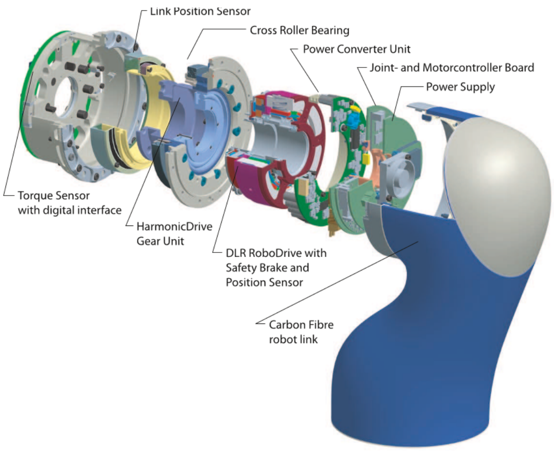
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (9 CFU)

Prova scritta – 13 luglio 2017

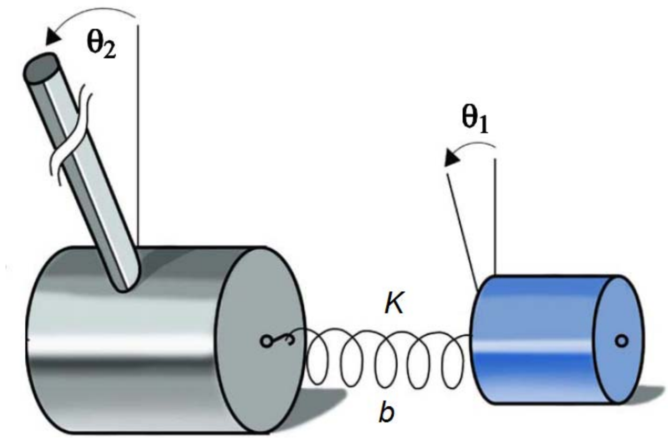
SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

I moderni robot industriali con funzionalità *collaborative* (i.e. co-esistenza e interazione sicura tra umani e robot) sono spesso dotati di accoppiamenti meccanici elastici tra motori e parti in movimento, come ad esempio nel Light-Weight Robot (LWR) progettato dall’ente di ricerca tedesco DLR. La figura seguente mostra un esploso dettagliato del progetto meccanico (sinistra) e uno schema semplificato della trasmissione del moto tra motore e giunto:



(figura dal sito DLR – Institute of Robotics and Mechatronics)



Dal bilancio delle forze generalizzate applicate alle due parti in moto (i.e. rotore del motore elettrico e braccio), si ottengono le seguenti equazioni differenziali:

$$J_1\dot{\omega}_1 = -K(\theta_1 - \theta_2) - b(\omega_1 - \omega_2) + K_m I$$

$$J_2\dot{\omega}_2 = K(\theta_1 - \theta_2) + b(\omega_1 - \omega_2)$$

nella quale $\omega_1 = \dot{\theta}_1$ e $\omega_2 = \dot{\theta}_2$, J_1 e J_2 sono i momenti di inerzia delle due parti rotanti, K e b sono rispettivamente l’elasticità e la viscosità dell’accoppiamento meccanico, mentre I e K_m sono rispettivamente la corrente elettrica nel motore e la costante di coppia di quest’ultimo.

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, <u>di ordine 3</u> e del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = (\theta_1 - \theta_2);\ x_2 = \omega_1;\ x_3 = \omega_2;\ u = I;\ y = x_1$$

RISPOSTA:

Occorre

- sostituire la notazione delle variabili di stato, ingresso e uscita
- notare che la derivata della prima variabile di stato corrisponde alla differenza tra la seconda e la terza variabile di stato, in quanto:

  $$\dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = \omega_1 - \omega_2$$

Si ottengono così le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= && x_2 && - x_3 & \\
\dot{x}_2 &= -\frac{K}{J_1}x_1 && -\frac{b}{J_1}x_2 && +\frac{b}{J_1}x_3 && +\frac{K_m}{J_1}u \\
\dot{x}_3 &= \frac{K}{J_2}x_1 && +\frac{b}{J_2}x_2 && -\frac{b}{J_2}x_3 &
\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{K}{J_1} & -\frac{b}{J_1} & \frac{b}{J_1} \\ \frac{K}{J_2} & \frac{b}{J_2} & -\frac{b}{J_2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{J_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y = x_1$, poiché tale uscita non dipende dall'ingresso D = 0 (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la variabile dal vettore di stato è C = [1 0 0].

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

J_1 = 0,2; J_2 = 0,1; K = 2; b = 0,1; K_m = 0,8;

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente controllabile, calcolando la matrice di raggiungibilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema diventano:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -10 & -1/2 & 1/2 \\ 20 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 4 & -2 & -37 \\ 0 & 4 & 74 \end{bmatrix}$$

rango(*P*) = 3

Perciò il sistema **E'** ~~/ NON E'~~ completamente controllabile

---

ESERCIZIO 3.

Per il sistema con i valori numerici indicati nell'Esercizio 2, si progetti una retroazione stato-ingresso (i.e. $u = H\,x + v$), in modo tale che:

- gli autovalori assegnabili del sistema chiuso in retroazione siano tutti reali e distinti;
- il più lento di tali autovalori abbia tempo di assestamento (al 5%) di 0,6 secondi e gli altri assegnabili abbiano valori assoluti progressivi di una unità (es. -5, -6, ecc.).

RISPOSTA:

Poiché il sistema è completamente controllabile (v. Esercizio 2) è possibile assegnare arbitrariamente tutti e tre gli autovalori del sistema chiuso in retroazione con una retroazione stato-ingresso. Gli autovalori desiderati sono determinali dalle specifiche dell'esercizio ricordando che il tempo di assestamento al 5% del modo corrispondente ad un autovalore reale è:

$$T_a = -\frac{3}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{T_a}$$

Pertanto, per avere $T_a = 0{,}6$, l'autovalore più lento deve essere pari a $\lambda_1 = -5$, mentre gli altri devono essere: $\lambda_2 = -6$, $\lambda_3 = -7$.

Con tale scelta, il <u>polinomio caratteristico desiderato</u> per il sistema chiuso in retroazione deve essere:

$$\begin{aligned} p_{des}(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) = \\ &= (\lambda+5)(\lambda+6)(\lambda+7) = \lambda^3 + 18\lambda^2 + 107\lambda + 210 \end{aligned}$$

La matrice H del controllore deve essere di dimensione 1x3, cioè $H = [h_1 \quad h_2 \quad h_3]$, pertanto la matrice del sistema chiuso in retrazione con i coefficienti incogniti di H risulta:

$$A + BH = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4h_1 - 10 & 4h_2 - 1/2 & 4h_3 + 1/2 \\ 20 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza, il <u>polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione</u> risulta:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(\lambda I - A - BH) = \\ &= \lambda^3 + (3/2 - 4h_2)\lambda^2 + (30 - 4h_1 - 4h_2 - 4h_3)\lambda - 80h_2 - 80h_3 \end{aligned}$$

Uguagliando tra loro i coefficienti dei termini di pari grado nel polinomio caratteristico desiderato e nel polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione si ottengono i 3 vincoli per determinare i 3 coefficienti incogniti di H:

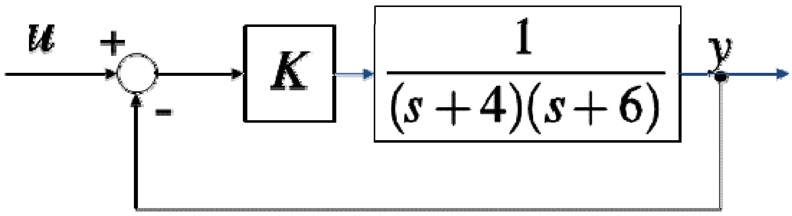
$$\begin{aligned} 3/2 - 4h_2 &= 18 \\ 30 - 4h_1 - 4h_2 - 4h_3 &= 107 \\ -80h_2 - 80h_3 &= 210 \end{aligned}$$

la cui soluzione finale è:

$$H = [\ -133/8 \quad -33/8 \quad 3/2\ ]$$

ESERCIZIO 4.

Dato lo schema a blocchi della seguente figura



si progetti il valore di K (>0) in modo che il sistema ad anello chiuso abbia due poli entrambi pari a $-p$, calcolando anche il valore di p(>0).

RISPOSTA:
Il denominatore ad anello chiuso del sistema è:

$$D_{c.l.}(s) = s^2 + 10s + 24 + K$$

Affinchè tale denominatore abbia due poli in a $-p$ è necessario che esso sia uguagliato al seguente denominatore desiderato:

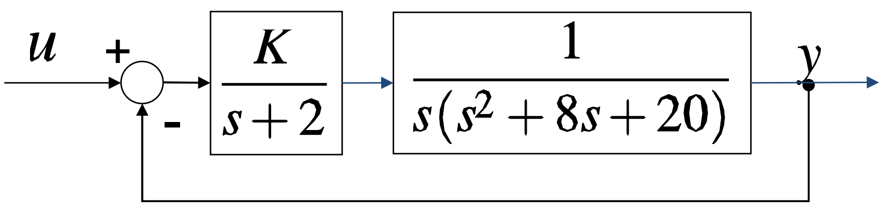
$$D_{des}(s) = (s+p)(s+p) = s^2 + 2ps + p^2$$

Uguagliando i coefficienti dei termini di primo grado e i termini costanti si ottengono due equazioni di vincolo che permettono di determinare prima p e poi K, con il seguente risultato:

$K = 1$ $\qquad\qquad$ $p = 5$

ESERCIZIO 5.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:

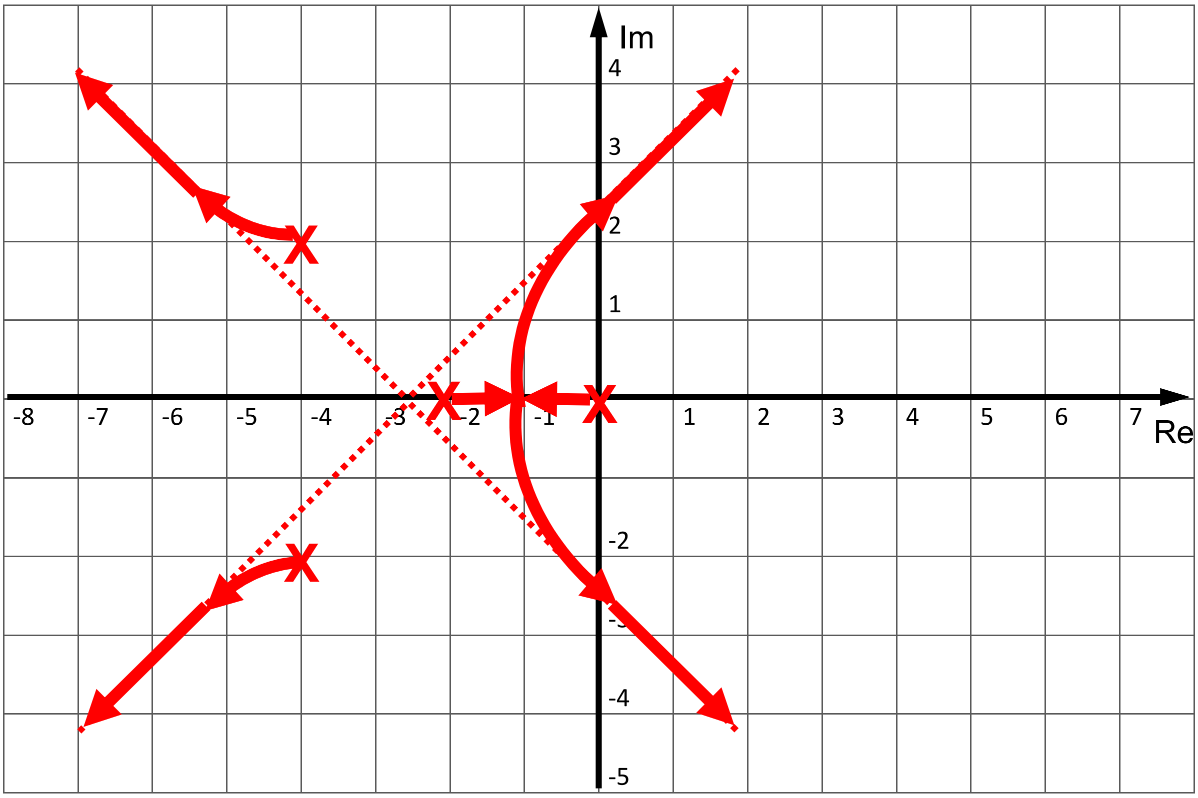


si disegni il corrispondente luogo delle radici valido per $K > 0$ (luogo diretto).

RISPOSTA:

NOTA: la funzione di trasferimento di anello non ha alcuno zero ($n_z = 0$), ma ha quattro poli ($n_p = 4$) rispettivamente in 0, -2, -4-2i e -4+2i. Pertanto il luogo ha quattro asintoti (numero asintoti = $n_p - n_z = 4$), disposti con angoli di $\pi/4$, $3/4*\pi$, $5/4*\pi$ e $7/4*\pi$ rispetto all'asse reale. Il centro degli asintoti è il punto sull'asse reale con coordinata:

$$\sigma_{asintoti} = \frac{1}{n_p - n_z}\left(\sum_{i=1}^{n_p} p_i - \sum_{i=1}^{n_z} z_i\right) = -5/2$$



ESERCIZIO 6.

Dato il sistema dal diagramma a blocchi dell'Esercizio 5, si determini l'intervallo di valori di K per i quali il sistema risulti asintoticamente stabile.

RISPOSTA:

L'intervallo di stabilità per i valori di K si determina applicando il criterio di Routh al polinomio a denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso:

$$D_{cl}(s) = s^4 + 10s^3 + 36s^2 + 40s + K$$

Dalla tabella di Routh si ottengono due vincoli per K, cioè $K > 0$ e $K < 128$, perciò:

$$0 < K < 128$$

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.
La forma minima per un sistema dinamico, lineare e stazionario, risulta di ordine minore a quello del sistema stesso quando:
X Il sistema non è completamente osservabile
O Il sistema non è completamente raggiungibile
X Esiste una parte non raggiungibile e non osservabile
O Sempre

DOMANDA 2.
Due sistemi dinamici, lineari e stazionari, asintoticamente stabili, collegati in cascata danno luogo ad un sistema:
O non completamente controllabile
O non completamente osservabile
X asintoticamente stabile
O semplicemente stabile

DOMANDA 3.
Il polinomio caratteristico di un sistema dinamico lineare, stazionario e tempo continuo, è:

$$\lambda^3(\lambda+2)$$

Il sistema:
X ha un modo semplicemente stabile
X ha un modo asintoticamente stabili
O è instabile
X può essere instabile

DOMANDA 4.
La matrice di transizione del sistema dinamico: $\dot{x}(t) = ax(t) \quad (x(t) \in \mathbb{R})$
risulta essere:

o e^{0t}

o e^{-at}

x e^{at}

o 0

DOMANDA 5.
La funzione di trasferimento del sistema il cui modello è rappresentato dalla seguente equazione differenziale:

$$\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

è:

X fisicamente realizzabile
X asintoticamente stabile
O semplicemente stabile
O a fase non minima

NOTA: *La funzione di trasferimento G(s) si ottiene applicando la trasformazione secondo Laplace all'equazione differenziale, ricordando in particolare il teorema della derivata:*

$$s\,Y(s) + Y(s) = U(s) \Rightarrow G(s) = Y(s)/U(s) = 1/(s+1).$$

Tale funzione di trasferimento è fisicamente realizzabile ed ha un polo in -1, perciò è asintoticamente stabile.

DOMANDA 6.

Il tempo di salita T_s della risposta al gradino di un sistema retroazionato è definito come:
O il tempo necessario per raggiungere il 50% del valore finale
O il tempo necessario per raggiungere il 90% del valore finale
X il tempo necessario per passare dal 10% al 90% del valore finale
O il tempo necessario perché l'uscita rimanga entro il ±5% del valore finale

DOMANDA 7.

Due sistemi di tipo 0, entrambi asintoticamente stabili, aventi la stessa costante di posizione K_p, se vengono posti in retroazione negativa unitaria:
O Generano sistemi stabili ad anello chiuso
O Presentano errore a regime nullo per ingresso a gradino
X Presentano lo stesso errore a regime per lo stesso ingresso a gradino
O Presentano errore a regime nullo per ingresso a rampa

DOMANDA 8.

In una rete anticipatrice, all'aumentare di ω da zero all'infinito:
O agisce prima il polo e poi lo zero
X agisce prima lo zero e poi il polo
X la fase è sempre positiva
O la fase è sempre negativa