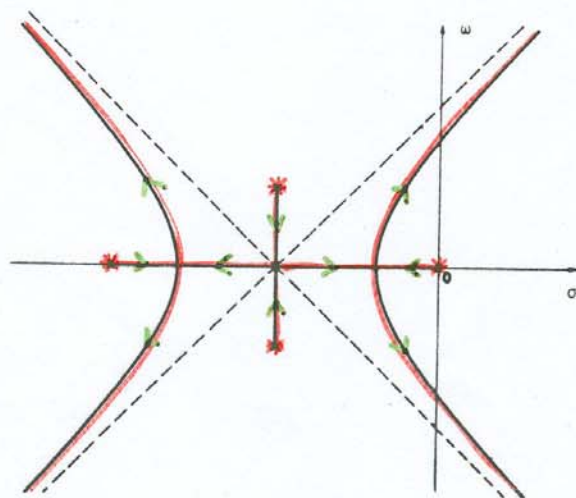
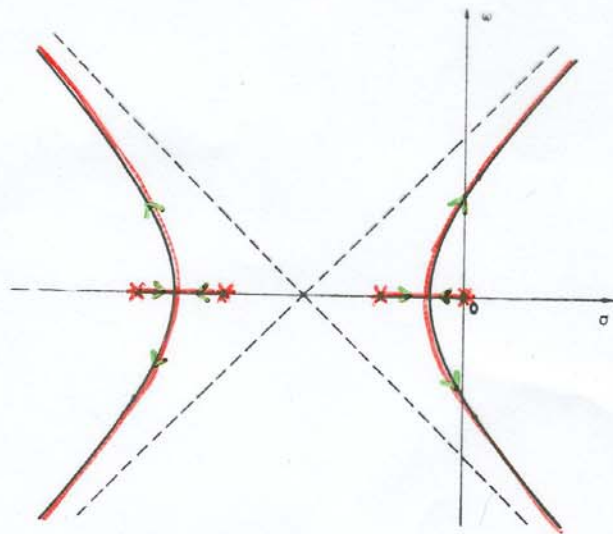
$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 0.92 \\ 2 & 2.4 & -0.288+k \\ 1 & 2.208-k+0.288 & \\ 0 & -0.288+k & \end{array}$$

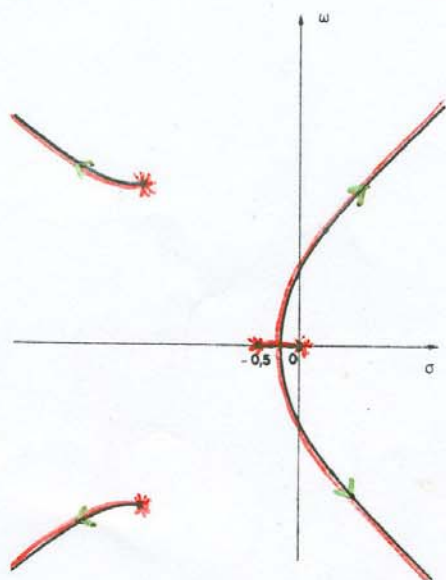
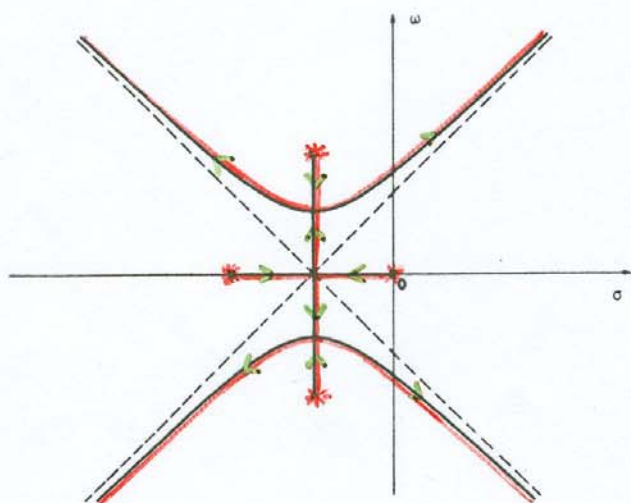
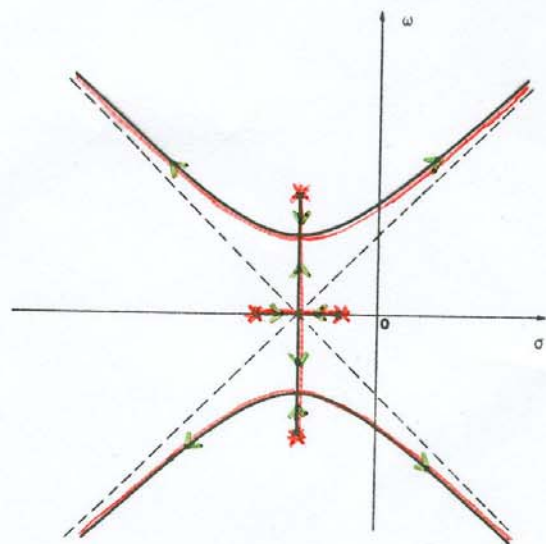
$$\rightarrow k = 2.496$$

$$s_{1,2} = \pm j0.96$$

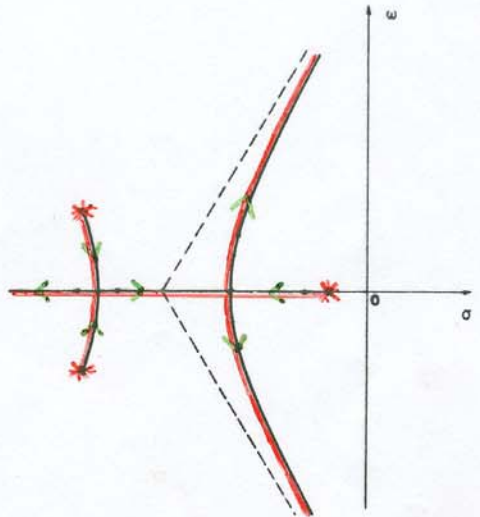
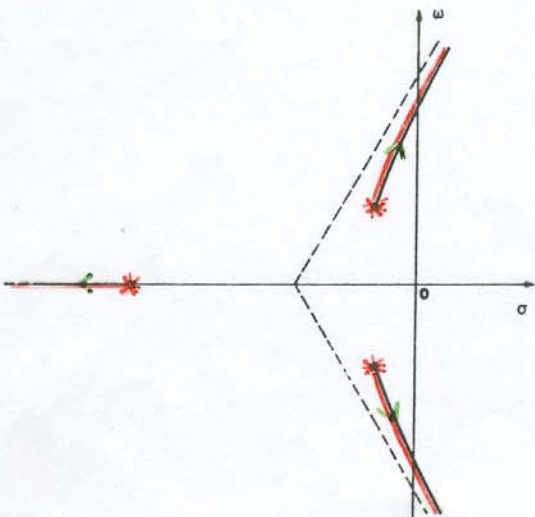
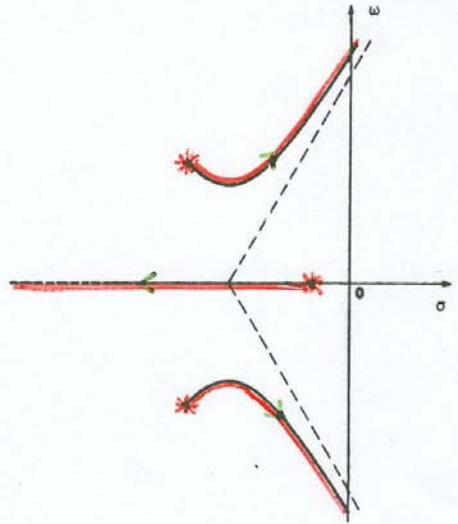
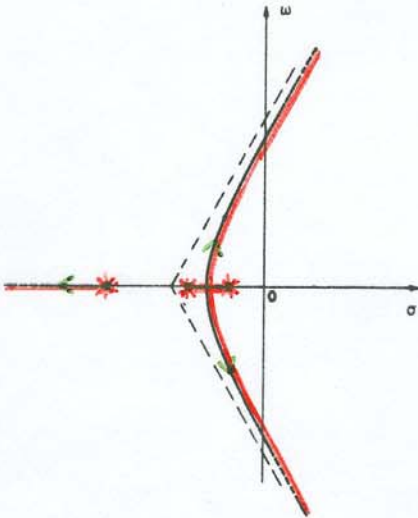
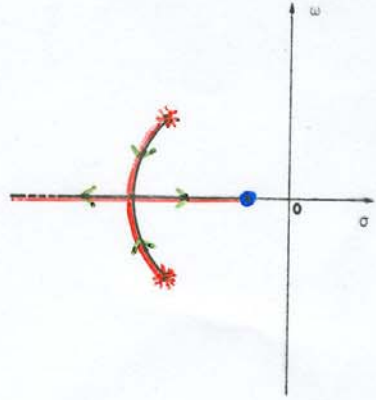
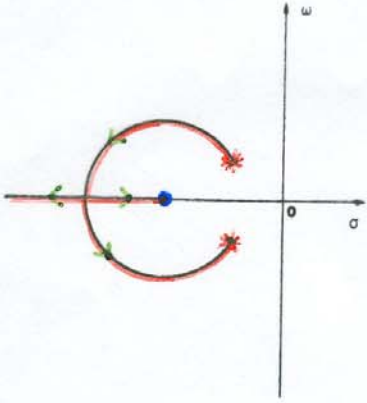
Il luogo passa per i punti  $-0.2 \pm j0.96$

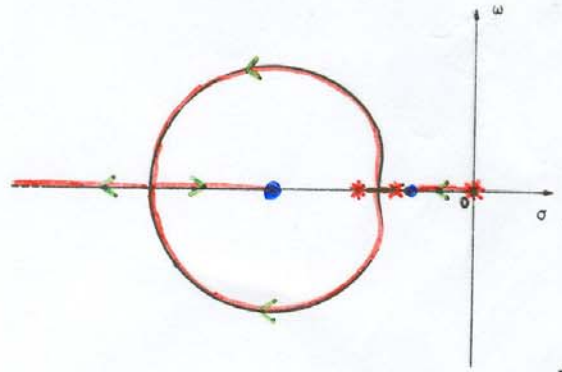
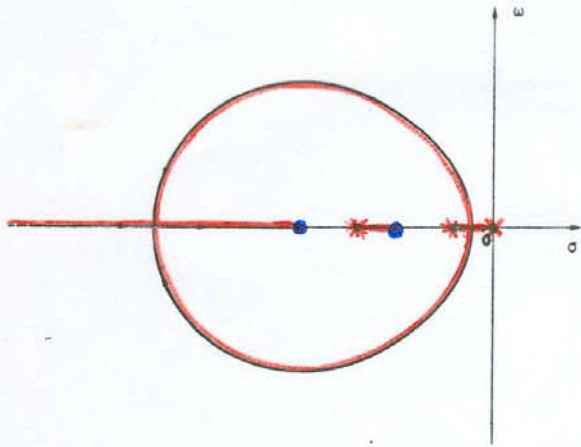




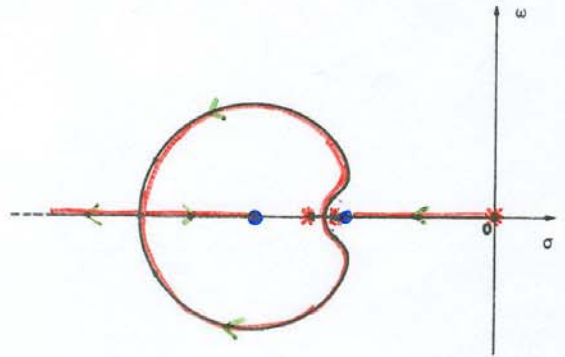
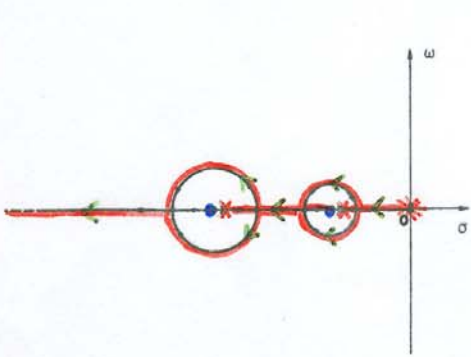




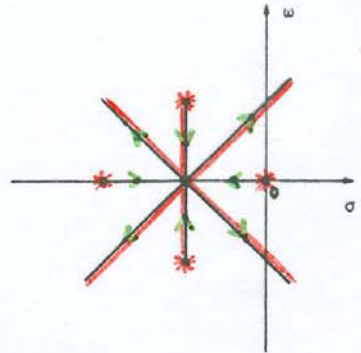
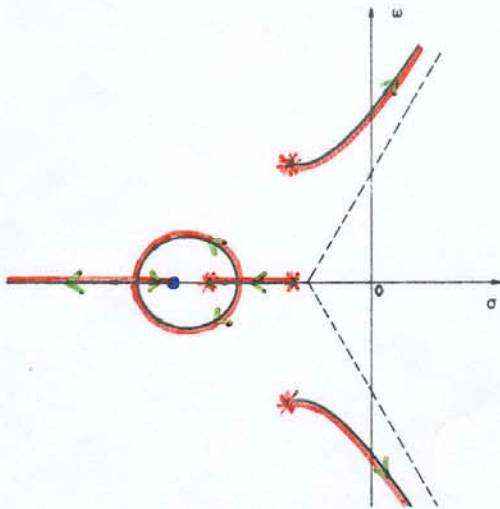




n.)



r



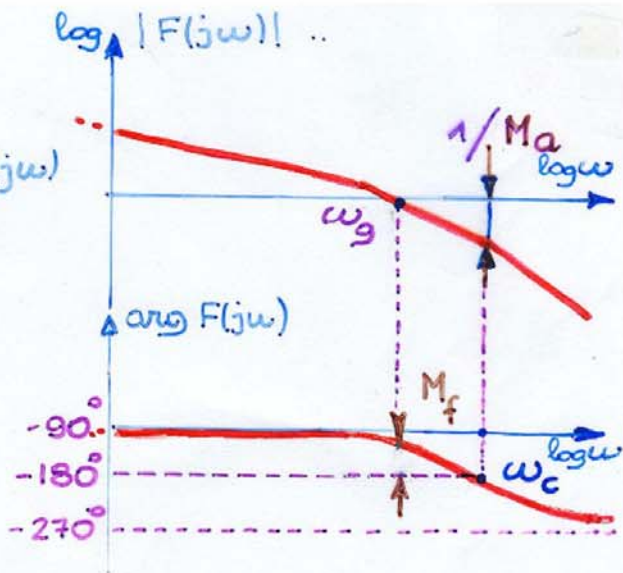
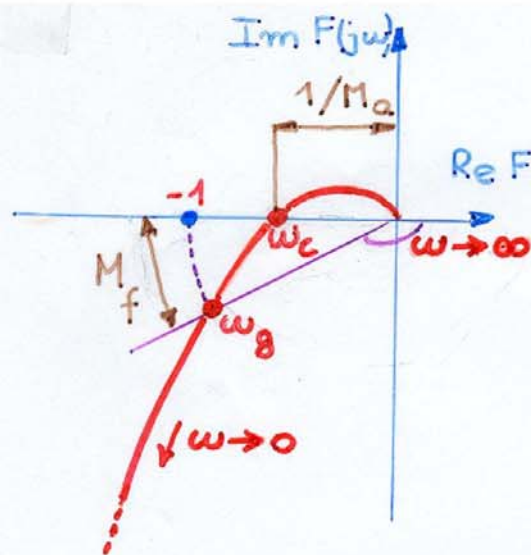
## Margine di fase e margine di ampiezza:

La vicinanza del diagramma di Nyquist di un sistema stabile ad anello aperto al punto critico è normalmente associata ad un comportamento dinamico non soddisfacente ad anello chiuso.

Tale avvicinamento, ottenuto aumentando ad esempio il guadagno statico di anello, porta due poli complessi coniugati vicini alla frontiera di stabilità (asse immaginario) a spostarsi nel semipiano destro quando il diagramma circonda il punto critico.

Questi poli (**poli dominanti**) sono quelli che più influenzano il sistema in retroazione: i poli rimanenti, più lontani dall'asse immaginario, danno luogo a termini nel transitorio che si estinguono più rapidamente.

Molti sistemi in retroazione anche di ordine elevato hanno un comportamento dinamico simile a quello di un sistema del 2° ordine.



## Margine di ampiezza $M_a$

è l'inverso del guadagno di anello alla pulsazione  $\omega_c$  cui corrisponde una fase di  $-\pi$ . Normalmente è dato in db.

## Margine di fase $M_f$

è l'angolo che occorre sottrarre alla fase del guadagno di anello alla pulsazione cui corrisponde un modulo unitario per ottenere  $-\pi$ .



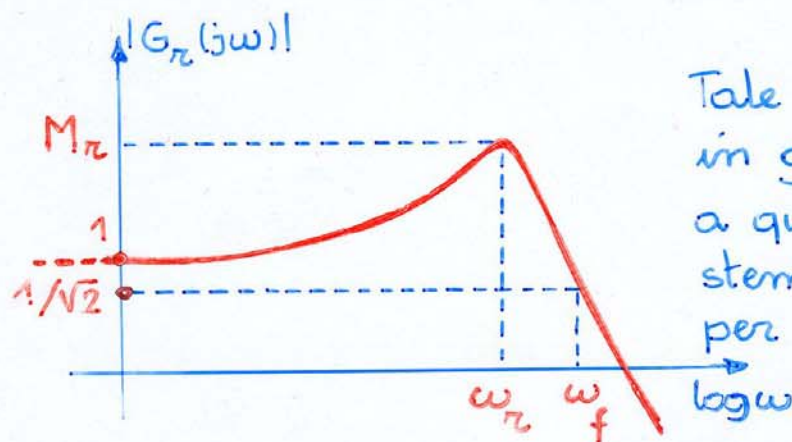
Valori tipici per un buon comportamento di un sistema in retroazione sono:

$$M_a = 4 \div 6 \quad (12 \div 16 \text{ db})$$

$$M_f = 45^\circ \div 60^\circ$$

## Ulteriori specifiche nel dominio delle frequenze

Si fa riferimento ad un sistema retroazionato con modulo della risposta armonica del tipo:



Tale diagramma è in genere analogo a quello di un sistema del 2° ordine per la presenza di una coppia di poli dominanti complessi coniugati

**Pulsazione di risonanza  $\omega_r$**

pulsazione in corrispondenza della quale il modulo della risposta frequenziale è massimo

**Picco di risonanza  $M_r$**

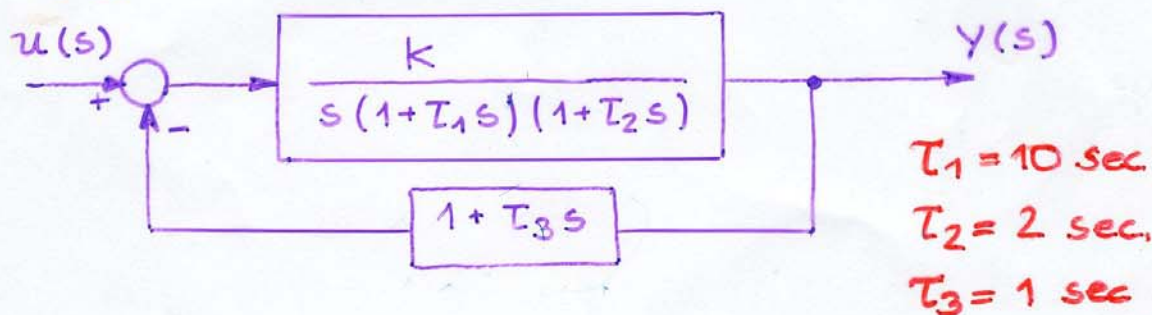
rapporto tra il modulo massimo di  $|G_r(j\omega)|$  ed il valore statico  $|G_r(j\omega)|_{\omega=0} = G_0$

**Larghezza di banda  $\omega_f$**

pulsazione alla quale il modulo  $|G_r(j\omega)|$  è inferiore di 3 dB (corrispondente al rapporto  $1/\sqrt{2}$ ) rispetto al valore statico  $G_0$

## Esercizio

Per il sistema in retroazione:



- 1) Si determini il campo di valori di  $k$  ( $\text{sec}^{-1}$ ) corrispondenti alla stabilità del sistema

$$1 + \frac{k(1+s)}{s(1+10s)(1+2s)} = 0$$

$$20s^3 + 12s^2 + s + ks + k = 0$$

3	20	1+k
2	12	k
1	12-8k	0
0	k	

$$12 - 8k \geq 0$$

$$k \leq \frac{12}{8} = 1.5$$

$$k \geq 0$$

- 2) Si determini il valore di  $k$  per cui l'errore  $e = u - y$  a regime vale 2 quando l'ingresso è una rampa unitaria ( $\gamma = 1$ )

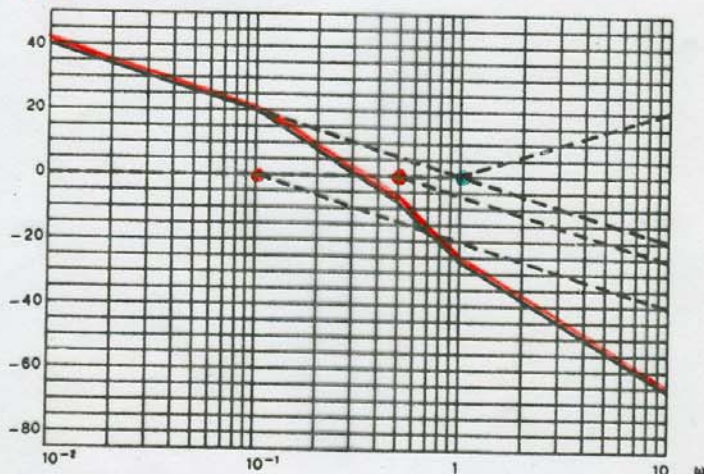
$$G_E = \frac{k}{s(1+T_1s)(1+T_2s)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k(1+T_3s-1)}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}} = \frac{k}{s(1+T_1s)(1+T_2s) + kT_3s}$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_E(s) = \frac{K}{1 + K T_3}$$

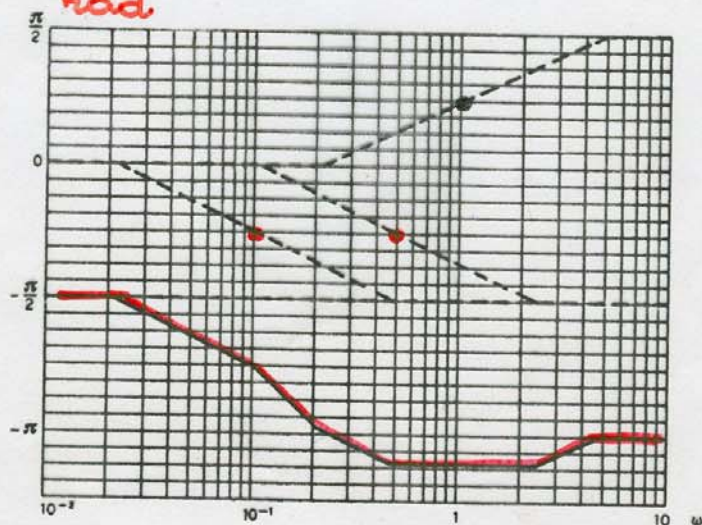
$$e_{r2} = \frac{1}{K_v} = \frac{1 + K T_3}{K} = 2 \rightarrow K = 1 \text{ sec}^{-1}$$

3) Si traccino i diagrammi di Bode (amplitude e fasi) del guadagno di anello per il valore di K precedentemente calcolato

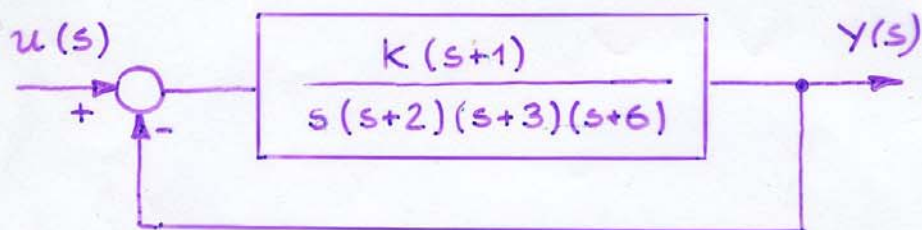
db



rad



## Esercizio



Per tale sistema:

- 1) Si determini il valore di  $k$  corrispondente ad un errore a regime in risposta ad una rampa unitaria pari a 0.5

$$e_r = \frac{1}{k_v} = 0.5$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = \frac{k(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+6)} = \frac{k}{36}$$

$$k = 72$$

- 2) Si determini il campo di stabilità in  $k$

$$\frac{k(s+1)}{s(s+2)(s+3)(s+6)} + 1 = 0$$

$$k(s+1) + (s^2+2s)(s^2+9s+18) = 0$$

$$s^4 + 11s^3 + 36s^2 + (36+k)s + k = 0$$



Applicando Routh :

4	1	36	k
3	11	36+k	0
2	360-k	11k	
1	$-k^2 + 203k + 12960$	0	
0	11k		

$$-k^2 + 203k + 12960 \approx -(k-254)(k+51)$$

Deve risultare :



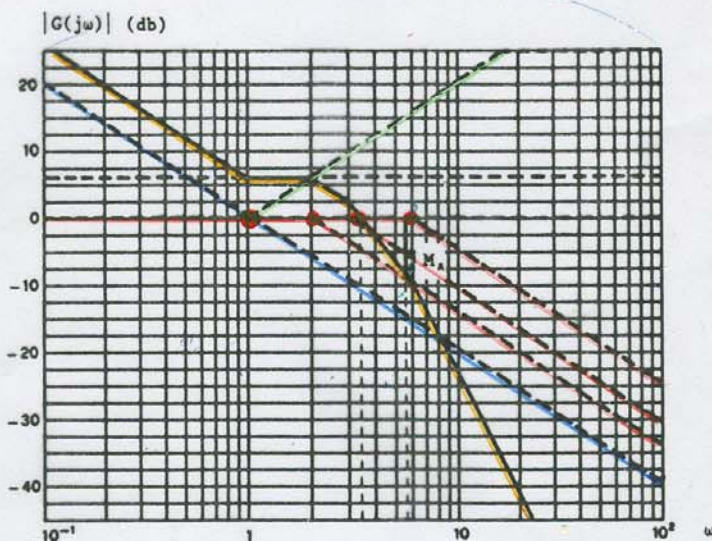
$$11k \geq 0 \quad k \geq 0$$

$$-k^2 + 203k + 12960 \geq 0 \quad k \leq 254$$

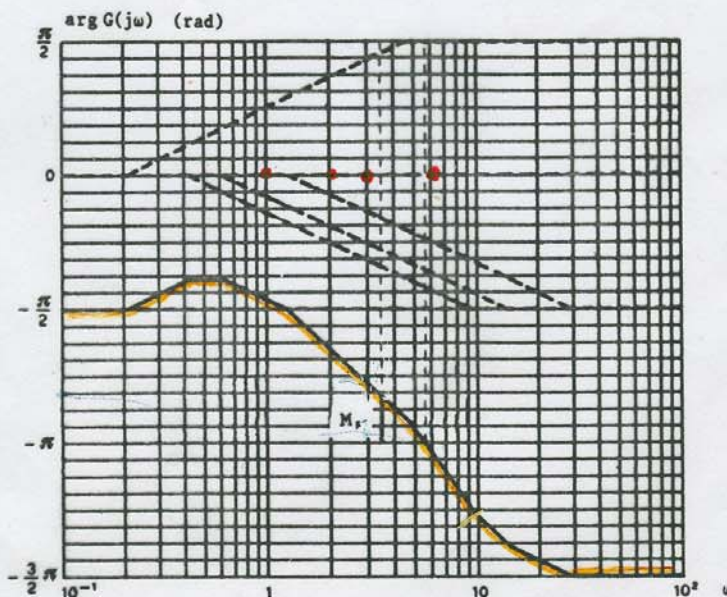
$$k \geq -51$$

$$0 \leq k \leq 254$$

3) Per  $k = 72 \text{ sec}$  si determinino i due  
 grammi di Bode (ampiezze e fasi) e  
 su di essi si determinano i margini di  
 ampiezza e di fase.



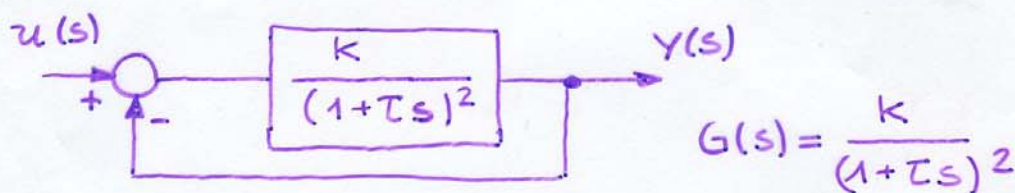
$$M_a = 8 \text{ db}$$



$$M_f = 30^\circ$$

## Esercizio

Per il sistema in retroazione unitaria



si determini il valore di  $K$  corrispondente a un margine di fase  $M_f = \frac{\pi}{4}$  e per tale valore di  $K$  si calcoli la massima sovralongazione nella risposta al gradino.

## Soluzione

$$\arg G(j\omega) = -2 \arg(1 + Tj\omega) = -135^\circ$$

$$\omega_0 T = \tan 67^\circ 30' = 2.41$$

$$|G(j\omega)|_{\omega=\omega_0} = \frac{K}{1 + \omega_0^2 T^2} = 1 \quad K = 6.83$$

$$\frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{K}{K+1}}{\frac{T^2}{K+1} s^2 + \frac{T}{K+1} 2s + 1}$$

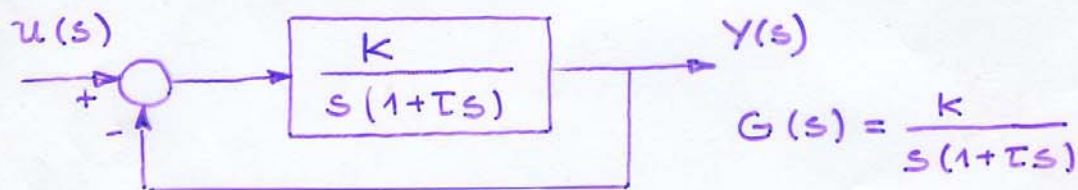
$$\omega_m^2 = \frac{K+1}{T^2}$$

$$\frac{\delta}{\omega_m} = \frac{T}{K+1} \quad \delta = \frac{T}{K+1} \cdot \frac{\sqrt{K+1}}{T} = \frac{1}{\sqrt{K+1}} = 0.36$$

Dal grafico ( $s\% - \delta$ ) si ricava  $s\% = 30\%$

## Esercizio

Per il sistema in retroazione unitaria



si determini il valore di  $K$  corrispondente ad un margine di fase  $M_f = \frac{\pi}{4}$  e per tale valore si determini la massima sovraelongazione nella risposta al gradino

## Soluzione

- La pulsazione alla quale  $\arg G(j\omega) = -\frac{3}{4}\pi$  è  $\omega_0 = \frac{1}{T}$ . A tale pulsazione

$$|G(j\omega)|_{\omega=\omega_0} = \frac{K}{\frac{1}{T} \cdot \sqrt{2}}$$

e tale modulo deve valere 1, da cui

$$K = \sqrt{2}/T$$

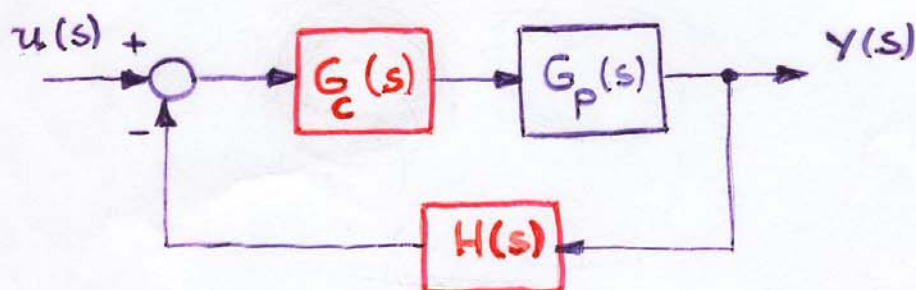
- Risulta  $\frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{Ts^2 + s + K} = \frac{1}{\frac{T}{K}s^2 + \frac{1}{K}s + 1}$

$$\omega_m^2 = \frac{K}{T}$$

$$2\zeta/\omega_m = \frac{1}{K} \quad \zeta = \frac{\omega_m}{2K} = \frac{1}{2\sqrt{KT}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.420$$

Dal grafico ( $s\% - \zeta$ ) risulta  $s\% = 24$

# Progettazione di dispositivi per la correzione della risposta.



Tali dispositivi ( $G_c(s)$ ) sono usualmente chiamati **reti correttive**, poiché molto spesso la correzione viene realizzata con circuiti elettrici.

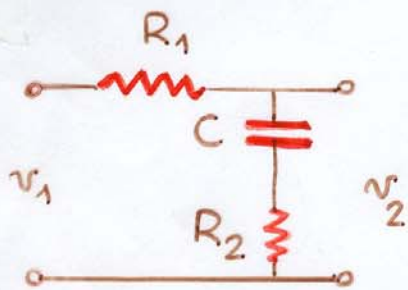
## Dati di specifica

- **precisione**: riguardante gli errori a regime per ingressi tipici, disturbi e variazioni dei parametri.
- **stabilità**: intesa come comportamento dinamico soddisfacente, caratterizzato da parametri come la massima sovraelongazione nella risposta al gradino, picco di risonanza, margini di fase e di ampiezza, coefficiente di smorzamento dei poli dominanti.

• velocità di risposta: caratterizzata dal tempo di ritardo, tempo di salita, tempo di assestamento, larghezza di banda

Mentre per la precisione si agisce sul guadagno statico o si introduce un polo nell'origine, per la stabilità e la velocità di risposta si agisce sui poli e sugli zeri del sistema di correzione.

# Rete ritardatrice (phase lag)

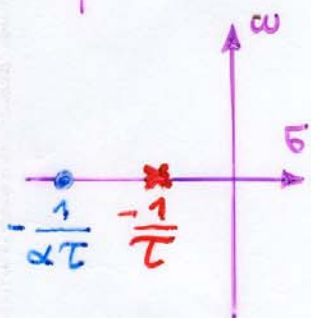
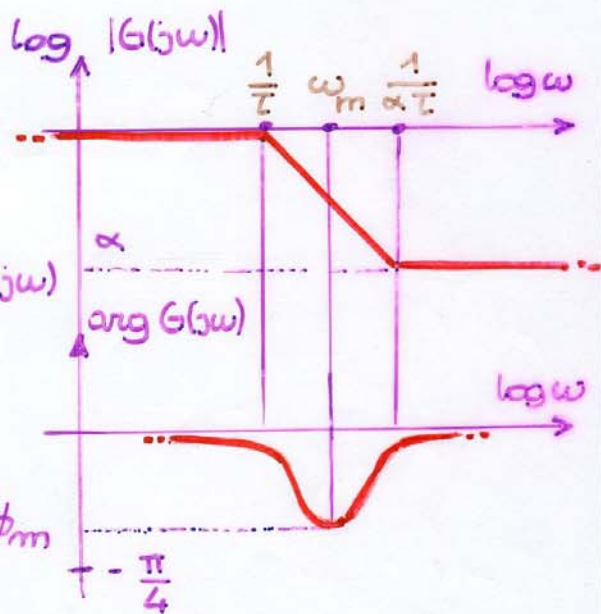
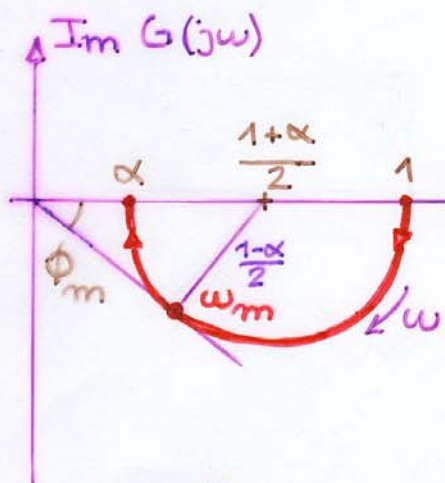


$$\frac{v_2(s)}{v_1(s)} = \frac{1 + R_2 C s}{1 + (R_1 + R_2) C s} =$$

$$= \frac{1 + \alpha T s}{1 + T s} = G(s)$$

$$T = (R_1 + R_2) C$$

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$$



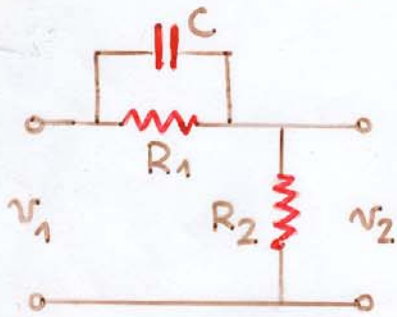
$$\phi_m = -\arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

$$\arg G(j\omega) = \arctg \alpha \omega T - \arctg \omega T$$

$$\left. \frac{d}{d\omega} \arg G(j\omega) \right|_{\omega=\omega_m} = \frac{\alpha T}{1 + \alpha^2 \omega_m^2 T^2} - \frac{T}{1 + \omega_m^2 T^2} = 0 \quad \text{da cui}$$

$$\omega_m^2 = 1/\alpha T^2 \quad \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

# Rete anticipatrice (phase lead)

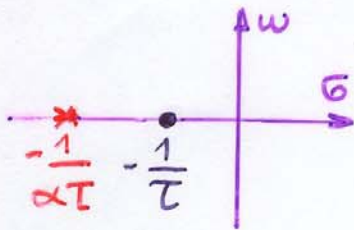
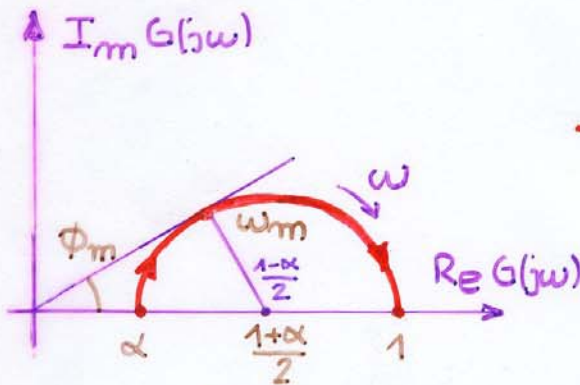
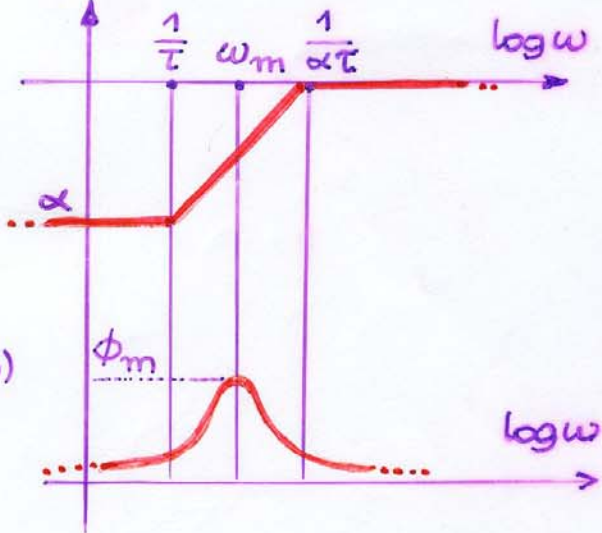


$$\frac{v_2(s)}{v_1(s)} = \frac{R_2(1 + R_1 C s)}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 C s} = \alpha \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} = G(s)$$

$$\tau = R_1 C$$

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$$

$\log |G(j\omega)|$

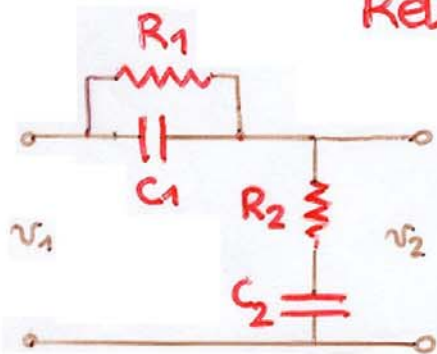


$$\begin{cases} \phi_m = \arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \\ \omega_m = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}} \end{cases}$$

(media geometrica di  $\frac{1}{\tau}$  e  $\frac{1}{\alpha \tau}$ )



# Rete a ritardo e anticipo



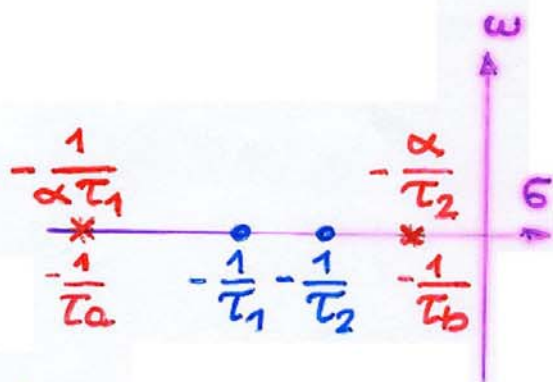
$$\begin{aligned} \frac{v_2(s)}{v_1(s)} &= \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + \tau_{12} s} \\ &= \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \tau_a s)(1 + \tau_b s)} \\ &= \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \alpha \tau_1 s)(1 + \frac{\tau_2}{\alpha} s)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \tau_1 = R_1 C_1 \\ \tau_2 = R_2 C_2 \end{cases} \quad \tau_{12} = R_1 C_2$$

$$\begin{cases} \tau_1 \tau_2 = \tau_a \tau_b \\ \tau_1 + \tau_2 + \tau_{12} = \tau_a + \tau_b \end{cases}$$

$$\tau_1 < \tau_2 \quad \tau_a < \tau_b$$

$$\frac{\tau_a}{\tau_1} = \frac{\tau_2}{\tau_b} = \alpha < 1$$



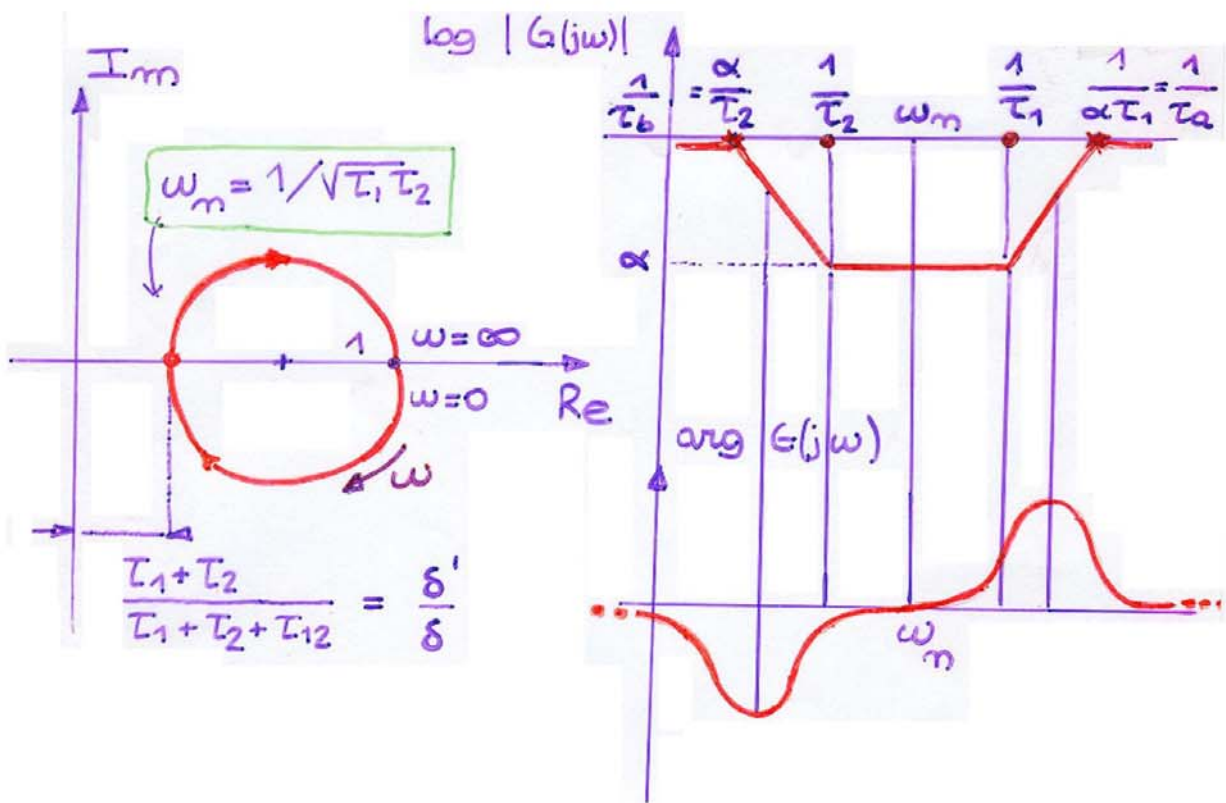
la distanza tra i poli è maggiore della distanza degli zeri

$$G(s) = \frac{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2) s + 1}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}) s + 1} = \frac{\frac{s^2}{\omega_m^2} + \frac{2\delta'}{\omega_m} s + 1}{\frac{s^2}{\omega_m^2} + \frac{2\delta}{\omega_m} s + 1}$$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$$

$$\delta' = \frac{1}{2} \frac{\tau_1 + \tau_2}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} > 1$$

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} > \delta' > 1$$



$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}{(1+\alpha T_1 s)(1+\frac{T_2}{\alpha} s)} \\
 &= \frac{\frac{s^2}{\omega_m^2} + \frac{2\delta'}{\omega_m} s + 1}{\frac{s^2}{\omega_m^2} + \frac{2\delta}{\omega_m} s + 1}
 \end{aligned}$$

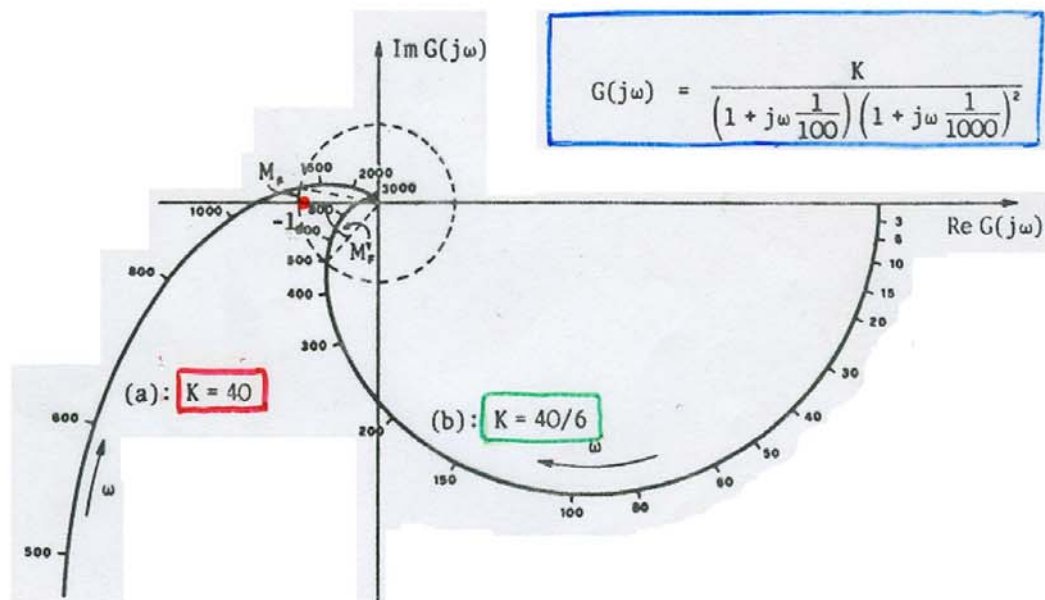
## Criteri di correzione

- lo studio è fatto sui diagrammi di Bode della risposta armonica di anello per soddisfare i dati di specifica (errori a regime, margine di fase e di ampiezza)
- nei sistemi a fase minima la fase in corrispondenza dell'intersezione del diagramma delle ampiezze con l'asse a 0 db (guadagno unitario) dipende principalmente dalla pendenza, nel punto di intersezione, di tale diagramma. (formula di Bode)
- Se l'intersezione avviene con pendenza  $-1$  e tale pendenza si conserva per un intervallo sufficientemente ampio intorno alla frequenza di intersezione, la stabilità del sistema è assicurata con un buon margine di fase.

$$M_a = 4 \div 6 \quad (12 \div 16 \text{ db})$$

$$M_f = 45^\circ \div 60^\circ$$

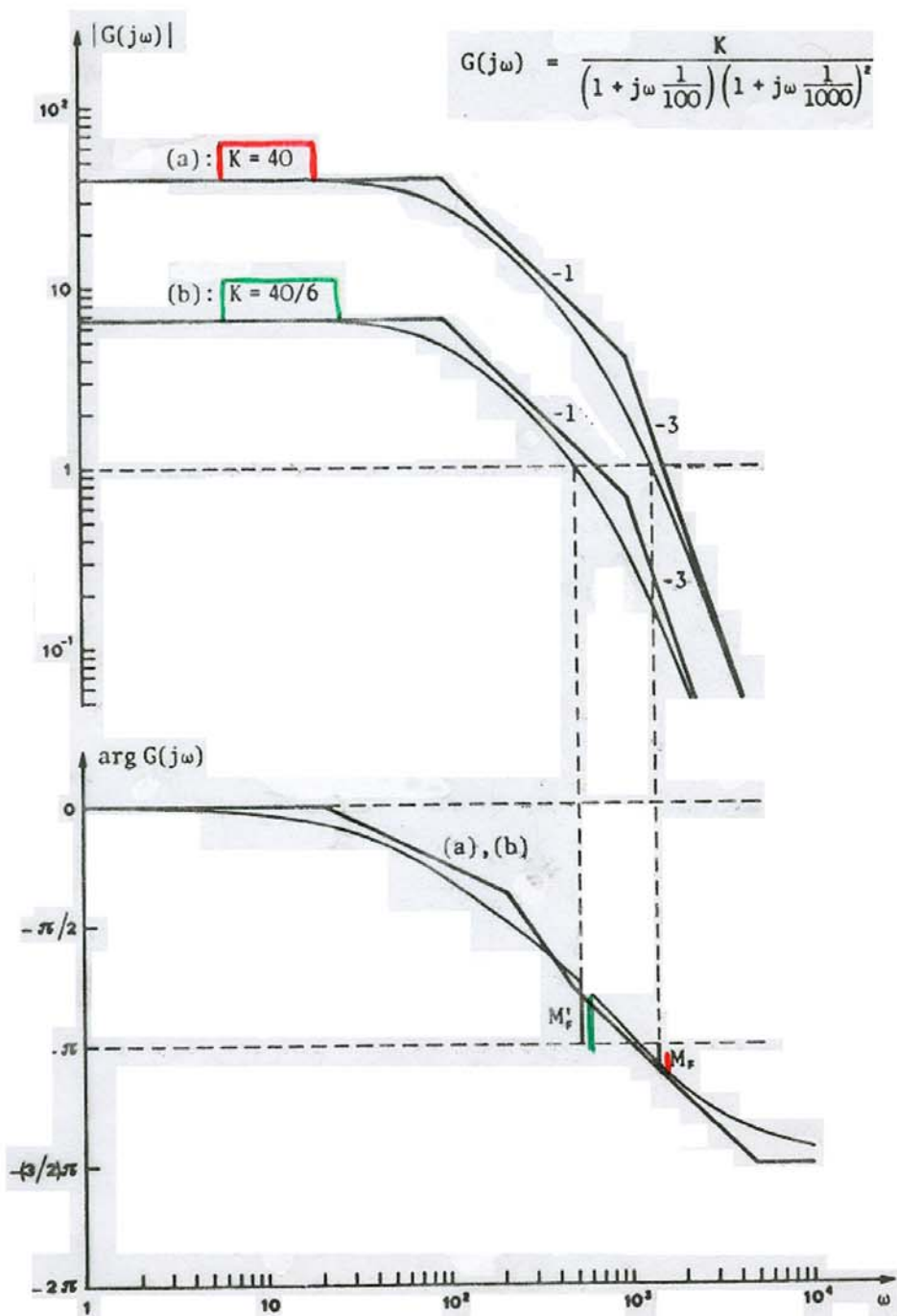
Nei sistemi di tipo 0 e 1 la stabilità si può sempre ottenere diminuendo la costante di guadagno, come si vede nell'esempio



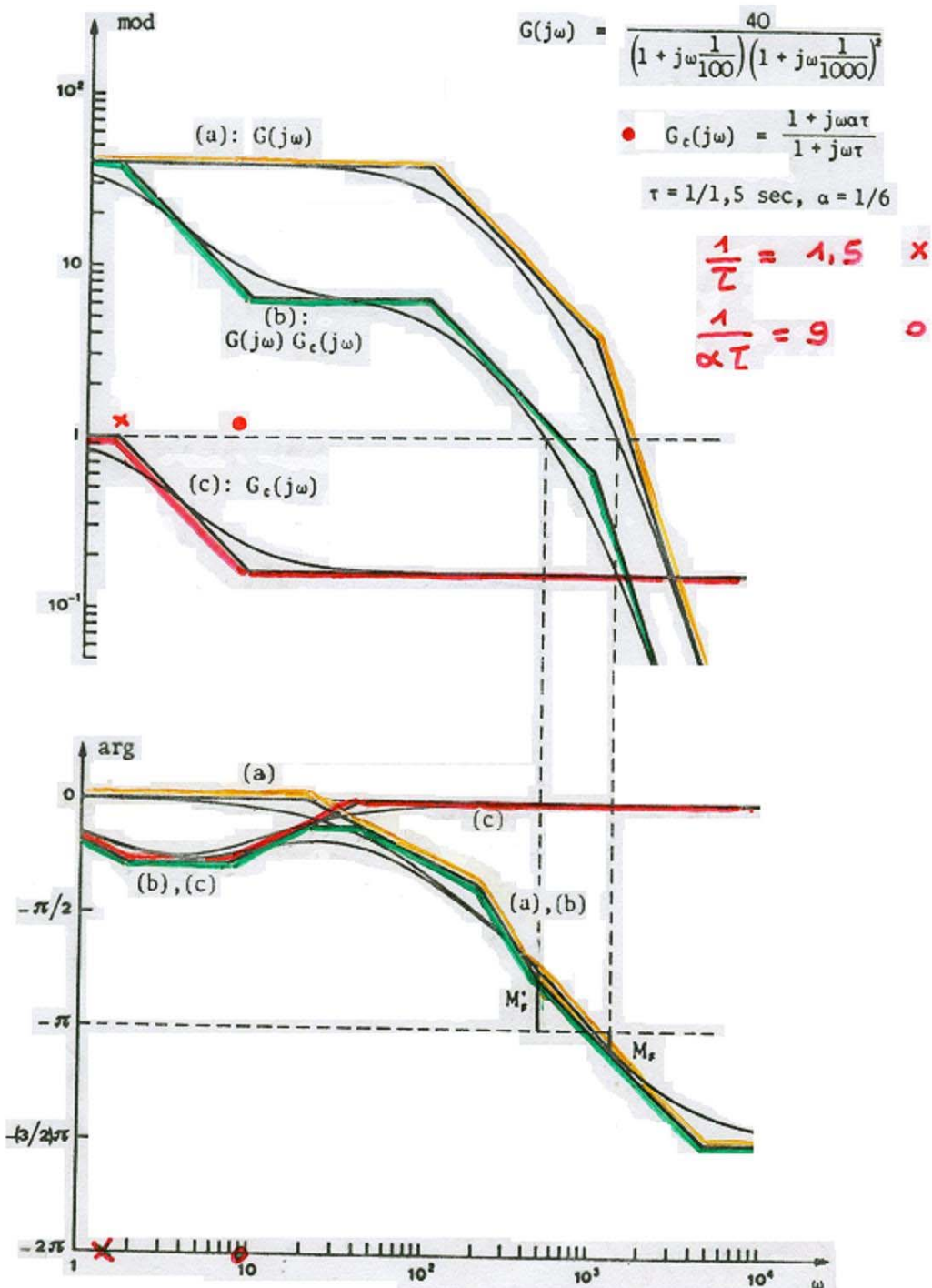
Una tale correzione :

- peggiora la prontezza del sistema
- peggiora la insensibilità ai disturbi
- può dare luogo ad errori a regime non soddisfacenti

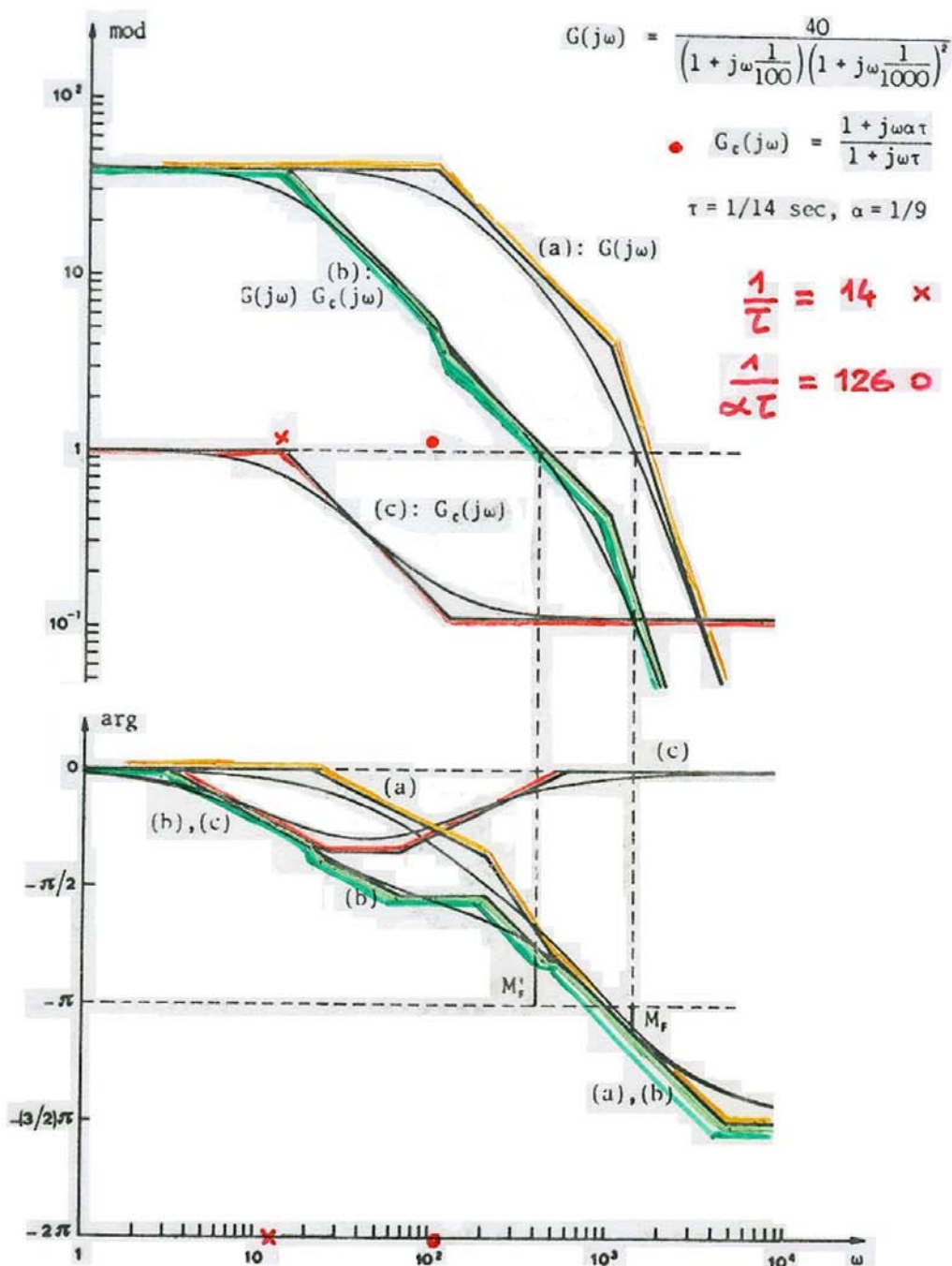
# Stabilizzazione con riduzione del guadagno



# Compensazione con rete ritardatrice

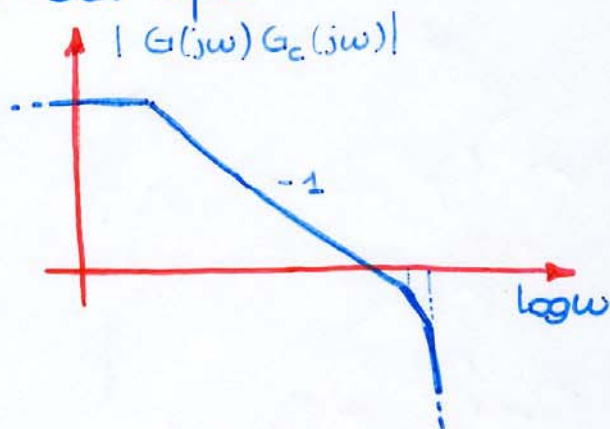
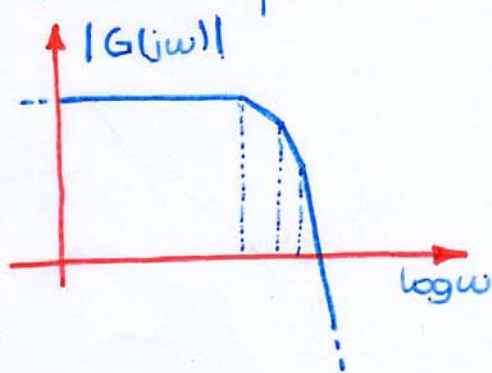


# Compensazione con rete ritardatrice (con valore di $\tau$ inferiore)



## La rete ritardatrice:

- diminuisce il guadagno del sistema alle alte frequenze
- non influisce sulla costante di guadagno e quindi sugli errori a regime
- diminuisce la larghezza di banda e quindi la prontezza di risposta del sistema
- si usa per sistemi del tipo:



Tale rete limita solo parzialmente gli inconvenienti che si avrebbero stabilizzando il sistema con una semplice riduzione del guadagno



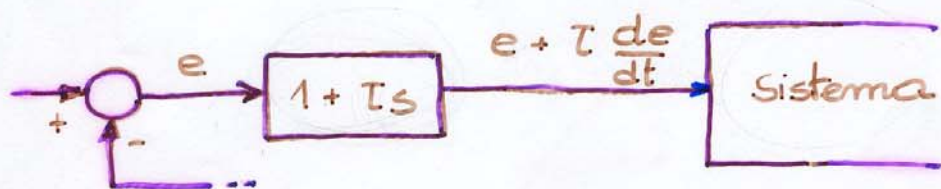
## Progetto della rete ritardatrice (specifica su $M_f$ )

- 1) Sul diagramma di Bode delle fasi si legge la pulsazione alla quale il sistema non compensato presenta il valore richiesto per  $M_f$
- 2) Si sceglie  $\omega^*$  minore del 20% della pulsazione letta
- 3) Si legge sul diagramma di Bode delle ampiezze l'attenuazione da introdurre ad  $\omega^*$  (il valore di  $\alpha$ )
- 4) Si ricava  $T$  dalla relazione

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega^*}{10}$$

# Compensazione con reti anticipatrici

L'effetto stabilizzante di tali reti è legato al termine proporzionale alla derivata dell'errore che si somma al segnale errore



L'azione dell'errore è rinforzata quando l'errore tende ad aumentare, indebolita quando tende a diminuire

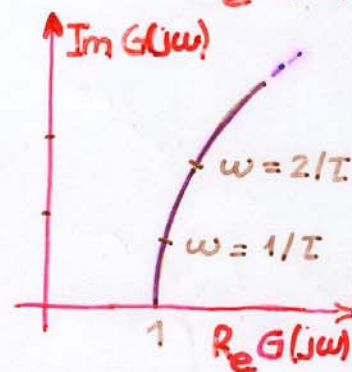
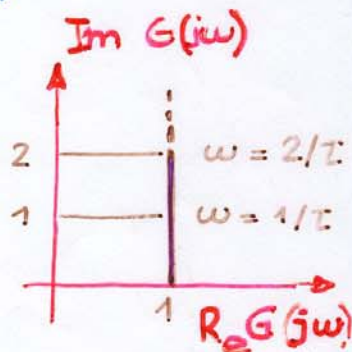
$$G(s) = 1 + Ts$$

non fisicamente realizzabile

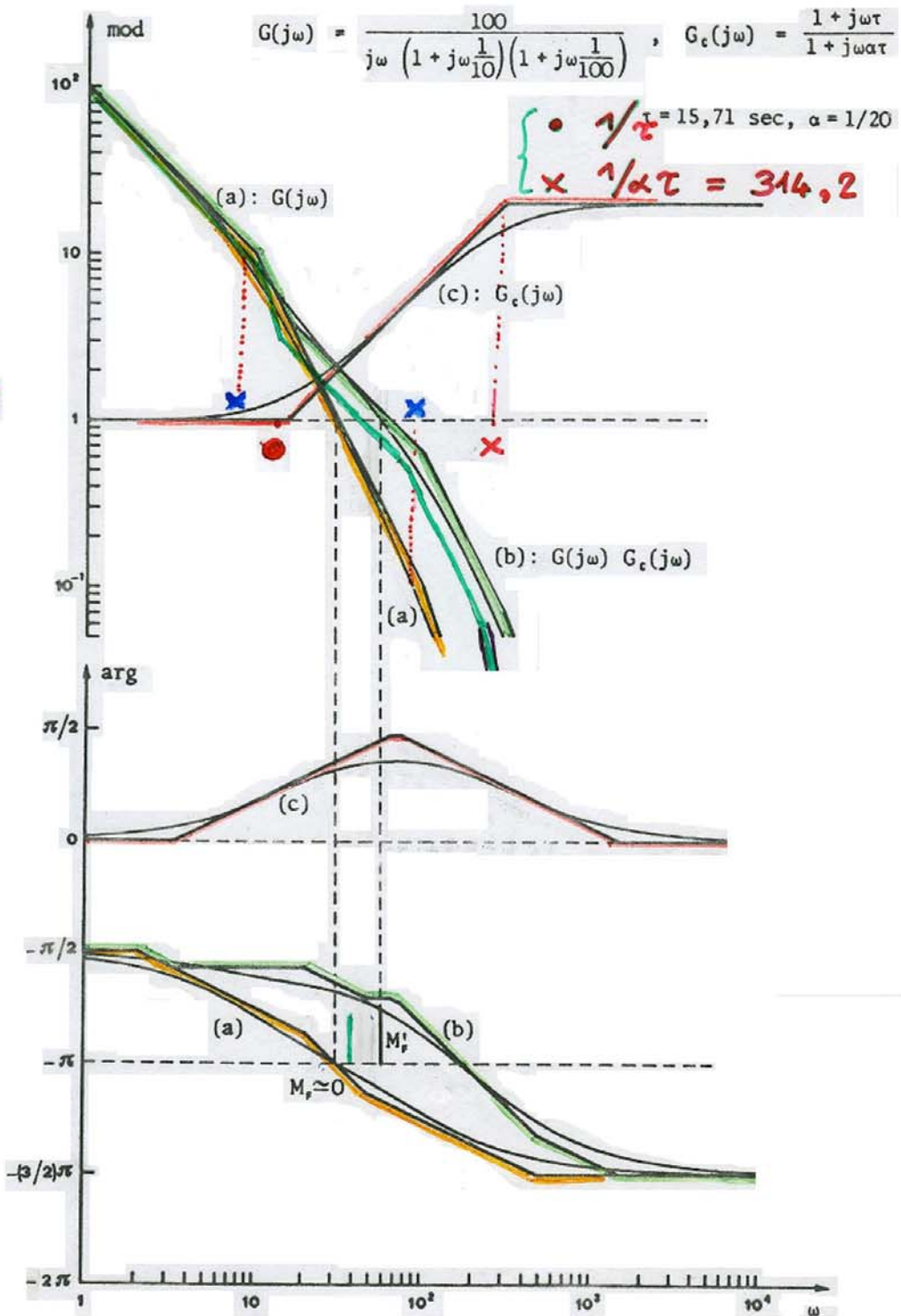
$$G(s) = \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}, \quad \alpha < 1$$

si deve introdurre un polo

(Manca il fattore di attenuazione  $\alpha$ , che può essere compensato con un opportuno aumento del guadagno dell'amplificatore a valle della rete



# Compensazione con rete anticipatrice



## La rete anticipatrice

- porta ad un aumento del margine di fase  $M_f$ .
- aumenta il guadagno alle alte frequenze, rendendo più pronto il sistema (aumento della larghezza di banda).

### Progetto della rete anticipatrice (specifica su $M_f$ )

- 1) Sul diagramma di Bode delle fasi si legge  $M_f$  del sistema non compensato e la frequenza  $\omega_c$  a cui il modulo è unitario
- 2) Si sceglie l'anticipo di fase teorico necessario a portare  $M_f$  al valore voluto
- 3) Si maggiore il valore del passo 2) e si determina così  $\phi_m$  e  $\alpha$ :
$$\alpha = \frac{1 - \sin \phi_m}{1 + \sin \phi_m} \quad \left( \phi_m = \arcsen \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)$$
- 4) se  $\alpha < 0.07$  ( $\phi_m \approx 60^\circ$ ) si utilizzano due reti in cascata
- 5) Si determina la pulsazione  $\bar{\omega}$  a cui il diagramma del modulo del sistema non

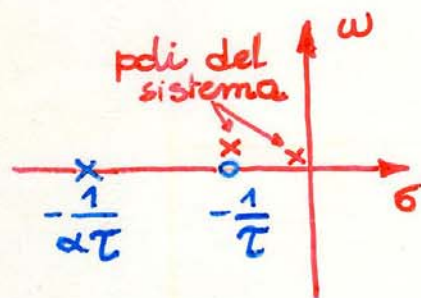
compensato vale

$$-20 \log(1/\sqrt{\alpha})$$

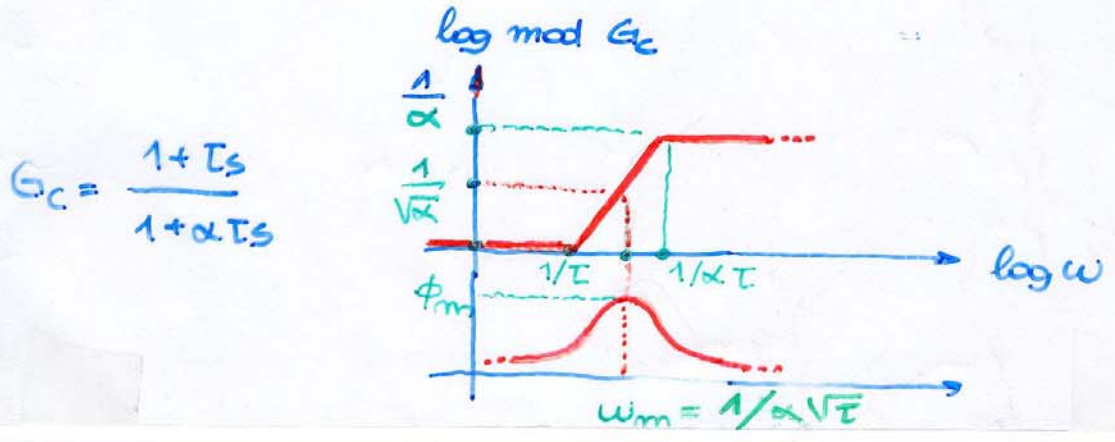
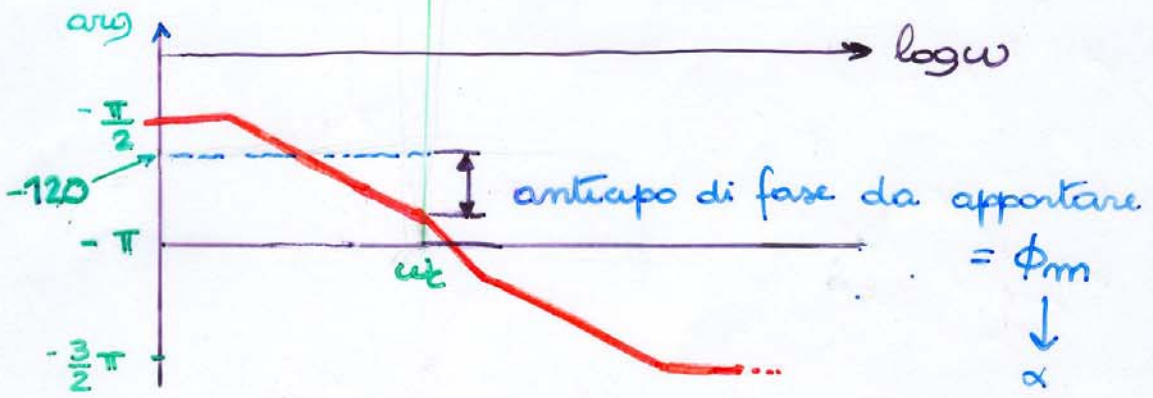
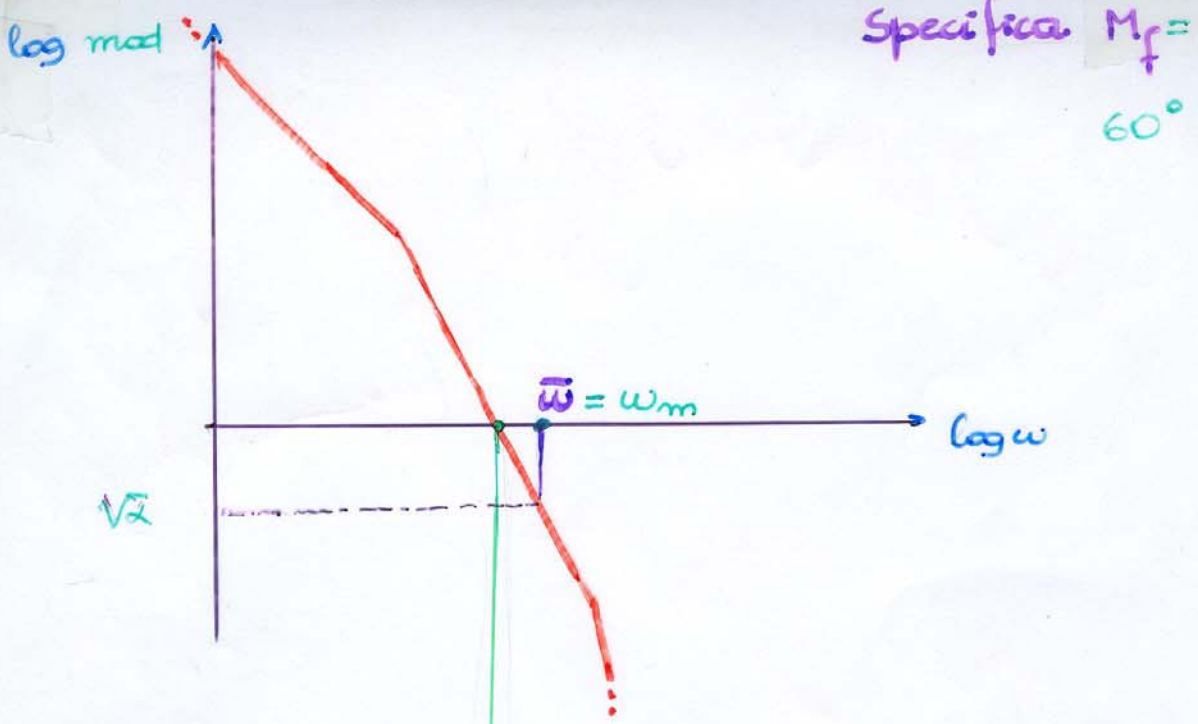
6) Si pone  $\bar{\omega} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$  e si ricava  $T$

### Cancellazione polo-zero

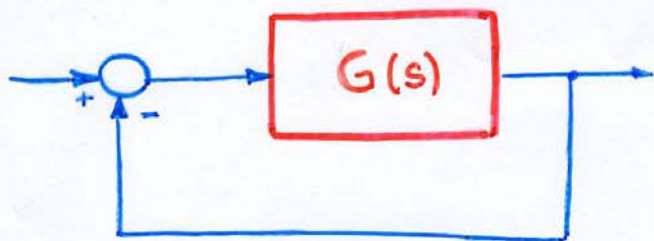
Il progetto della rete anticipatrice si semplifica scegliendo lo zero della rete in modo che cancelli il polo del sistema più vicino all'asse immaginario e non nullo



Tale compensazione risulta conveniente nei sistemi del 2° ordine



## Esempio



$$G(s) = \frac{k}{s(1+\tau s)}, \quad \tau = 1 \text{ sec}$$

Si vuole soddisfare le specifiche

- $K_v = 10 \text{ sec}^{-1}$  (costante di errore di velocità)
- $M_r = 1,3$  (picco di risonanza)

Per avere  $K_v = 10$  deve essere  $k = 10$  e risulta:

$$G_r(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{k}{\tau s^2 + s + k} = \frac{1}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_m} + \frac{s^2}{\omega_m^2}}$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k}{\tau}} = 3,16 \text{ sec}^{-1}$$

$$\delta = \frac{1}{2\sqrt{k\tau}} = 0,16 \quad \text{cui corrisponde un} \\ \text{picco di risonanza}$$

pari a 3,20 (molto maggiore del valore desiderato)

Dovrebbe essere  $\delta = 0,45$

Introduciamo una rete anticipatrice che cancelli il polo del sistema

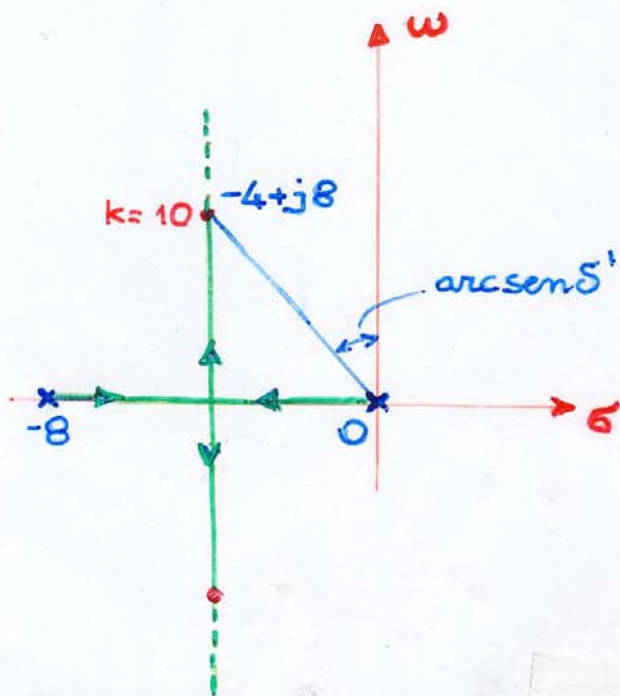
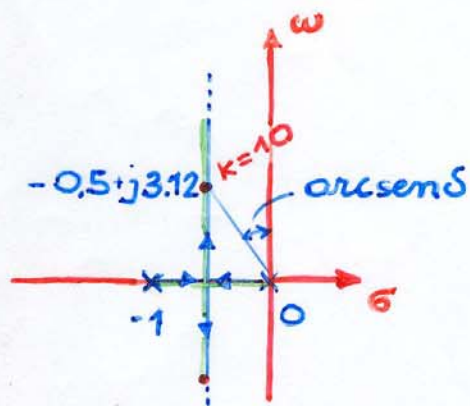
$$G(s) \cdot \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} = \frac{k \cancel{(1+Ts)}}{s(1+Ts)(1+\alpha Ts)} = \frac{k}{s(1+\alpha Ts)}$$

$$G'_z(s) = \frac{k}{\alpha T s^2 + s + k} = \frac{1}{1 + 2 \frac{\delta'}{\omega'_m} s + \frac{s^2}{\omega'_m{}^2}}$$

$$\omega'_m = \sqrt{\frac{k}{\alpha T}}$$

$$\delta' = \frac{1}{2\sqrt{k\alpha T}}$$

Volendo  $\delta' = 0.45$  deve essere  $\alpha = \frac{1}{8}$





## Compensazione con reti a ritardo e anticipo.

Tale rete non sfasa ed attenua alla pulsazione  $\omega_m$

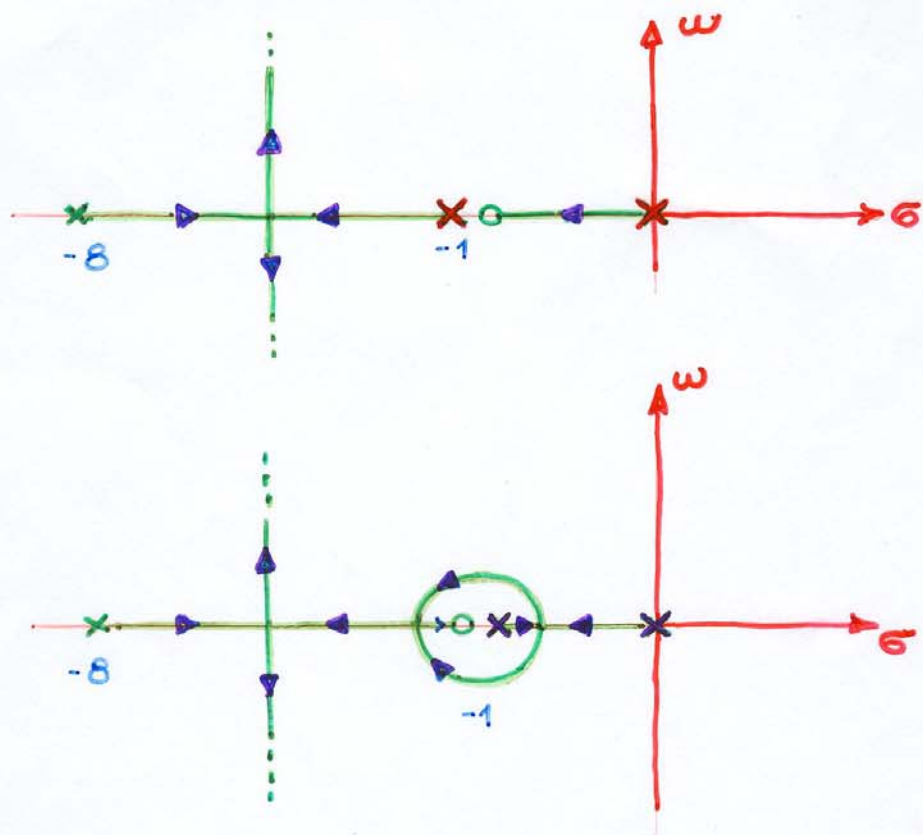
Se la specifica è  $M_f$ :

Sul diagramma di Bode del sistema non compensato si ricerca la pulsazione ( $\omega_m$ ) alla quale la fase vale  $-180^\circ + M_f$  e l'attenuazione  $\alpha$  da introdurre per ottenere modulo unitario (0 db) a  $\omega_m$

Se la specifica è  $M_a$

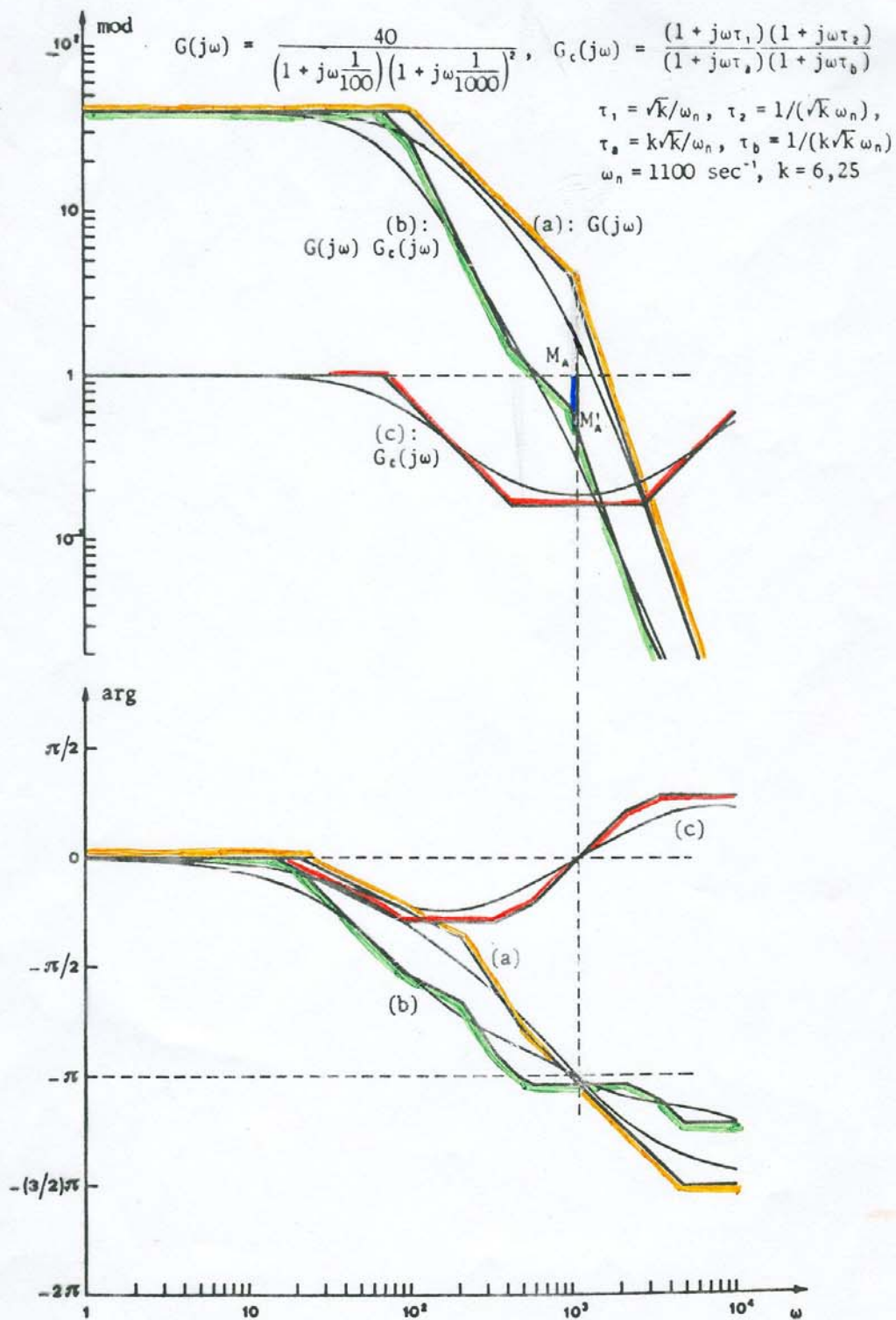
Sul diagramma di Bode non compensato si determina la pulsazione  $\omega_m$  a cui la fase vale  $-180^\circ$  e l'attenuazione  $\alpha$  da introdurre in modo che il sistema corretto abbia il margine voluto per l'ampiezza  $M_a$ .

Se la cancellazione non è perfetta:



Il residuo associato al polo della coppia polo-zero è piccolo (per la vicinanza dello zero) ma non nullo. Il termine corrispondente nel dominio del tempo sarà trascurabile se il polo non è nel semipiano destro.

Non è possibile stabilizzare un sistema instabile cancellando il polo reale positivo con uno zero positivo.



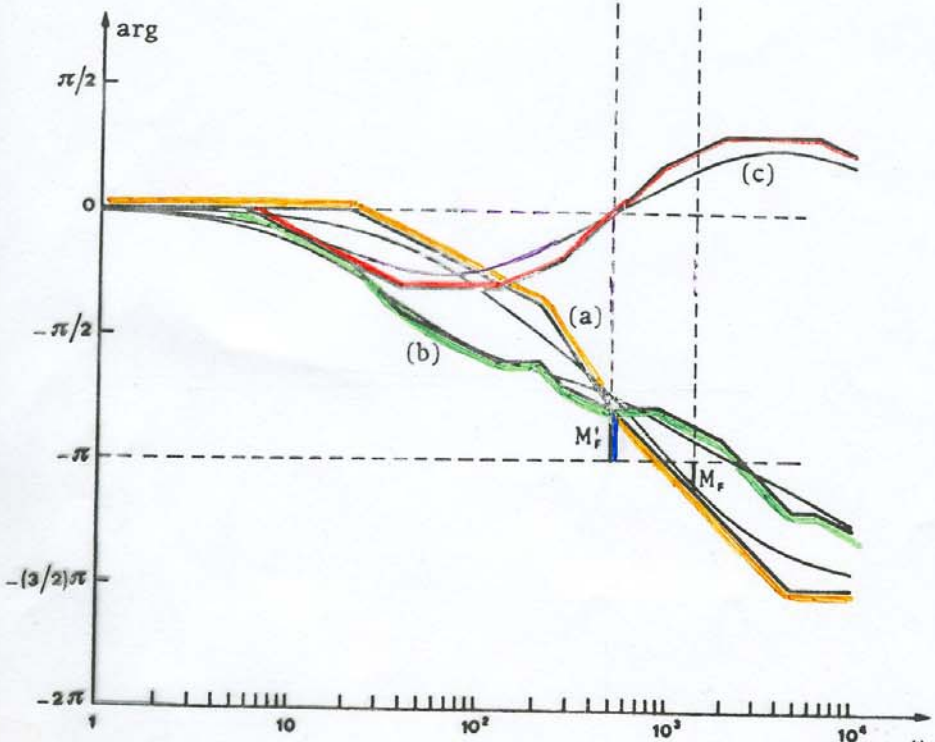
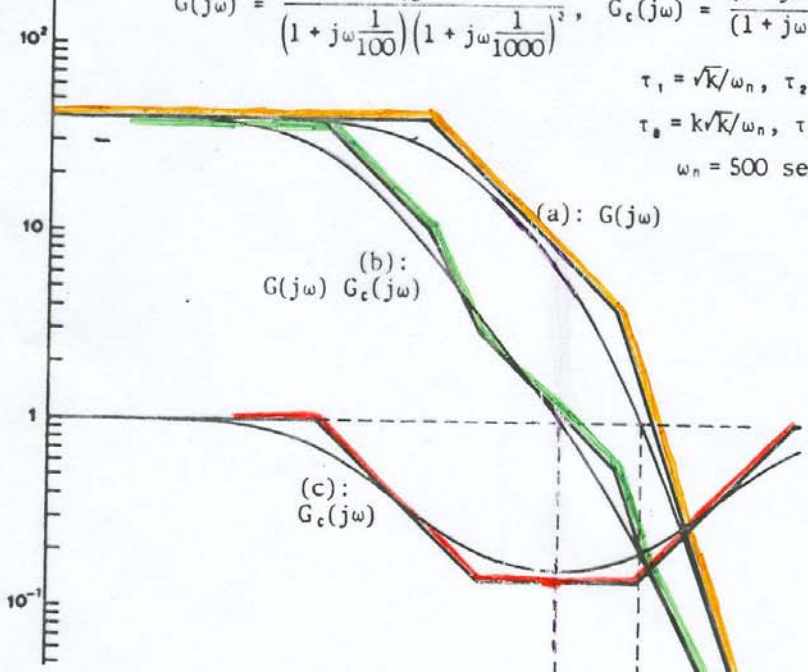
mod

$$G(j\omega) = \frac{40}{(1 + j\omega \frac{1}{100})(1 + j\omega \frac{1}{1000})^2}, \quad G_c(j\omega) = \frac{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)}{(1 + j\omega\tau_a)(1 + j\omega\tau_b)}$$

$$\tau_1 = \sqrt{k}/\omega_n, \quad \tau_2 = 1/(\sqrt{k}\omega_n),$$

$$\tau_a = k\sqrt{k}/\omega_n, \quad \tau_b = 1/(k\sqrt{k}\omega_n),$$

$$\omega_n = 500 \text{ sec}^{-1}, \quad k = 7,2$$



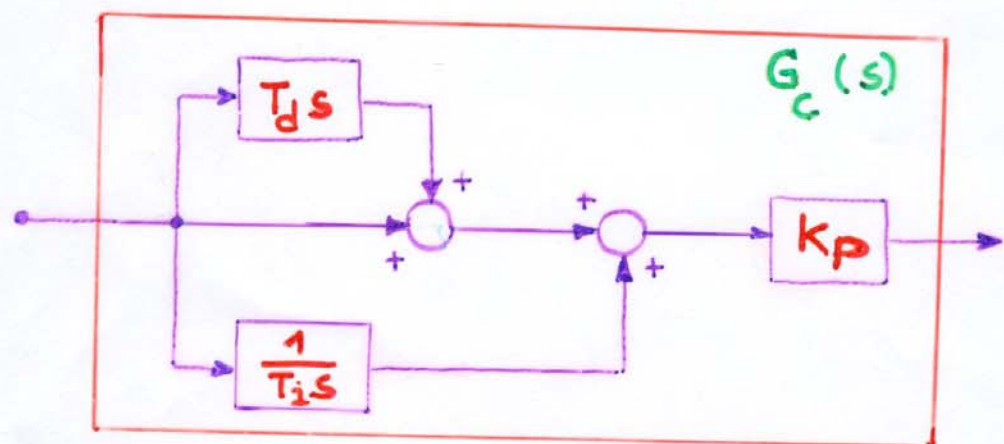
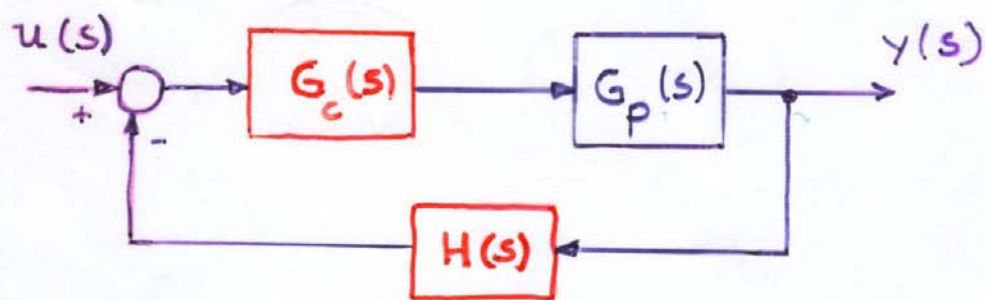
Ricavati così  $\omega_m$  ed  $\alpha$  rimane da determinare il rapporto fra le due costanti di tempo a numeratore (o a denominatore) della funzione di trasferimento della rete correttiva.

In tale scelta si cerca di mantenere elevato il margine di fase anche per notevoli variazioni del guadagno, oppure si cerca di soddisfare specifiche riguardanti la larghezza di banda.

Il progetto secondo i criteri esposti corrisponde ad un uso della rete a ritardo e anticipo analogo a quello della rete ritardatrice, cioè se ne sfrutta principalmente l'attenuazione, con il vantaggio, rispetto alla rete ritardatrice, di un minor taglio delle frequenze elevate.

# Regolatori standard

Vengono utilizzati nei processi industriali per soddisfare l'esigenza di unificazione degli apparati di controllo di fronte a caratteristiche dinamiche diverse dei sistemi controllati e a differenti campi di variabilità delle grandezze in gioco (temperatura, portata, ...)



$$G_c(s) = K_p \left( 1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)$$

Regolatore proporzionale **P**:  $K_p$

Regolatore integrale **I**:  $\frac{K_p}{T_i s}$

Regolatore proporzionale-integrale **PI**:  $K_p(1 + \frac{1}{T_i s})$

Regolatore proporzionale-derivativo **PD**:  $K_p(1 + T_d s)$

Regolatore proporzionale-integrale-derivativo  
**PID**:  $K_p(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s})$

$K_p$  = sensibilità proporzionale

$T_d$  = costante di tempo dell'azione derivativa

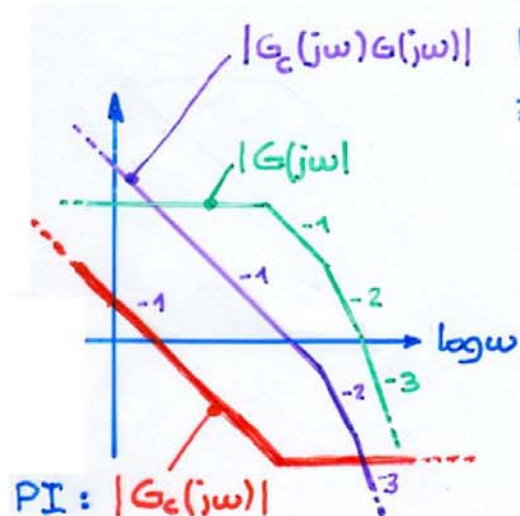
$T_i$  = costante di tempo dell'azione integrale.

Per l'uso dei regolatori standard valgono considerazioni analoghe a quelle viste per le reti correttive

**regolatore P** : per sistemi con il comportamento dinamico di un integratore, o con una sola costante di tempo dominante.

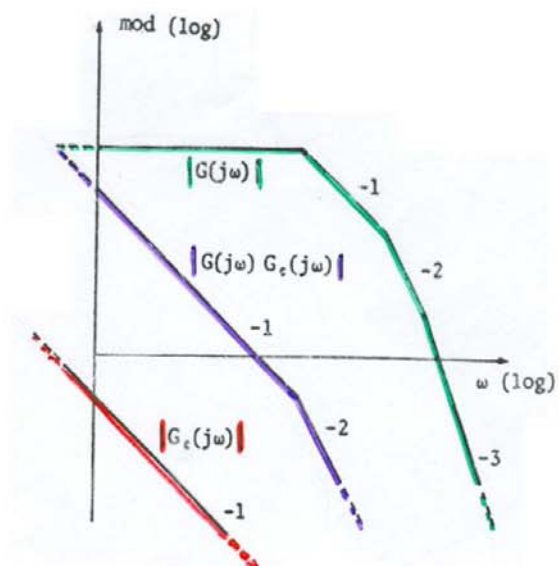
**regolatore I** : per sistemi di tipo 0 di difficile stabilizzazione.

**regolatore PI** : rispetto al regolatore I, consente di conservare una maggiore larghezza di banda (maggiore prontezza di risposta).



Viene così preferito al regolatore I così come, alla rete integratrice viene preferita la rete ritardatrice.

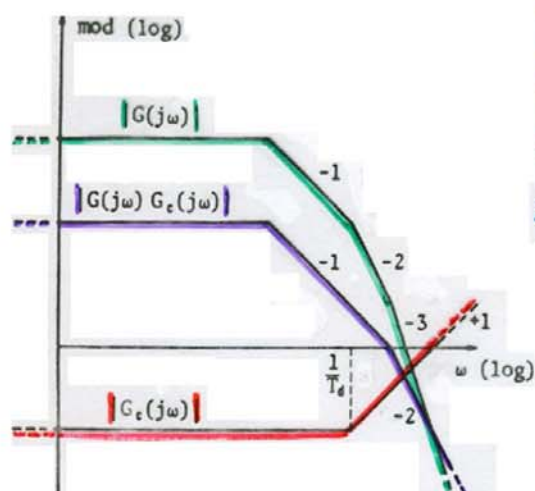




effetto del regolatore I

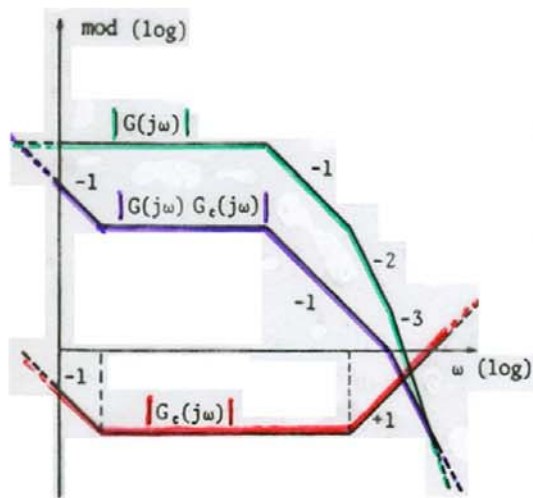
regolatore PD:

per sistemi non eccessivamente lontano dalla stabilità: l'intervento è analogo a quello della rete anticipatrice.



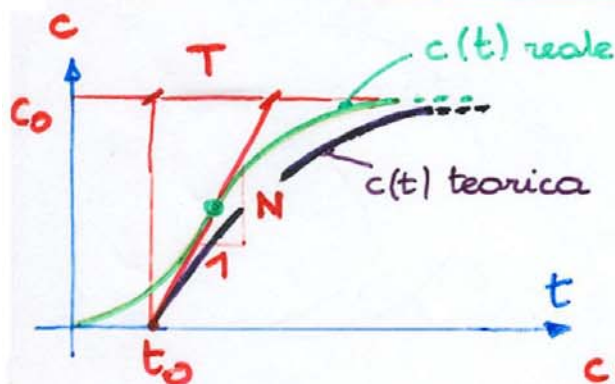
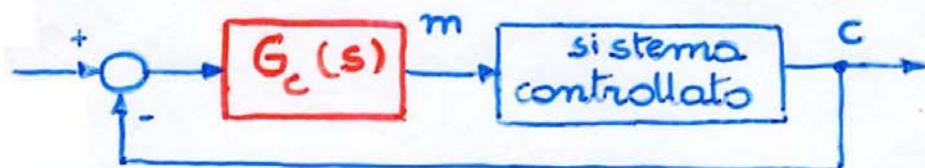
regolatore PID:

si può usare in alternativa al PD, per sistemi di tipo 0, consente di ottenere una buona larghezza di banda e un errore statico nullo con ingresso a gradino.



## Progetto dei regolatori standard

Si suppone che il sistema di controllo sia



Si suppone che il sistema controllato abbia questa risposta al gradino, cioè

$$\frac{c(s)}{m(s)} = G_p(s) = \frac{k e^{-t_0 s}}{1 + Ts}$$

$t_0$  = tempo di ritardo

$T$  = costante di tempo

$R = t_0 / T = N t_0 / C_0$  = rapporto di ritardo

$N = C_0 / T$  = velocità di risposta

$K = C_0 / M_0$  = guadagno statico

$M_0$  = ampiezza del gradino applicato

Per la scelta dei parametri si possono utilizzare le relazioni di **Ziegler-Nichols** (modificate da **Cohen e Coon**):

Controllo P: 
$$k_p = \frac{M_0}{N t_0} \left( 1 + \frac{R}{3} \right)$$

Controllo I: 
$$\frac{k_p}{T_i} = \frac{4 M_0}{N t_0^2} \frac{R^2}{1 + 5R}$$

Controllo PI: 
$$k_p = \frac{M_0}{N t_0} \left( \frac{9}{10} + \frac{R}{12} \right)$$

$$T_i = t_0 \frac{30 + 3R}{9 + 20R}$$

Controllo PD: 
$$k_p = \frac{M_0}{N t_0} \left( \frac{5}{4} + \frac{R}{6} \right)$$

$$T_d = t_0 \frac{6 - 2R}{22 + 3R}$$

Controllo PID: 
$$k_p = \frac{M_0}{N t_0} \left( \frac{4}{3} + \frac{R}{4} \right)$$

$$T_i = t_0 \frac{32 + 6R}{13 + 8R}$$

$$T_d = t_0 \frac{4}{11 + 2R}$$

Sono scelte semiempiriche !!

In alternativa, si porta in condizioni di stabilità limite il sistema con la sola azione di controllo proporzionale P.

Sia  $k_0$  il valore di  $k_p$  per cui ciò avviene e sia  $T_0$  il periodo delle oscillazioni così ottenute.

Si scelgono i parametri con le seguenti relazioni (Ziegler e Nichols):

Controllo P :  $k_p = 0.5 k_0$

Controllo PI :  $k_p = 0.45 k_0$  ;  $T_i = 0.85 T_0$

Controllo PD :  $k_p = 0.5 k_0$  ;  $T_d = 0.2 T_0$

Controllo PID :  $k_p = 0.6 k_0$  ;  $T_d = 0.5 T_0$

$T_i = 0.12 T_0$