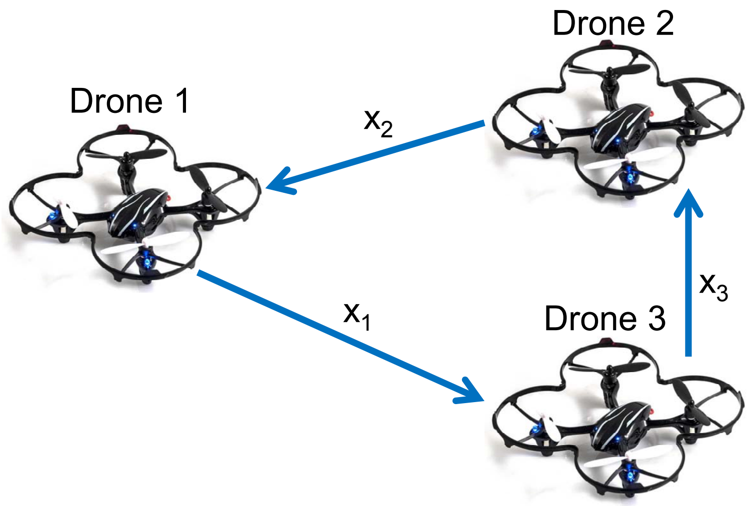
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (9 CFU)

Prova scritta – 20 giugno 2017

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si vuole realizzare un sistema di sorveglianza costituito da una flotta di droni di tipologia quadricottero. Per coordinare e sincronizzare il moto dei quadricotteri è prevista una rete di comunicazione wireless low-power, con la quale ogni drone può inviare la propria posizione nello spazio solo ad uno dei droni vicini e solo uno dei droni può inviare la propria posizione al sistema di supervisione centralizzato. Come caso specifico si considerino tre droni con il seguente schema di comunicazione:



Al fine di mantenere un moto coordinato della flotta, ogni drone è programmato per regolare la propria velocità in funzione della distanza con l’altro drone del quale riceve la posizione via rete wireless, più un eventuale comando esterno fornito dal supervisore centralizzato. Considerando per semplicità la posizione del drone come una variabile scalare, indicata con x_i, le equazioni differenziali che descrivono il moto della flotta di tre droni sono esprimibili come segue:

$$\dot{x}_i = -(x_i - x_j) + b_i u$$

con le seguenti combinazioni degli indici i e j: [i=1, j=2], [i=2, j=3], [i=3, j=1].
Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le posizioni dei droni come variabili di stato e considerando $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ e $b_3 = 0$. Per quando riguarda la variabile di uscita invece, si consideri $y = x_i$, con:

- i = 1, se il proprio numero di matricola termina con 0.
- i = 2, se il proprio numero di matricola termina con una cifra pari diversa da 0.
- i = 3, se il proprio numero di matricola termina con una cifra dispari.

Si verifichi poi se il sistema considerato risulti o meno completamente osservabile, in base al proprio numero di matricola, calcolando la matrice di osservabilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Occorre anzitutto sostituire gli indici nella generica equazione differenziale fornita dal testo. Si ottengono così le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + u \\
\dot{x}_2 &= -x_2 + x_3 \\
\dot{x}_3 &= x_1 - x_3
\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y = x_i$, poiché tale uscita non dipende dall'ingresso D = 0 (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la variabile dal vettore di stato è:

- C = [1 0 0], per numeri di matricola che terminano con 0.
- C = [0 1 0], per numeri di matricola che terminano con cifra pari (non 0)
- C = [0 0 1], per numeri di matricola che terminano con cifra dispari.

Nei tre casi, la matrice di osservabilità risulta:

- Numeri di matricola che terminano con 0:

$$Q^T = \left[C^T \; A^T C^T \; (A^T)^2 C^T\right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Numeri di matricola che terminano con cifra pari (non 0):

$$Q^T = \left[C^T \; A^T C^T \; (A^T)^2 C^T\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

- Numeri di matricola che terminano con cifra dispari:

$$Q^T = \left[C^T \; A^T C^T \; (A^T)^2 C^T\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Poiché risulta sempre rango(Q^T) = 3, il sistema è completamente osservabile per ogni possibile numero di matricola.

ESERCIZIO 2.

Per il sistema ottenuto all'Esercizio 1, si progetti un osservatore in catena chiusa dello stato (osservatore identità), cioè del tipo:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(C\hat{x}(t) - y(t))$$

i cui autovalori assegnabili risultino tutti reali ed uguali tra loro (se quelli assegnabili sono più di uno), con un tempo di assestamento (al 5%) di 1 secondo.

RISPOSTA:

Poiché il sistema è completamente osservabile (v. Esercizio 1) è possibile assegnare arbitrariamente tutti e tre gli autovalori dell'osservatore in catena chiusa. Gli autovalori desiderati sono determinali dalle specifiche dell'esercizio ricordando che il tempo di assestamento al 5% del modo corrispondente ad un autovalore reale è:

$$T_a = -\frac{3}{\lambda} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{T_a}$$

Pertanto, per avere $T_a = 1$ ed autovalori tutti uguali tra loro: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -3$.
Con tale scelta, il polinomio caratteristico desiderato per l'osservatore deve essere:

$$p_{des}(\lambda) = (\lambda + 3)^3 = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27$$

La matrice K dell'osservatore deve essere di dimensione 3x1, cioè $K = [k_1 \;\; k_2 \;\; k_3]^T$, pertanto la matrice dell'osservatore con i coefficienti incogniti di K e il polinomio caratteristico dell'osservatore risultano:

- Numeri di matricola che terminano con 0:

$$A + KC = \begin{bmatrix} k_1 - 1 & 1 & 0 \\ k_2 & -1 & 1 \\ k_3 + 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(\lambda I - A - KC) = \\ &= \lambda^3 + (3 - k_1)\lambda^2 + (3 - k_1 - 2k_1)\lambda - k_1 - k_2 - k_3 \end{aligned}$$

- Numeri di matricola che terminano con cifra pari (non 0):

$$A + KC = \begin{bmatrix} -1 & k_1 + 1 & 0 \\ 0 & k_2 - 1 & 1 \\ 1 & k_3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(\lambda I - A - KC) = \\ &= \lambda^3 + (3 - k_2)\lambda^2 + (3 - k_3 - 2k_2)\lambda - k_1 - k_2 - k_3 \end{aligned}$$

- Numeri di matricola che terminano con cifra dispari:

$$A + KC = \begin{bmatrix} -1 & 1 & k_1 \\ 0 & -1 & k_2 + 1 \\ 1 & 0 & k_3 - 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(\lambda I - A - KC) = \\ &= \lambda^3 + (3 - k_3)\lambda^2 + (3 - k_1 - 2k_3)\lambda - k_1 - k_2 - k_3 \end{aligned}$$

Uguagliando tra loro i coefficienti dei termini di pari grado nel polinomio caratteristico desiderato e nel polinomio caratteristico dell’osservatore si ottengono i 3 vincoli per determinare i 3 coefficienti incogniti di K, risolti i quali si ottengono le seguenti soluzioni per i tre casi:

- Numeri di matricola che terminano con 0:

$$K = [\ -6 \quad -12 \quad -9\ ]^T$$

- Numeri di matricola che terminano con cifra pari (non 0):

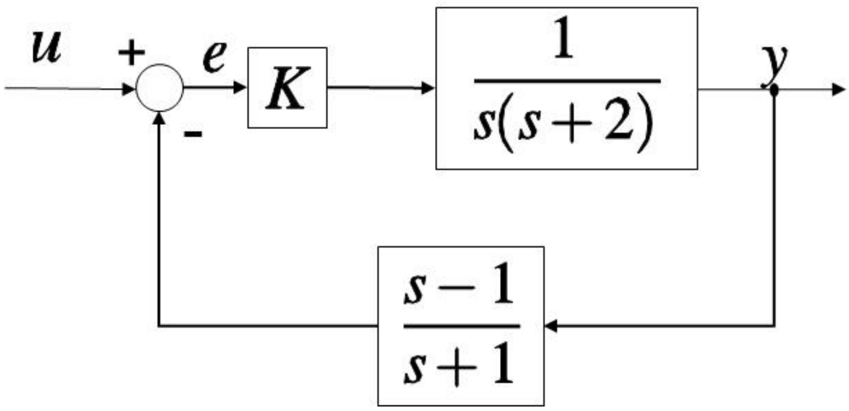
$$K = [\ -9 \quad -6 \quad -12\ ]^T$$

- Numeri di matricola che terminano con cifra dispari:

$$K = [\ -12 \quad -9 \quad -6\ ]^T$$

ESERCIZIO 3.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determinino i valori di K tali per cui il sistema chiuso in retroazione risulti essere asintoticamente stabile.

RISPOSTA:

Applicando il criterio di Routh al denominatore del sistema chiuso in retroazione:

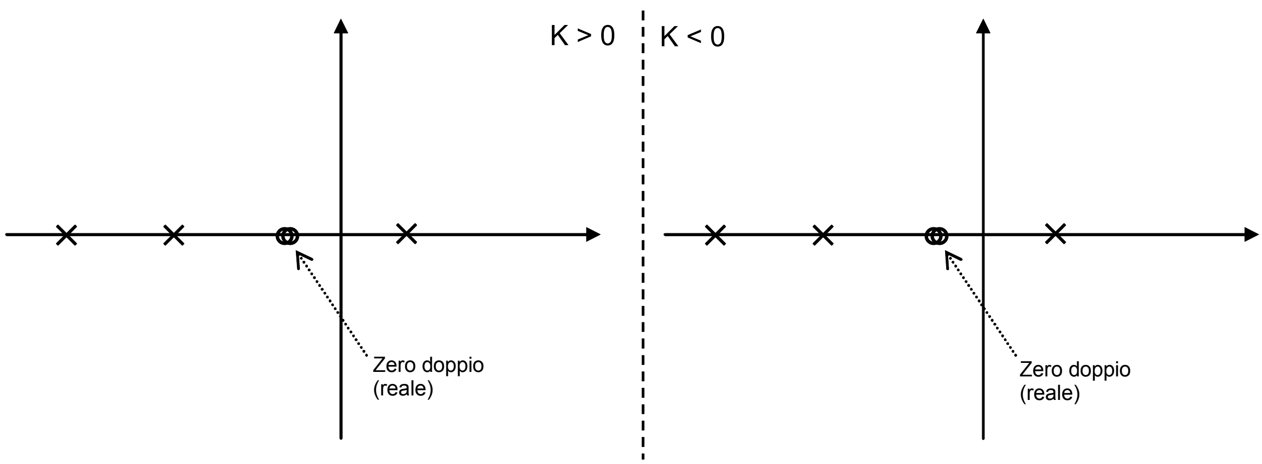
$$s^3 + 3s^2 + (2 + K)s - K$$

si ottiene che:

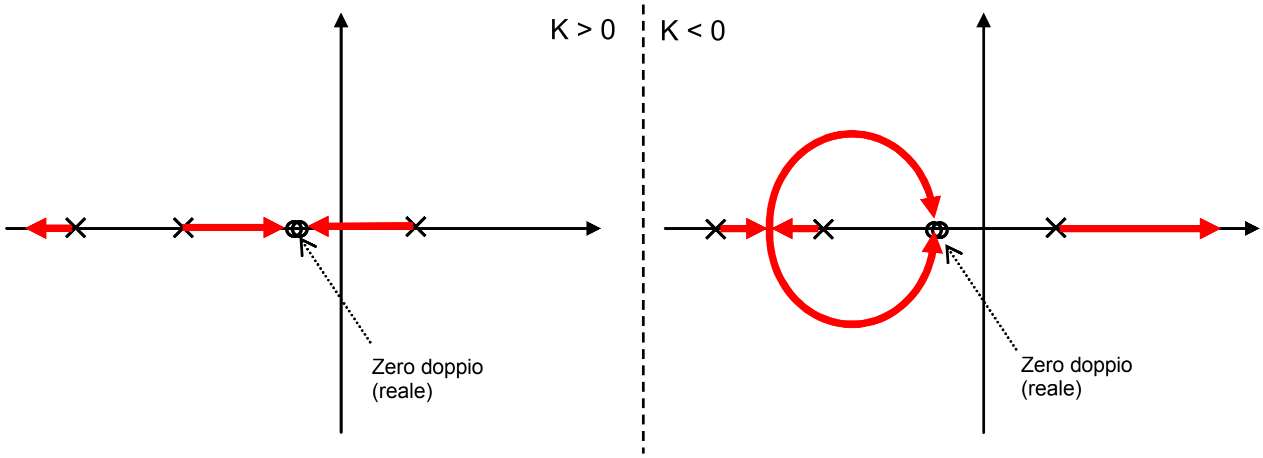
$$-3/2 < K < 0$$

ESERCIZIO 4.

Si tracci l'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema con poli (x) e zeri (o) della funzione di trasferimento d'anello come indicato in figura:

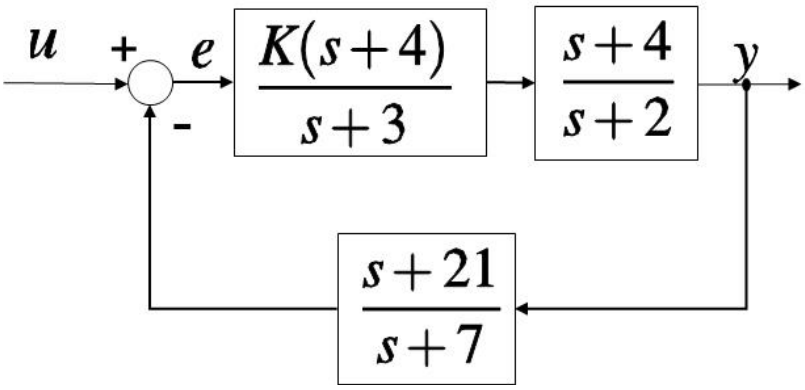


RISPOSTA:



ESERCIZIO 5.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determini il valore di K tale per cui il sistema risulti avere errore a regime pari a: $e(\infty) = 0,2$ con ingresso a gradino unitario ($U(s) = 1/s$)

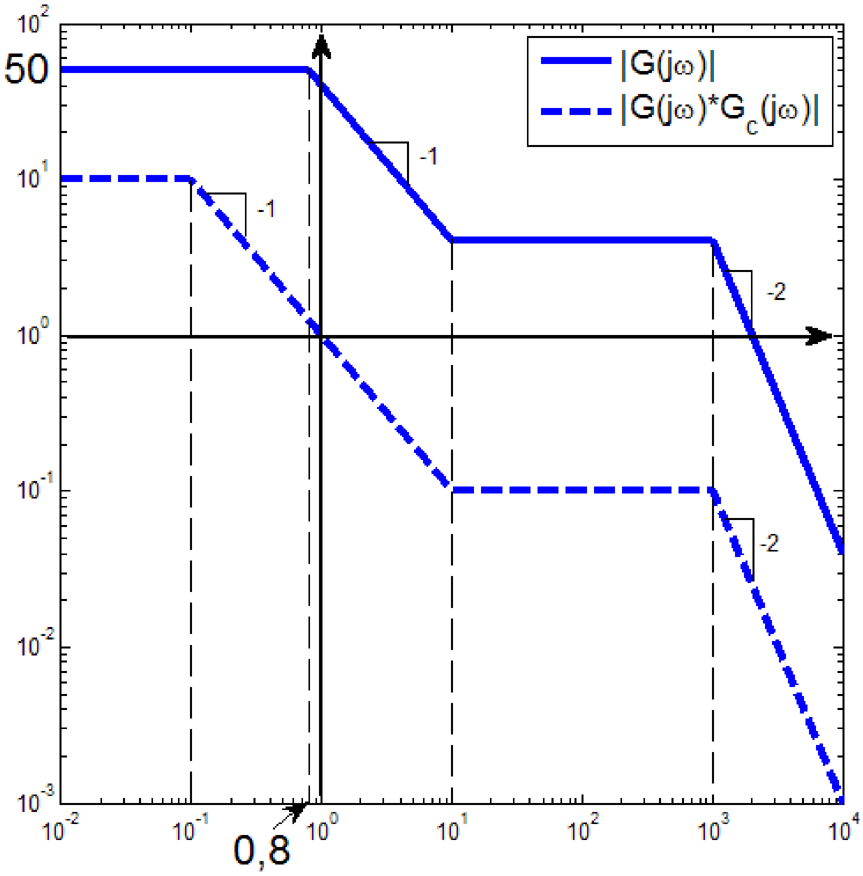
RISPOSTA:

Applicando il metodo descritto nella slide 44 della dispensa “FdA-2.4-StabilitaFdT-LuogoRadici_2017.pdf”, si ottiene:

$$K = 0,5 = 1/2$$

ESERCIZIO 6.

Dati i seguenti diagrammi di Bode delle ampiezze:



si determinino le funzioni di trasferimento **G(s)** e **G_c(s)**, supposte entrambe a fase minima.

RISPOSTA:

$$G(\mathrm{s}) = \frac{50(1+\frac{\mathrm{s}}{10})}{(1+\frac{\mathrm{s}}{0{,}8})(1+\frac{s}{1000})^2}$$

$$G_c(\mathrm{s}) = \frac{(1+\frac{\mathrm{s}}{0{,}8})}{5(1+\frac{\mathrm{s}}{10^{-1}})}$$

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.
La stabilità di un sistema lineare e stazionario:

O È funzione delle condizioni iniziali del sistema
X È funzione degli autovalori del sistema
O È funzione del rango della matrice di raggiungibilità del sistema
O È funzione del rango della matrice di osservabilità del sistema

DOMANDA 2.
Il sistema con un solo ingresso ed una sola uscita descritto dal modello $\dot{y}(t) = u(t)$:

O Non è fisicamente realizzabile
X È puramente dinamico
O Ha una funzione di trasferimento pari a G(s) = Y(s) / U(s) = s
X Ha una funzione di trasferimento pari a G(s) = Y(s) / U(s) = 1 / s

DOMANDA 3.
Una retroazione stato-ingresso in un sistema dinamico, lineare e stazionario, completamente controllabile ma non completamente osservabile, consente di:

X modificare arbitrariamente tutti gli autovalori del sistema
O modificare arbitrariamente solo gli autovalori della parte osservabile
X rendere il sistema asintoticamente stabile
O rendere il sistema stabile semplicemente, ma non asintoticamente

DOMANDA 4.
La funzione di trasferimento di un sistema dinamico a tempo continuo è:

$$G(s) = \frac{(s-2)(s+1)}{s(s+4)^2}$$

Tale funzione di trasferimento:

X è fisicamente realizzabile
O è asintoticamente stabile
X è semplicemente stabile
O è a fase minima

NOTA: *la presenza di uno zero reale positivo indica che la funzione considerata è a fase NON minima.*

DOMANDA 5.
L'errore a regime del sistema :

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+2)}$$

chiuso in retroazione unitaria negativa, quando in ingresso è presente una rampa unitaria:

$$u(s) = \frac{1}{s^2}$$

è pari a:

o $e(\infty) = 10$

o $e(\infty) = 1$

o $e(\infty) = 0,1$

x $e(\infty) = 0$

NOTA: *Il sistema considerato ha due poli nell'origine, si può quindi definire sistema di tipo 2. Tale tipo di sistema, se posto in retroazione unitaria negativa, annulla l'errore a regime per ingressi di tipo gradino e rampa, essendo di quest'ultima tipologia il segnale indicato dal testo.*

DOMANDA 6.

La seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 4s + 9}$$

Risulta avere coefficiente di smorzamento δ pari a:

o 1/3

x 2/3

o 1

o 3

DOMANDA 7.

Dato il diagramma di Bode delle ampiezze di una funzione $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma delle fasi:

o solo se il diagramma di Bode delle ampiezze presenta pendenze negative o nulle

x solo se la corrispondente funzione di trasferimento $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa

o solo se la corrispondente funzione di trasferimento $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa

o solo la corrispondente funzione di trasferimento $G(s)$ ha tutti gli zeri a parte reale negativa

DOMANDA 8.

Il sistema avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{K}{s^2}$$

può essere reso asintoticamente stabile con uno schema ad anello chiuso che includa:

O un regolatore P con guadagno (K_p) inferiore a 1
O un regolatore PI con guadagno del termine integrale (K_i) maggiore di 1
O un regolatore PI con guadagno del termine integrale (K_i) minore di 1
X un regolatore PD, indipendentemente dai relativi guadagni.

NOTA: *La G(s) in questione ha due poli nell'origine, perciò la sua risposta armonica (diagramma di Bode) ha fase = -180° per ogni pulsazione. Ciò significa che per qualsiasi valore di K il Margine di Fase sarà nullo ed il sistema chiuso in retroazione marginalmente (i.e. semplicemente) stabile. Con un regolatore proporzionale si otterrebbe solo una modifica del guadagno complessivo (i.e. $K*K_p$), quindi non modificherebbe la condizione di stabilità semplice. Per ottenere un Margine di Fase positivo e quindi la stabilità asintotica è necessario un regolatore che introduca un anticipo di fase, cioè un regolatore PD, con qualunque configurazione di guadagni. Un regolatore PI invece, con qualunque configurazione di guadagno, introdurrebbe un ritardo di fase e pertanto renderebbe il sistema in retroazione instabile.*