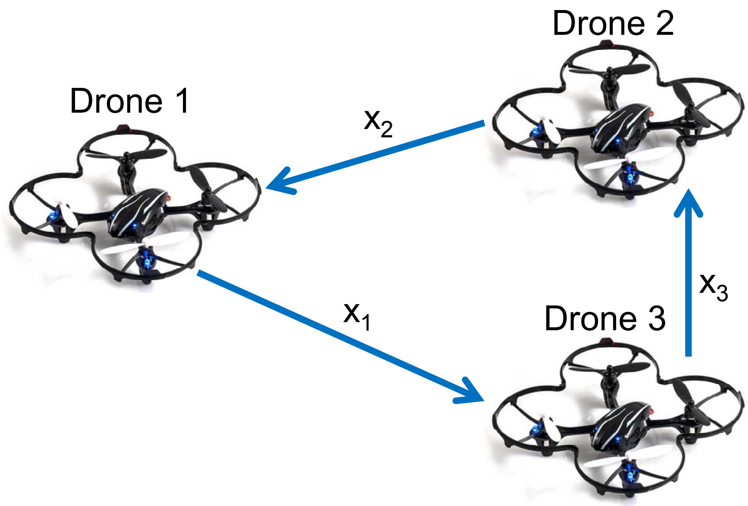
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (9 CFU)

Prova scritta – 23 febbraio 2018

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si vuole realizzare un sistema di sorveglianza costituito da una flotta di droni di tipologia quadricottero. Per coordinare e sincronizzare il moto dei quadricotteri è prevista una rete di comunicazione wireless low-power, con la quale ogni drone può inviare la propria posizione nello spazio solo ad uno dei droni vicini e solo uno dei droni può inviare la propria posizione al sistema di supervisione centralizzato. Come caso specifico si considerino tre droni con il seguente schema di comunicazione:



Al fine di mantenere un moto coordinato della flotta, ogni drone è programmato per regolare la propria velocità in funzione della distanza con l’altro drone del quale riceve la posizione via rete wireless, più un eventuale comando esterno fornito dal supervisore centralizzato. Considerando per semplicità la posizione del drone come una variabile scalare, indicata con x_i, le equazioni differenziali che descrivono il moto della flotta di tre droni sono esprimibili come segue:

$$\dot{x}_i = -(x_i - x_j) + b_i u$$

con le seguenti combinazioni degli indici i e j: [i=1, j=2], [i=2, j=3], [i=3, j=1].
Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\; y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le posizioni dei droni come variabili di stato e considerando:

- $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ e $b_3 = 0$.
- $y = x_3$

Si verifichi poi se il sistema considerato risulti o meno completamente controllabile, calcolando la matrice di raggiungibilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Occorre anzitutto sostituire gli indici nella generica equazione differenziale fornita dal testo. Si ottengono così le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + u \\
\dot{x}_2 &= -x_2 + x_3 \\
\dot{x}_3 &= x_1 - x_3
\end{aligned}
$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$
A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y = x_3$, poiché tale uscita non dipende dall'ingresso D = 0 (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la variabile dal vettore di stato è quindi

$$C = [\,0 \quad 0 \quad 1\,]$$

La matrice di raggiungibilità risulta:

$$
P = \left[B \;\; AB \;\; A^2B\right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}
$$

Poiché risulta rango(P) = 3, il sistema è completamente osservabile.

ESERCIZIO 2.

Per il sistema con le matrici ottenute all'Esercizio 1, si progetti una retroazione stato-ingresso (i.e. $u = H x + v$), in modo tale che:

- gli autovalori assegnabili del sistema chiuso in retroazione siano tutti reali e distinti;
- il più lento di tali autovalori abbia tempo di assestamento (al 5%) di 3 secondi e gli altri assegnabili abbiano valori assoluti progressivi di una unità (es. -1, -2, ecc.).

RISPOSTA:

Poiché il sistema è completamente controllabile (v. Esercizio 1) è possibile assegnare arbitrariamente tutti e tre gli autovalori del sistema chiuso in retroazione con una retroazione stato-ingresso. Gli autovalori desiderati sono determinali dalle specifiche dell'esercizio ricordando che il tempo di assestamento al 5% del modo corrispondente ad un autovalore reale è:

$$T_a = -\frac{3}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{T_a}$$

Pertanto, per avere $T_a = 3$, l'autovalore più lento deve essere pari a $\lambda_1 = -1$, mentre gli altri devono essere: $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$.

Con tale scelta, il <u>polinomio caratteristico desiderato</u> per il sistema chiuso in retroazione deve essere:

$$\begin{aligned} p_{des}(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) = \\ &= (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = \lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6 \end{aligned}$$

La matrice H del controllore deve essere di dimensione 1x3, cioè $H = [h_1 \quad h_2 \quad h_3]$, pertanto la matrice del sistema chiuso in retrazione con i coefficienti incogniti di H risulta:

$$A + BH = \begin{bmatrix} h_1 - 1 & h_2 + 1 & h_3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza, il <u>polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione</u> risulta:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(\lambda I - A - BH) = \\ &= \lambda^3 + (3-h_1)\lambda^2 + (3-h_3-2h_1)\lambda - h_1 - h_2 - h_3 \end{aligned}$$

Uguagliando tra loro i coefficienti dei termini di pari grado nel polinomio caratteristico desiderato e nel polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione si ottengono i 3 vincoli per determinare i 3 coefficienti incogniti di H:

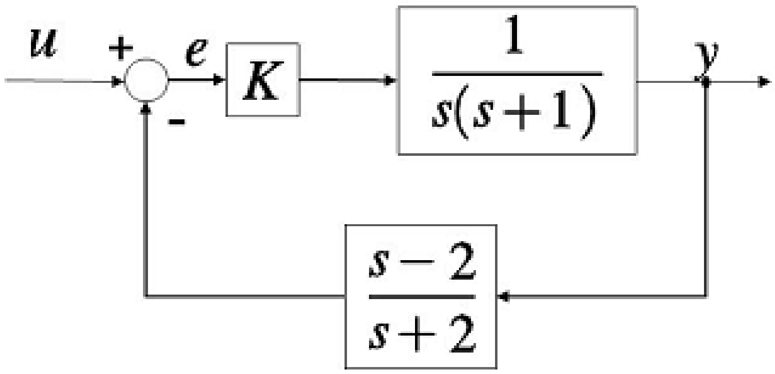
$$
\begin{aligned}
3-h_1 &= 6 \\
3-h_3-2h_1 &= 11 \\
-h_1-h_2-h_3 &= 6
\end{aligned}
$$

la cui soluzione finale è:

$$H = [\ -3 \quad -1 \quad -2\ ]$$

ESERCIZIO 3.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determinino i valori di K tali per cui il sistema chiuso in retroazione risulti essere asintoticamente stabile.

RISPOSTA:

Applicando il criterio di Routh al denominatore del sistema chiuso in retroazione:

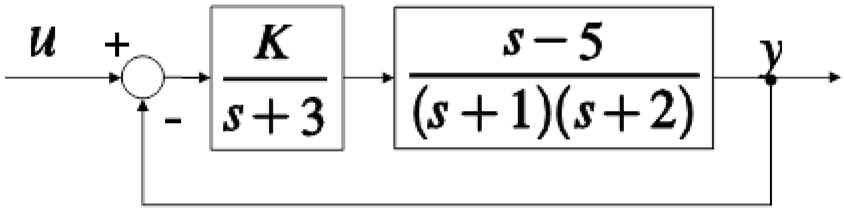
$$D_{cl}(s) = s^3 + 3s^2 + (K+2)s - 2K$$

si ottiene che:

$$-6/5 < K < 0$$

ESERCIZIO 4.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:

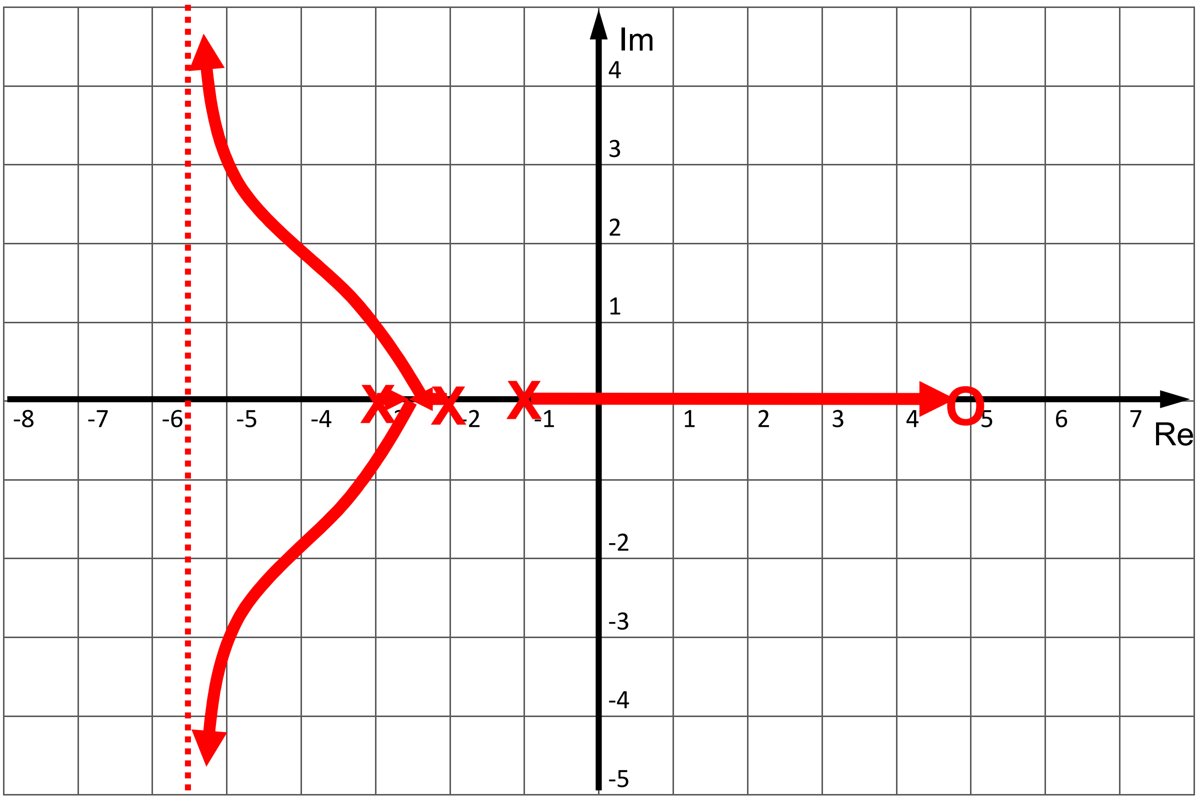


si disegni il corrispondente luogo delle radici valido per K > 0 (luogo diretto).

RISPOSTA:

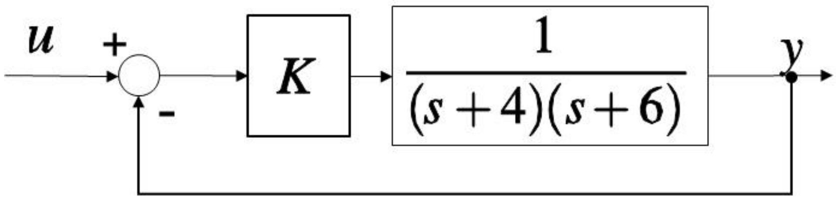
NOTA: la funzione di trasferimento di anello ha uno zero (n_z = 1) in +5 e tre poli (n_p = 3) rispettivamente in -1, -2 e -3, pertanto il luogo ha due asintoti (numero asintoti = $n_p - n_z$ = 2), disposti con angolo di π/2 e 3/2 π rispetto all'asse reale. Il centro degli asintoti è il punto sull'asse reale con coordinata:

$$\sigma_{asintoti} = \frac{1}{n_p - n_z}\left(\sum_{i=1}^{n_p} p_i - \sum_{i=1}^{n_z} z_i\right) = -11/2$$



ESERCIZIO 5.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determini il valore di K tale che il sistema ad anello chiuso risulti avere coefficiente di smorzamento δ = 0,4

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta

$$s^2 + 10\,s + 24 + K$$

Confrontando tale polinomio con il denominatore tipico dei sistemi del secondo ordine:

$$s^2 + 2\,\delta\,\omega_n\,s + \omega_n^2$$

si può notare che il coefficiente del termine di primo grado, corrispondente a 2 $\delta\,\omega_n$, sia indipendente da *K*. Imporre δ = 0,4 significa che deve essere ω_n = 25/2.
Il coefficiente costante è:

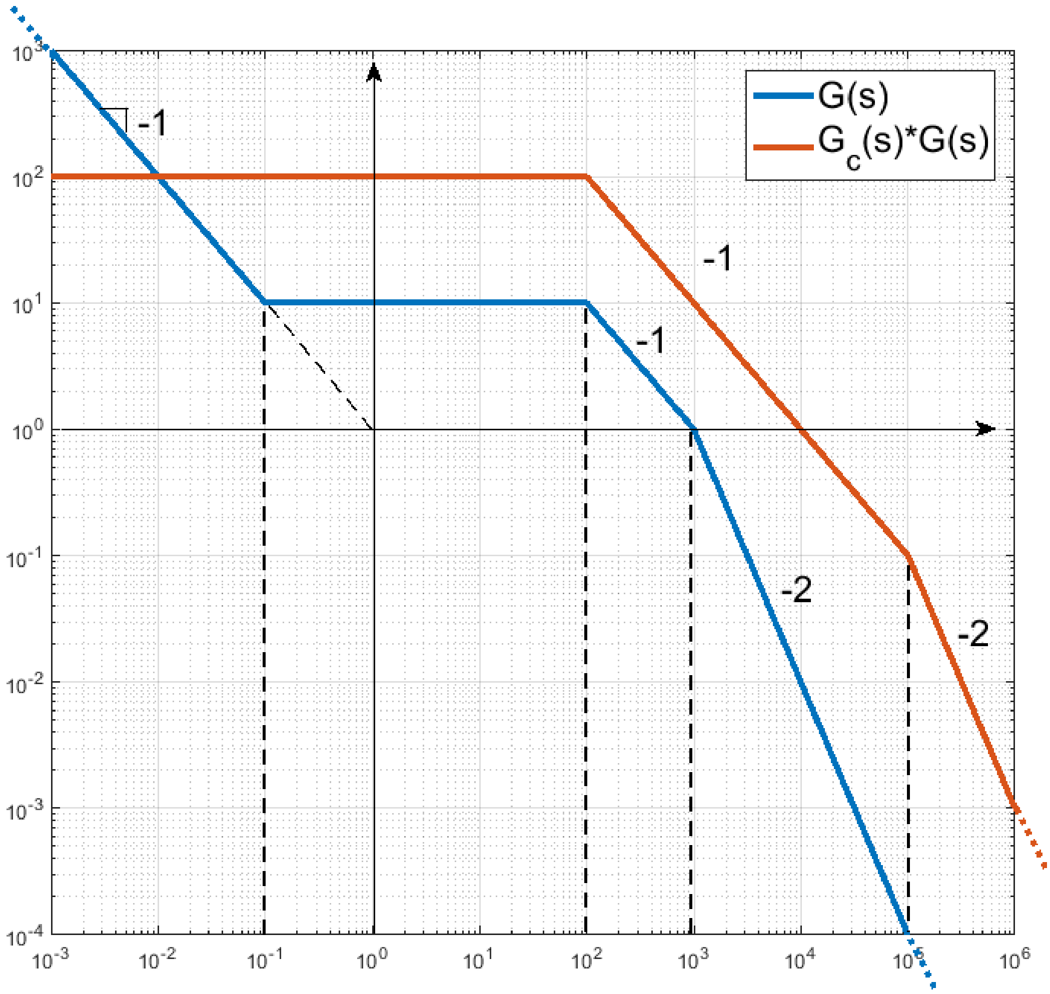
$$24 + K = \omega_n^2 = 625/4$$

quindi il risultato finale è:

$$K = 529/4$$

ESERCIZIO 6.

Dati i seguenti diagrammi di Bode delle ampiezze:



si determinino le funzioni di trasferimento **G(s)** e **G_c(s)**, supposte entrambe a fase minima.

RISPOSTA:

$$G(s) = \frac{\left(1+\frac{s}{10^{-1}}\right)}{s\left(1+\frac{s}{10^{2}}\right)\left(1+\frac{s}{10^{3}}\right)}$$

$$G_c(s) = \frac{100s\left(1+\frac{s}{10^{3}}\right)}{\left(1+\frac{s}{10^{-1}}\right)\left(1+\frac{s}{10^{5}}\right)}$$

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.

La matrice di transizione del sistema dinamico: $\dot{x}(t) = ax(t) \quad (x(t) \in \mathbb{R})$
risulta essere:

o e^{0t}

o e^{-at}

X e^{at}

o 0

DOMANDA 2.
Il polinomio minimo di un sistema dinamico lineare, stazionario e tempo continuo, è:

$$\lambda(\lambda + 3)^2$$

Il sistema:
O presenta modi instabili
O può presentare modi instabili
X presenta modi semplicemente stabili
X presenta modi asintoticamente stabili

DOMANDA 3.
Una retroazione uscita-ingresso per un sistema dinamico, lineare e stazionario, permette di modificarne gli autovalori della parte:
O raggiungibile-controllabile, in modo arbitrario
O raggiungibile-controllabile e osservabile-ricostruibile, in modo arbitrario
X raggiungibile-controllabile e osservabile-ricostruibile, ma non in modo arbitrario
O osservabile-ricostruibile, ma non in modo arbitrario

DOMANDA 4.
Il moto libero di un sistema dinamico, lineare, stazionario, continuo e di ordine due, è del tipo:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-t}x_1(0) \\ x_2(t) &= e^{-2t}x_2(0) \end{aligned}$$

Il sistema considerato:
O è completamente controllabile
X può essere completamente controllabile
X è asintoticamente stabile
O è semplicemente stabile

DOMANDA 5.
Il tempo di assestamento (al +/- 5%) del sistema avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s+3}$$

risulta essere

X $T_a = 1$

O $T_a = 2$

O $T_a = 3$

O $T_a = 3/2$

DOMANDA 6.

Il valore a regime $y(\infty)$ della risposta al gradino unitario ($U(s) = 1 / s$) della seguente f.d.t:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{s+3}$$

O è infinito

O è finito e vale 2

X è finito e vale 2/3

O è nullo

DOMANDA 7.

Il tempo di salita T_s della risposta al gradino di un sistema retroazionato è definito come:

O il tempo necessario per raggiungere il 50% del valore finale

O il tempo necessario per raggiungere il 90% del valore finale

X il tempo necessario per passare dal 10% al 90% del valore finale

O il tempo necessario perché l'uscita rimanga entro il ±5% del valore finale

DOMANDA 8.

In una rete anticipatrice, all'aumentare di ω da zero all'infinito:

O agisce prima il polo e poi lo zero

X agisce prima lo zero e poi il polo

X la fase è sempre positiva

O la fase è sempre negativa