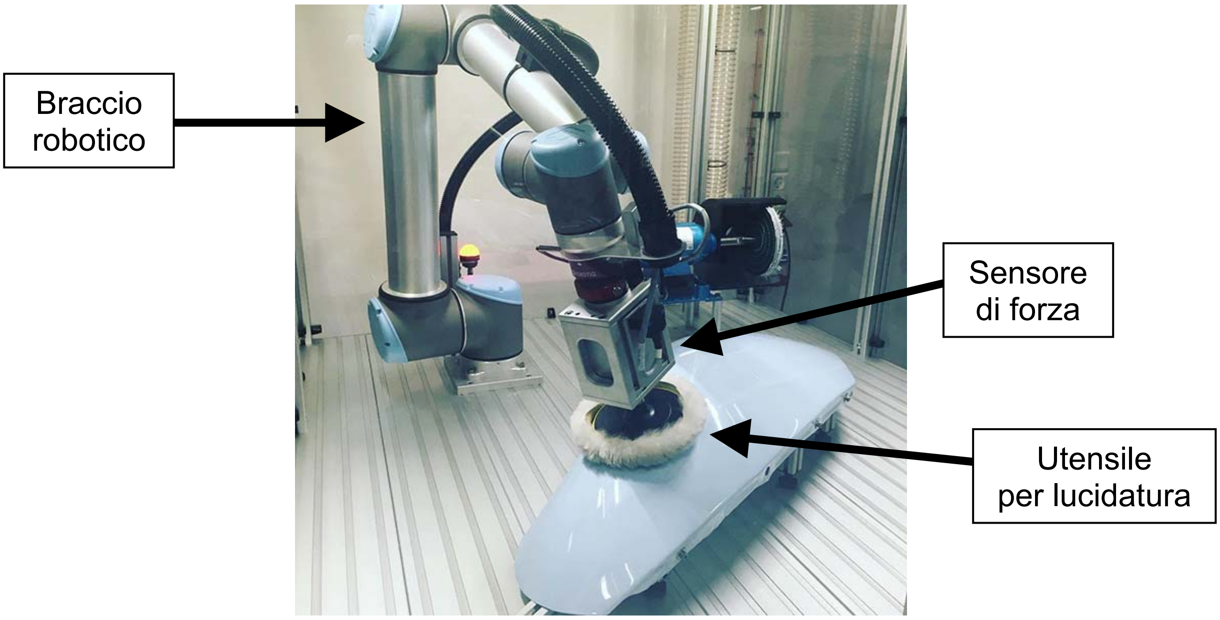
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (9 CFU)

Prova scritta – 28 giugno 2018

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si vuole realizzare un sistema robotico per la lucidatura automatica della superficie di lamiere, costituito da un braccio meccanico articolato sulla cui flangia terminale è installato l’utensile per lucidatura. Tra la flangia del robot e l’utensile vero e proprio è inserito un sensore di forza, allo scopo di mantenere sempre l’utensile in contatto con la superficie da lucidare anche qualora questa non sia planare, regolando la forza di contatto misurata.



Considerando solo movimenti e forze nella direzione normale alla superficie da lucidare, che la posizione della superficie di contatto p_s **sia sempre l’origine degli spostamenti** (i.e. $p_s=0$), che la posizione dell’utensile sia governata dalla forza generata da un attuatore elettrico comandato da una tensione proporzionale all’errore rispetto a un riferimento p_i e che la forza di contatto sia proporzionale alla differenza tra la posizione dell’utensile p_r e p_s, il modello del sistema si può descrivere con le seguenti equazioni:

$$L_m \dot{I}_m + R_m I_m + K_m \dot{p}_r = K_c(p_i - p_r)$$

$$M \ddot{p}_r + B_d \dot{p}_r + F_n = K_m I_m$$

$$F_n = K_s(p_r - p_s) = K_s p_r$$

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = p_r;\ x_2 = \dot{p}_r;\ x_3 = I_m;\ u = p_i;\ y = F_n;$$

RISPOSTA:

Occorre:

- sostituire la notazione delle variabili di stato, ingresso e uscita
- notare che la derivata della prima variabile di stato corrisponde alla seconda variabile di stato: $\dot{x}_1 = x_2$

Si ottengono così le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{K_s}{M}x_1 - \frac{B_d}{M}x_2 + \frac{K_m}{M}x_3 \\
\dot{x}_3 &= -\frac{K_c}{L_m}x_1 - \frac{K_m}{L_m}x_2 - \frac{R_m}{L_m}x_3 + \frac{K_c}{L_m}u
\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K_s}{M} & -\frac{B_d}{M} & \frac{K_m}{M} \\ -\frac{K_c}{L_m} & -\frac{K_m}{L_m} & -\frac{R_m}{L_m} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_c}{L_m} \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato considerando l'uscita $y=F_n=K_s x_1$: poiché tale uscita non dipende dall'ingresso $D = 0$ (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la prima variabile dal vettore di stato è:

$$C = \begin{bmatrix} K_s & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$R_m = 0,4;\quad L_m = 0,1;\quad K_m = 1;\quad K_c = 4;$

$$M = 2; \quad B_d = 4; \quad K_s = 6;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente osservabile, calcolando la matrice di osservabilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema diventano:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1/2 \\ -40 & -10 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T \, A^T C^T \, (A^T)^2 C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -18 \\ 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

rango(Q^T) = 3

Perciò il sistema **E’** ~~/ NON E’~~ completamente osservabile

---

ESERCIZIO 3.

Per il sistema con i valori numerici indicati nell’Esercizio 2, si progetti un osservatore in catena chiusa dello stato (osservatore identità), cioè del tipo:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(C\hat{x}(t) - y(t))$$

i cui autovalori assegnabili risultino tutti reali ed uguali tra loro (se quelli assegnabili sono più di uno), con un tempo di assestamento (al 5%) di 0,5 secondi.

RISPOSTA:

Poiché il sistema è completamente osservabile (v. Esercizio 2) è possibile assegnare arbitrariamente tutti e tre gli autovalori dell’osservatore in catena chiusa. Gli autovalori desiderati sono determinali dalle specifiche dell’esercizio ricordando che il tempo di assestamento al 5% del modo corrispondente ad un autovalore reale è:

$$T_a = -\frac{3}{\lambda} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{T_a}$$

Pertanto, per avere $T_a = 1$ ed autovalori tutti uguali tra loro: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -6$.

Con tale scelta, il <u>polinomio caratteristico desiderato</u> per l'osservatore deve essere:

$$p_{des}(\lambda) = (\lambda + 6)^3 = \lambda^3 + 18\lambda^2 + 108\lambda + 216$$

La matrice K dell'osservatore deve essere di dimensione 3x1, cioè $K = [k_1 \;\; k_2 \;\; k_3]^T$, pertanto la matrice dell'osservatore con i coefficienti incogniti di K risulta:

$$A + KC = \begin{bmatrix} 6k_1 & 1 & 0 \\ 6k_2 - 3 & -2 & 1/2 \\ 6k_3 - 40 & -10 & -4 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza, il <u>polinomio caratteristico dell'osservatore</u> risulta:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(\lambda I - A - KC) = \\ &= \lambda^3 + (6 - 6k_1)\lambda^2 + (16 - 36k_1 - 6k_2)\lambda + 32 - 78k_1 - 24k_2 - 3k_3 \end{aligned}$$

Uguagliando tra loro i coefficienti dei termini di pari grado nel polinomio caratteristico desiderato e nel polinomio caratteristico dell'osservatore si ottengono i 3 vincoli per determinare i 3 coefficienti incogniti di K:

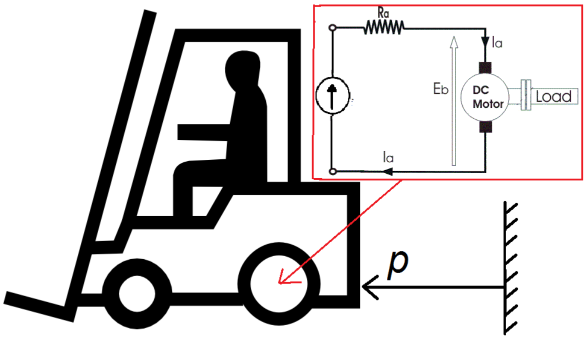
$$\begin{aligned} 6 - 6k_1 &= 18 \\ 16 - 36k_1 - 6k_2 &= 108 \\ 32 - 78k_1 - 24k_2 - 3k_3 &= 216 \end{aligned}$$

la cui soluzione finale è:

$$K = [\;\; -2 \quad -10/3 \quad 52/3 \;\;]^T$$

ESERCIZIO 4.

Un carrello elevatore azionato da un motore elettrico comandato in corrente, del tipo schematizzato nella figura seguente:



risulta avere il seguente modello nello spazio degli stati:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\; y(t) = Cx(t)$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si calcoli la corrispondente funzione di trasferimento del sistema considerato.

RISPOSTA:

Ricordando che la funzione di trasferimento è legata alle matrici del sistema dalla formula:

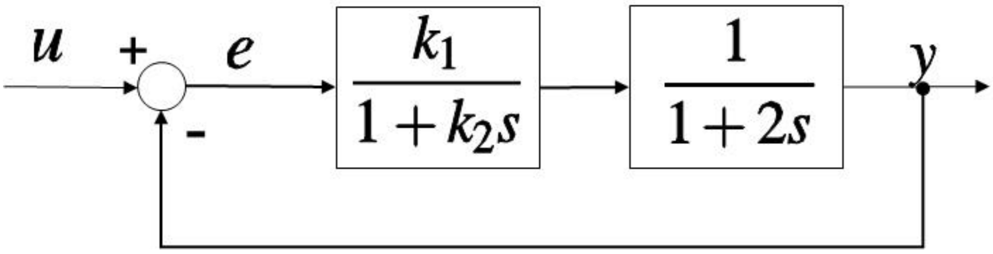
$$G(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B$$

risulta:

$$G(s) = 2 \,/\, (\,s^2 + 3\,s\,)$$

ESERCIZIO 5.

Dato il seguente sistema in retroazione:



si progettino i valori di k_1 e k_2 tali per cui il sistema ad anello chiuso risulti avere tempo di assestamento T_a = 0,4 secondi e pulsazione naturale ω_n = 2,5 rad/s.

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta:

$$2k_2s^2+(k_2+2)s+k_1+1$$

Dividendo tutti i termini per $2k_2$, è possibile confrontarlo con il denominatore tipico di un generico sistema del secondo ordine:

$$s^2+\frac{k_2+2}{2k_2}s+\frac{k_1+1}{2k_2}=s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2$$

Ricordando che per i sistemi del secondo ordine:

$$T_a=\frac{3}{\delta\omega_n}$$

risulta che il coefficiente del termine di primo grado deve essere = 15, perciò

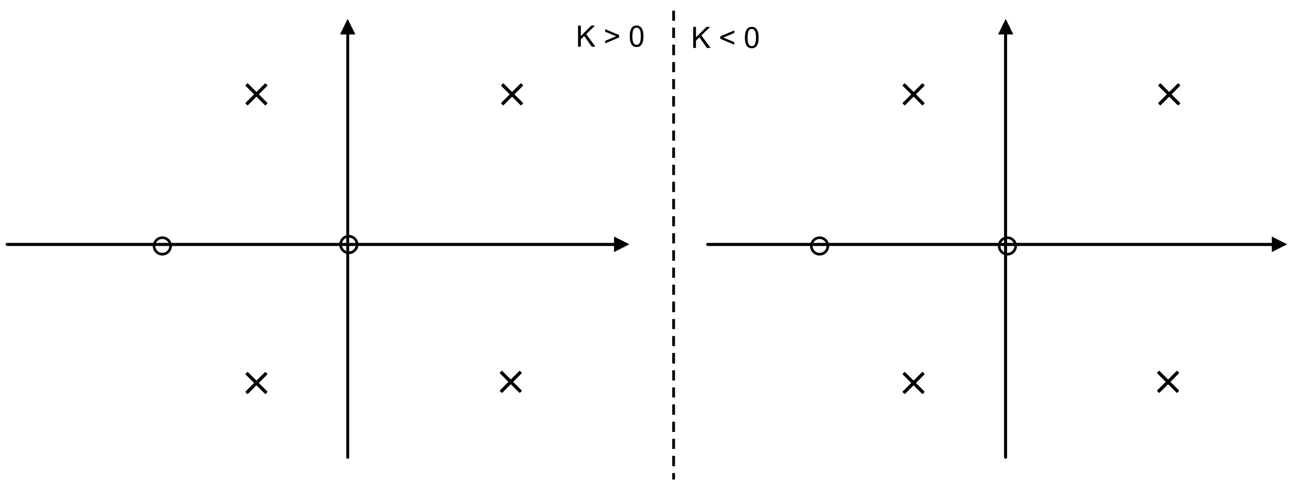
$$k_2 = 2/29$$

mentre il coefficiente costante deve essere = 6,25 (quadrato della pulsazione naturale), perciò

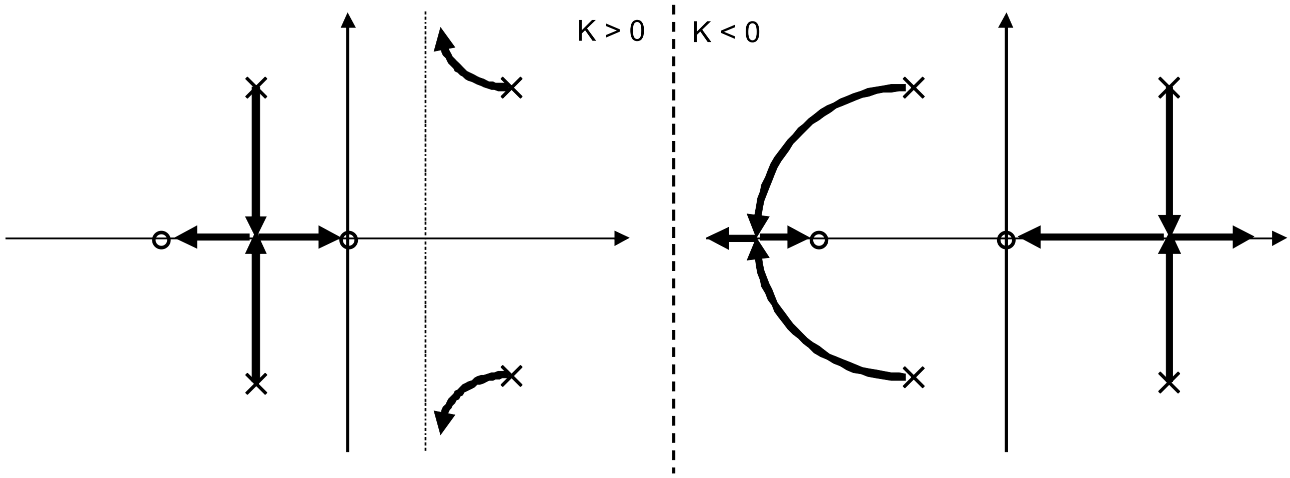
$$k_1 = -4/29$$

ESERCIZIO 6.

Si tracci l'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema con poli (x) e zeri (o) della funzione di trasferimento d'anello come indicato in figura:



RISPOSTA:



TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.
Un sistema dinamico lineare e stazionario, completamente osservabile, è instabile. Gli osservatori identità progettati per tale sistema sono:

O instabili
X asintoticamente stabili
X sistemi lineari e stazionari
O sistemi lineari e non stazionari

NOTA: *qualsiasi osservatore identità deve essere progettato per garantire* <u>*errore di stima tendente a zero*</u>*, cioè per essere asintoticamente stabile (matrice* ***A+KC*** *con autovalori a parte reale negativa). Ciò è indipendente dalla eventuale instabilità del sistema sotto osservazione. Qualora un elemento dello stato di quest'ultimo tenda all'infinito, tenderà all'infinito anche il corrispondente elemento stato stimato, ma sempre con* $e = (\hat{x} - x) \rightarrow 0$

DOMANDA 2.
La retroazione uscita-ingresso di un sistema dinamico lineare e stazionario di ordine **n**, consente di assegnare arbitrariamente tutti gli autovalori del sistema:

O sempre
O quando il sistema è completamente raggiungibile e completamente osservabile
O quando gli autovalori da assegnare sono tutti distinti
X quando il sistema è completamente raggiungibile e la matrice di distribuzione delle uscite è $\mathbf{C} = \mathbf{I}_{nxn}$

NOTA: *si ricordi che la retroazione uscita-ingresso influisce sugli autovalori della parte raggiungibile e osservabile (in questo caso il sistema completo), ma in generale NON in modo arbitrario su tutti. L'assegnazione arbitraria si può ottenere solo con la retroazione stato-ingresso su sistemi completamente raggiungibili, che di fatto coincide con la condizione descritta dalla quarta risposta (il vettore di uscita y coincide con il vettore di stato x)*

DOMANDA 3.
Una rete elettrica costituita da soli elementi reattivi (induttori e condensatori) ideali, è un sistema:

O non completamente controllabile
O asintoticamente stabile
X semplicemente stabile
O instabile

NOTA: *una rete elettrica nella quale non vi sia dissipazione di energia, legata alla presenza di resistenze elettriche, non può essere asintoticamente stabile. Inoltre, in presenza di soli elementi passivi (i.e. che non amplificano i segnali elettrici) la rete non può neppure essere instabile. Con le informazioni della domanda non si può affermare nulla sulla controllabilità della rete.*

DOMANDA 4.
Gli elementi della matrice di risposta impulsiva sono funzioni che tendono a zero al tendere del tempo all'infinito nei sistemi dinamici, lineari e stazionari:

O semplicemente stabili
X asintoticamente stabili
O instabili
O non completamente controllabili

DOMANDA 5.
La funzione di trasferimento di un sistema SISO NON puramente dinamico, descritto da un modello nello spazio degli stati completamente controllabile e completamente osservabile con **n** autovalori distinti, è il rapporto di due polinomi in cui:
X il grado del denominatore è uguale a **n**
O il grado del denominatore può essere minore di **n**
X il grado del numeratore è uguale a **n**
O il grado del numeratore è minore di **n**
NOTA: *se gli autovalori sono distinti, il polinomio caratteristico (di grado uguale a* **n***) coincide con il polinomio minimo e, poiché il sistema è completamente controllabile e osservabile, con il denominatore della funzione di trasferimento. Essendo il sistema NON puramente dinamico, il grado del numeratore deve essere uguale ad* **n** *(non superiore per il vincolo di fisica realizzabilità) in quanto è presente una relazione algebrica tra ingresso e uscita, corrispondente al rapporto tra i coefficienti di grado massimo di numeratore e denominatore.*

DOMANDA 6.
In base al principio del modello interno, per neutralizzare con errore a regime nullo un segnale in ingresso corrispondente al modo di un polo doppio nell'origine (i.e. un segnale a rampa, cioè con trasformata di Laplace = $1/s^2$), occorre che nella funzione di trasferimento di anello del sistema retroazionato:
O sia presente almeno un polo nell'origine
O siano presenti almeno tre poli nell'origine
X siano presenti almeno due poli nell'origine
O il guadagno statico sia finito

DOMANDA 7.
Dato il diagramma di Bode delle ampiezze di una funzione $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma delle fasi:
O solo se il diagramma di Bode delle ampiezze ha sempre pendenza negativa o nulla
X solo la corrispondente funzione di trasferimento $G(s)$ ha tutti poli e tutti gli zeri a parte reale negativa
O solo la corrispondente funzione di trasferimento $G(s)$ ha tutti poli a parte reale negativa
O solo la corrispondente funzione di trasferimento $G(s)$ ha tutti gli zeri a parte reale negativa

DOMANDA 8.
Il sistema avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{K}{s^2}$$

può essere reso asintoticamente stabile con uno schema ad anello chiuso che includa:
O un regolatore P
O un regolatore PI
X un regolatore PD
O una rete ritardatrice

NOTA: *La G(s) in questione ha due poli nell'origine, perciò la sua risposta armonica (diagramma di Bode) ha fase = -180° per ogni pulsazione. Ciò significa che per qualsiasi valore di K il Margine di Fase sarà nullo ed il sistema chiuso in retroazione marginalmente (i.e. semplicemente) stabile. Per ottenere un Margine di Fase positivo e quindi la stabilità asintotica è necessario un regolatore che introduca un anticipo di fase, cioè una rete anticipatrice o equivalentemente un regolatore PD.*