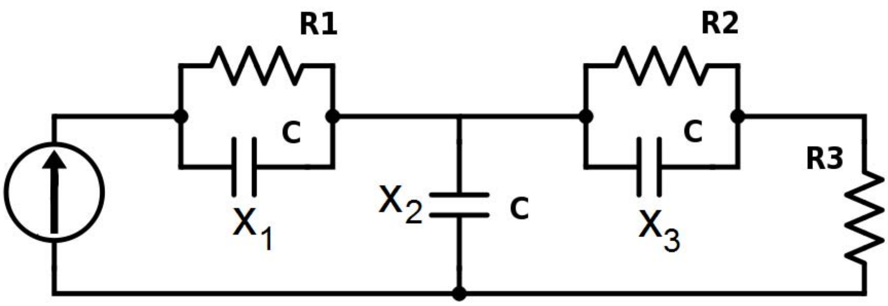
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (9 CFU)

Prova scritta – 8 settembre 2017

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si consideri il seguente circuito elettrico passivo:



Applicando le leggi di Kirchhoff e le formule di base dei componenti RLC, si ottiene il seguente modello matematico:

$$C\dot{x}_1 + \frac{x_1}{R_1} = u$$

$$C\dot{x}_2 + \frac{x_2 - x_3}{R_3} = u$$

$$C\dot{x}_3 - \frac{x_2 - x_3}{R_3} + \boxed{\frac{x_2}{R_2}} = 0$$

NOTA: con l’applicazione corretta delle leggi di Kirchhoff il termine evidenziato dovrebbe essere x_3/R_2. Poiché il testo è stato presentato in sede di esame con tale errore di battitura, la soluzione proposta nel seguito verrà sviluppata come se le equazioni di partenza fossero corrette.

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\; y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

considerando ovvie scelte per gli elementi del vettore di stato e per l’ingresso, mentre l’uscita sia fissata $y = (x_2 - x_3)$;.

RISPOSTA:

Le equazioni fornite sono già predisposte per una immediata riscrittura in forma compatibile con la definizione delle matrici di sistema A, B, C, D:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{1}{R_1 C}x_1 & & & + \frac{1}{C}u \\
\dot{x}_2 &= & -\frac{1}{R_3 C}x_2 & + \frac{1}{R_3 C}x_3 & + \frac{1}{C}u \\
\dot{x}_3 &= & \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right)x_2 & - \frac{1}{R_3 C}x_3 &
\end{aligned}$$

Dalle quali risulta appunto:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_3 C} & \frac{1}{R_3 C} \\ 0 & \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right) & -\frac{1}{R_3 C} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

e poiché $y = (x_1 - x_2)$, l'uscita non dipende dall'ingresso ($D = 0$, sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la prima variabile dal vettore di stato è:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

C = 0,1; R_1 = 10; R_2 = 5; R_3 = 20;

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente osservabile, calcolando la matrice di osservabilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema, tranne C che non dipende dai parametri, diventano:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$Q^T = \left[C^T \; A^TC^T \; (A^T)^2C^T\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

rango(Q^T) = 2

Perciò il sistema ~~E' /~~ **NON E'** completamente osservabile.

ESERCIZIO 3.

Per il sistema con i valori numerici indicati nell'Esercizio 2, si progetti un osservatore in catena chiusa dello stato (osservatore identità), cioè del tipo:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(C\hat{x}(t) - y(t))$$

i cui autovalori assegnabili risultino tutti reali ed uguali tra loro (se quelli assegnabili sono più di uno), con valore pari a -5.

RISPOSTA:

La matrice K dell'osservatore deve essere di dimensione 3x1, cioè $K = [k_1 \;\; k_2 \;\; k_3]^T$, pertanto la matrice dell'osservatore con i coefficienti incogniti di K risulta:

$$A + KC = \begin{bmatrix} -1 & k_1 & -k_1 \\ 0 & k_2 - 1/2 & 1/2 - k_2 \\ 0 & k_3 - 3/2 & -k_3 - 1/2 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza, il <u>polinomio caratteristico dell'osservatore</u> risulta:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(\lambda I - A - KC) = \\ &= (\lambda+1)(\lambda - k_2 + 2)(\lambda + k_3 + 3) - (\lambda+1)(\lambda + k_2 + 2)(\lambda - k_3 + 2) \end{aligned}$$

Si noti che prima di espandere i prodotti tra i termini, si può raccogliere un polinomio di NON dipendente dai coefficienti di K ed un polinomio di secondo grado dipendente da k_2 e k_3:

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)\left[\lambda^2 + \lambda(1 - k_2 + k_3) + 1 - 2k_2)\right] = p'(\lambda)p''(\lambda)$$

Da questo (i.e. il grado del polinomio dipendente da coefficienti di K) si deduce che vi sono solo due autovalori assegnabili, condizione dovuta al rango della matrice di osservabilità pari a 2.

NOTA: allo stesso risultato si poteva arrivare anche osservando la struttura triangolare a blocchi della matrice dell'osservatore:

$$A + KC = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & k_1 & -k_1 \\ \hline \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} k_2 - 1/2 \\ k_3 - 3/2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1/2 - k_2 \\ -k_3 - 1/2 \end{matrix} \end{array}\right]$$

dalla quale si deduce che gli autovalori della matrice sono quelli del blocco 1x1 in alto a sinistra (i.e. -1, appunto) e del blocco 2x2 in basso a destra, l'unico nel quale compaiono coefficienti incogniti.

Imporre che questi due autovalori siano entrambi uguali a -5 significa forzare il polinomio p''(λ) ad essere uguale ad un polinomio ottenuto come segue:

$$p_{des}(\lambda) = (\lambda + 5)^2 = \lambda^2 + 10\lambda + 25$$

Uguagliando tra loro i coefficienti di pari grado del polinomio desiderato e del polinomio dipendente dai coefficienti incogniti p''(λ) si ottiene il seguente sistema di vincoli:

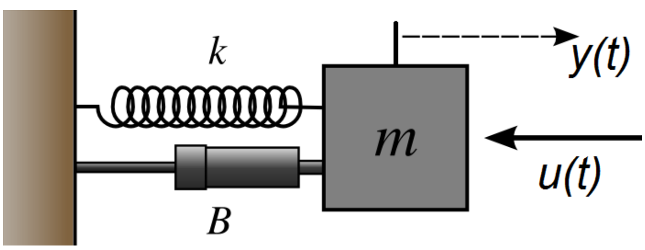
$$\begin{aligned} 1 - k_2 + k_3 &= 10 \\ 1 - 2k_2 &= 25 \end{aligned}$$

La cui soluzione è k_2 = -12 e k_3 = -3. Poiché k_1 è ininfluente sull'assegnazione degli autovalori, può assumere un valore arbitrario, e la soluzione finale è:

$$K = [\text{ arbitrario } \quad -12 \quad -3]^T$$

ESERCIZIO 4.

Si consideri il seguente sistema massa-molla-smorzatore (ingresso = forza applicata, uscita = spostamento della massa):



per il quale il modello matematico nel dominio del tempo risulta essere:

$$2\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 8y(t) = u(t)$$

Si determinino:

- la corrispondente funzione di trasferimento G(s) con la trasformata di Laplace
- il coefficiente di smorzamento δ di tale funzione di trasferimento
- il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino.

RISPOSTA:

Il modello matematico fornito, applicando la regola della derivata per le trasformate di Laplace, diventa:

$$2s^2Y(s) + 3sY(s) + 8Y(s) = U(s)$$

Dal quale si deduce la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{2s^2+3s+8}$$

Per determinare il coefficiente di smorzamento si faccia riferimento alla formulazione standard del denominatore di un sistema del secondo ordine (**NOTA**: non si considera il numeratore poiché esso influenza solo il guadagno statico G(0) della funzione e non l'andamento nel tempo della risposta):

$$G(s) = \frac{\cdots}{s^2 + 2\,\delta\,\omega_n\,s + \omega_n^2}$$

Come si può notare, il denominatore della funzione di trasferimento calcolata non ha il coefficiente di secondo grado unitario. Per poterlo confrontare con quello generico occorre quindi dividere tutti i termini per 2, da cui si ottiene che:

$2\delta\omega_n = 3/2$

$\omega_n^2=4 \Rightarrow \omega_n = 2$

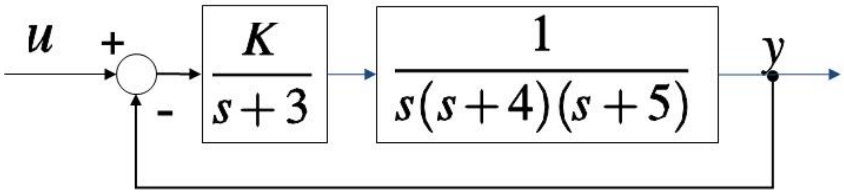
Perciò $\delta = (3/2) / 2 / 2 = 3/8 = 0{,}375$

Essendo tale valore inferiore ad 1, il sistema risulta sotto-smorzato e quindi la relativa risposta al gradino è caratterizzata da un transitorio iniziale oscillatorio. Il tempo di assestamento è determinato dalla seguente formula:

$$T_a = \frac{3}{\delta\omega_n} = \frac{3}{3/4\cdot 2} = 4 \text{ (secondi)}$$

ESERCIZIO 5.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determini l'intervallo di valori di K per i quali il sistema risulti <u>asintoticamente stabile</u>.

RISPOSTA:

L'intervallo di stabilità per i valori di K si determina applicando il criterio di Routh al polinomio a denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso:

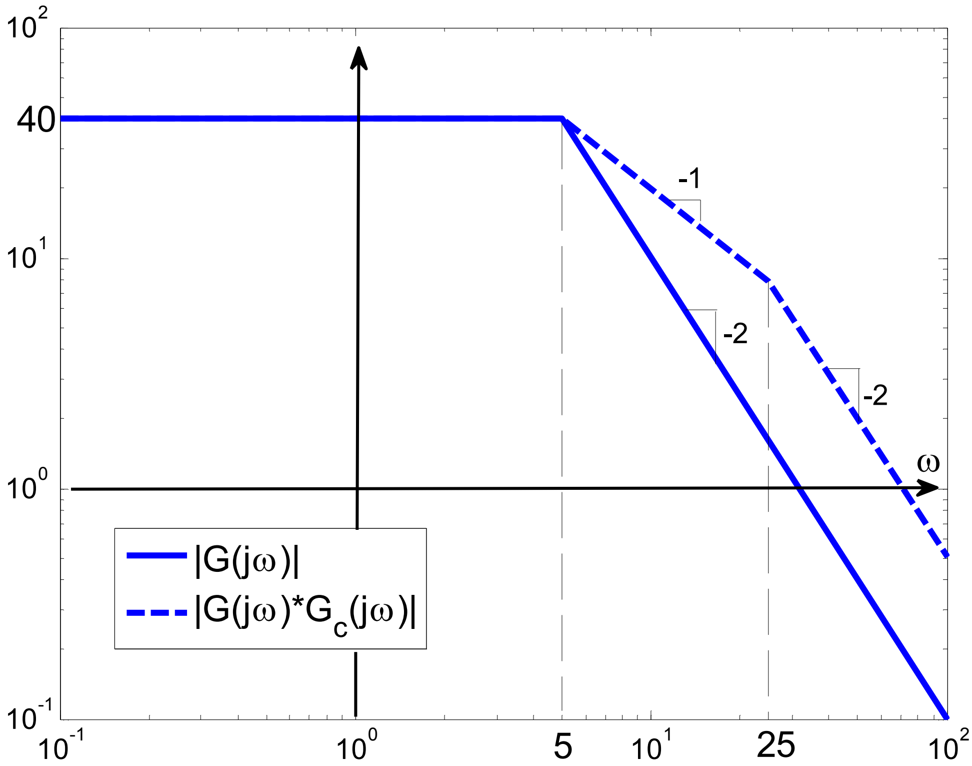
$$D_{cl}(s) = s^4 + 12s^3 + 47s^2 + 60s + K$$

Dalla tabella di Routh si ottengono due vincoli per K, cioè $K > 0$ e $K < 210$, perciò:

$$0 < K < 210$$

ESERCIZIO 6.

Dati i seguenti diagrammi di Bode delle ampiezze:



si determinino le funzioni di trasferimento, supposte a fase minima, del sistema controllato $G(s)$ e del controllore $G_c(s)$:

RISPOSTA:

$$G(s) = \frac{40}{(1+\frac{s}{5})^2}$$

$$G_c(s) = \frac{1+\frac{s}{5}}{1+\frac{s}{25}}$$

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.

L'ingresso u(t) e l'uscita y(t) di un sistema sono legati dalla relazione $\dot{y}(t) = u(t)$

Tale sistema è:

O puramente algebrico
X puramente dinamico
O dinamico, non puramente
O non fisicamente realizzabile

DOMANDA 2.

Il moto libero di un sistema dinamico, lineare, stazionario, continuo e di ordine due, è del tipo:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-t}x_1(0) \\ x_2(t) &= e^{-2t}x_2(0) \end{aligned}$$

Il sistema considerato:

O è completamente controllabile
X può essere completamente controllabile
X è asintoticamente stabile
O è semplicemente stabile

DOMANDA 3.

La stabilità di un sistema lineare e stazionario:

O È funzione delle condizioni iniziali degli stati
O È funzione del valore degli ingressi
O È funzione del valore dei disturbi
X È funzione degli autovalori del sistema

DOMANDA 4.

Gli elementi della matrice di risposta impulsiva sono funzioni che tendono a zero al tendere del tempo all'infinito nei sistemi dinamici, lineari e stazionari:

O semplicemente stabili
X asintoticamente stabili
O completamente controllabili
O completamente osservabili

DOMANDA 5.

La funzione di trasferimento di un sistema dinamico a tempo continuo è:

$$G(s) = \frac{(s+2)(s+1)}{s(s+3)}$$

Tale sistema:

O è puramente dinamico
O è asintoticamente stabile
X è semplicemente stabile
O è instabile

DOMANDA 6.

Il tempo di salita T_s della risposta al gradino di un sistema è definito come:

O il tempo necessario per raggiungere il 50% del valore finale
O il tempo necessario per raggiungere il 90% del valore finale
X il tempo necessario per passare dal 10% al 90% del valore finale
O il tempo necessario perché l'uscita rimanga entro il ±5% del valore finale

DOMANDA 7.

Si indichi quali delle seguenti funzioni di trasferimento sono a fase minima:

O $G(s) = e^{-t_0 s}$

O $G(s) = \frac{s+1}{s-2}$

O $G(s) = \frac{s-1}{s+2}$

X $G(s) = \frac{s+1}{s+2}$

DOMANDA 8.

In corrispondenza della pulsazione centrale: $\omega_n = 1/\sqrt{\tau_1 \tau_2}$, una rete ad anticipo e ritardo:

$$G_c(s) = \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\alpha\tau_1 s)(1+\frac{\tau_2}{\alpha} s)}$$

X Attenua ma non sfasa
O Sfasa di 90°
O Attenua e sfasa di 45°
O Amplifica