

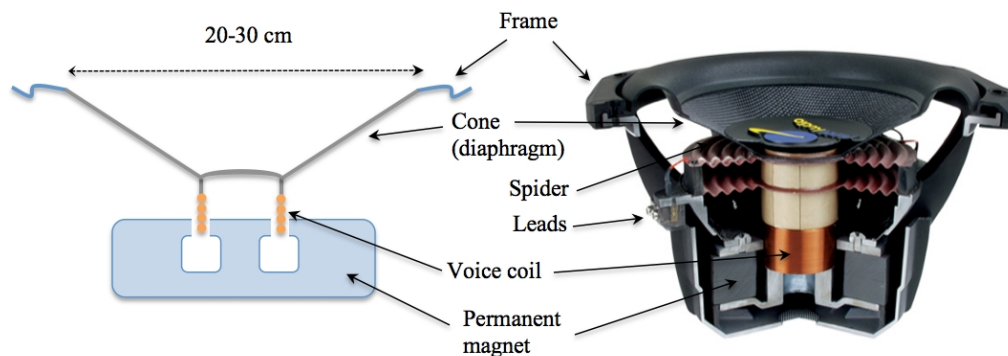
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (6 crediti) / “CONTROLLI AUTOMATICI”

Prova scritta – 9 giugno 2017

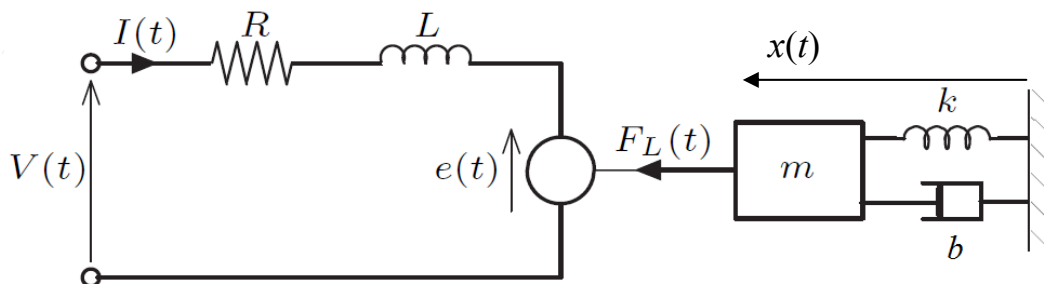
SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si consideri un altoparlante ad attrazione magnetica per la riproduzione sonora, rappresentato dalla seguente figura:



Tale dispositivo è un sistema elettromeccanico che può essere schematizzato dal diagramma seguente, che evidenzia la presenza di un circuito elettrico RL e di un gruppo massa-molla-smorzatore azionato dalla forza di attrazione magnetica F_L :



Le equazioni differenziali che descrivono il modello dinamico del sistema sono le seguenti:

$$V = RI + L\dot{I} + k_A \dot{x}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + k_E x = k_A I$$

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = I; x_2 = x; x_3 = \dot{x}; u = V; y = x_2$$

RISPOSTA:

Occorre:

- sostituire la notazione delle variabili di stato, ingresso e uscita
- notare che la derivata della seconda variabile di stato corrisponde alla terza variabile di stato: $\dot{x}_2 = x_3$

Si ottengono così le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{R}{L}x_1 - \frac{k_A}{L}x_3 + \frac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \frac{k_A}{m}x_1 - \frac{k_E}{m}x_2 - \frac{b}{m}x_3\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & -\frac{k_A}{L} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_A}{m} & -\frac{k_E}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y=x_2$: poiché tale uscita non dipende dall'ingresso $D = 0$ (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1×3 che estrae la prima variabile dal vettore di stato è:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$m = 0,1; \quad b = 0,4; \quad k_E = 0,6; \quad R = 4; \quad L = 0,5; \quad k_A = 0,5$$

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente controllabile, calcolando la matrice di raggiungibilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema diventano:

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -6 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$P = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 2 & -16 & 118 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & -120 \end{bmatrix}$$

$$\text{rango}(P) = 3$$

Perciò il sistema **E'** ~~NON E'~~ completamente controllabile

ESERCIZIO 3.

Per il sistema con i valori numerici indicati nell'Esercizio 2, si progetti una retroazione stato-ingresso (i.e. $u = Hx + v$), in modo tale che:

- gli autovalori assegnabili del sistema chiuso in retroazione siano tutti reali e distinti;
- il più lento di tali autovalori abbia tempo di assestamento (al 5%) di 0,3 secondi e gli altri assegnabili abbiano valori assoluti progressivi di una unità (es. -10, -11, ecc.).

RISPOSTA:

Poiché il sistema è completamente controllabile (v. Esercizio 2) è possibile assegnare arbitrariamente tutti e tre gli autovalori del sistema chiuso in retroazione con una retroazione stato-ingresso. Gli autovalori desiderati sono determinati dalle specifiche dell'esercizio ricordando che il tempo di assestamento al 5% del modo corrispondente ad un autovalore reale è:

$$T_a = -\frac{3}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{T_a}$$

Pertanto, per avere $T_a = 0,3$, l'autovalore più lento deve essere pari a $\lambda_1 = -10$, mentre gli altri devono essere: $\lambda_2 = -11$, $\lambda_3 = -12$.

Con tale scelta, il polinomio caratteristico desiderato per il sistema chiuso in retroazione deve essere:

$$\begin{aligned} p_{des}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = \\ &= (\lambda + 10)(\lambda + 11)(\lambda + 12) = \lambda^3 + 33\lambda^2 + 362\lambda + 1320 \end{aligned}$$

La matrice H del controllore deve essere di dimensione 1×3 , cioè $H = [h_1 \ h_2 \ h_3]$, pertanto la matrice del sistema chiuso in retroazione con i coefficienti incogniti di H risulta:

$$A + BH = \begin{bmatrix} 2h_1 - 8 & 2h_2 & 2h_3 - 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza, il polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione risulta:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A - BH) = \\ &= \lambda^3 + (12 - 2h_1)\lambda^2 + (43 - 10h_3 - 8h_1)\lambda + 48 - 10h_2 - 12h_1 \end{aligned}$$

Uguagliando tra loro i coefficienti dei termini di pari grado nel polinomio caratteristico desiderato e nel polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione si ottengono i 3 vincoli per determinare i 3 coefficienti incogniti di H :

$$\begin{aligned} 12 - 2h_1 &= 33 \\ 43 - 10h_3 - 8h_1 &= 362 \\ 48 - 10h_2 - 12h_1 &= 1320 \end{aligned}$$

la cui soluzione finale è:

$$H = [\ -21/2 \quad -573/5 \quad -47/2 \]$$

ESERCIZIO 4.

Si calcoli la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema avente la seguente risposta impulsiva:

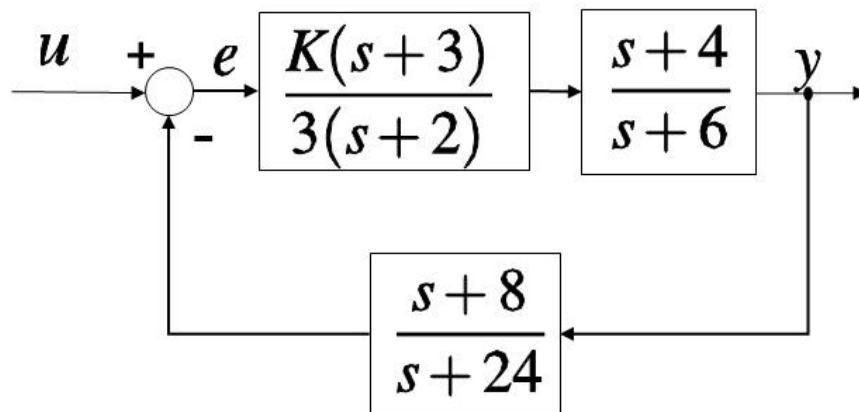
$$W(t) = 2e^{-4t} + 5e^{-2t}$$

RISPOSTA:

$$G(s) = \frac{2}{s+4} + \frac{5}{s+2} = \frac{7s+24}{(s+4)(s+2)}$$

ESERCIZIO 5.

Dato il sistema descritto dal seguente schema a blocchi:



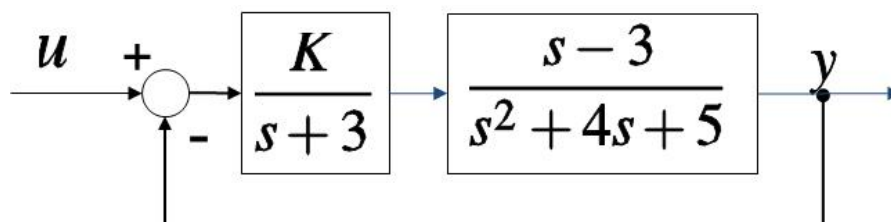
si progetti il valore di K affinché risulti $e(\infty) = 0.1$ con $u(s) = 1/s$ (gradino unitario).

RISPOSTA:

$$K = 81$$

ESERCIZIO 6.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:

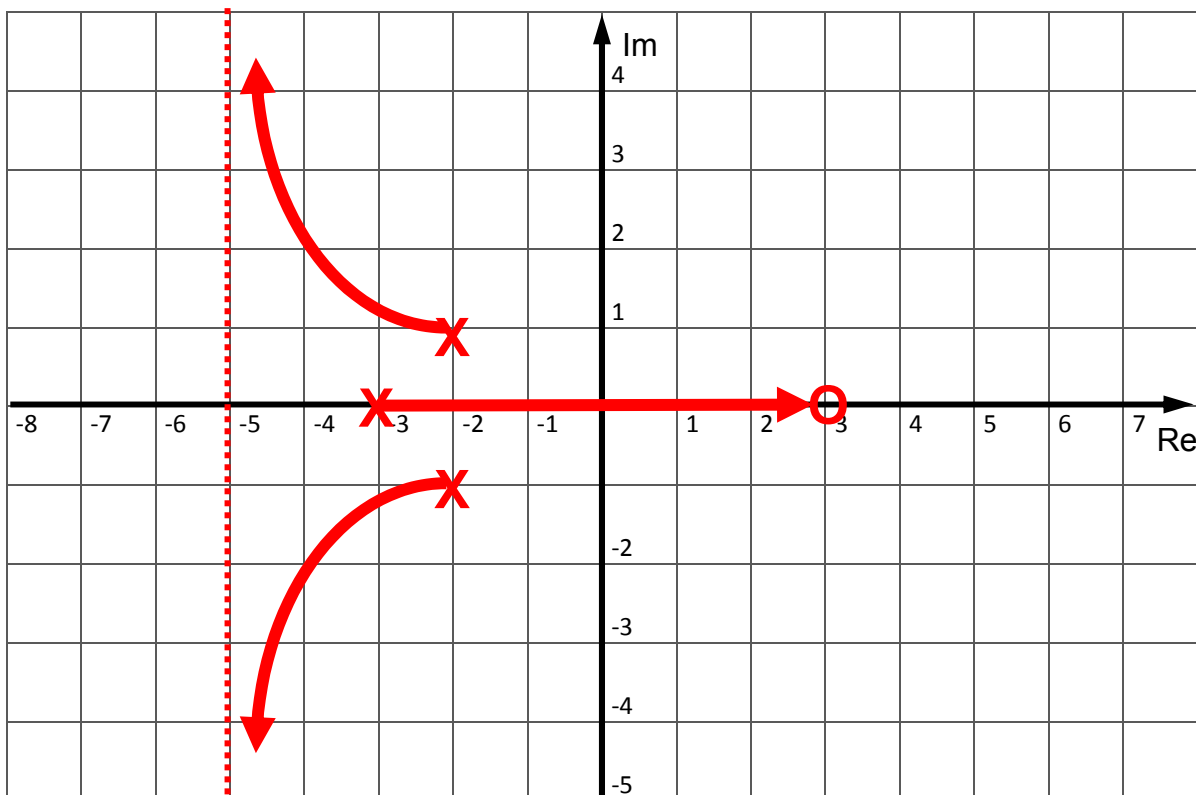


si disegni il corrispondente luogo delle radici valido per $K > 0$ (luogo diretto).

RISPOSTA:

NOTA: la funzione di trasferimento di anello ha uno zero ($n_z = 1$) in +3 e tre poli ($n_p = 3$) rispettivamente in -3, -2+i e -2-i pertanto il luogo ha due asintoti (numero asintoti = $n_p - n_z = 2$), disposti con angoli di $\pi/3$ e $3/2\pi$ rispetto all'asse reale. Il centro degli asintoti è il punto sull'asse reale con coordinata:

$$\sigma_{asintoti} = \frac{1}{n_p - n_z} \left(\sum_{i=1}^{n_p} p_i - \sum_{i=1}^{n_z} z_i \right) = -5$$



ESERCIZIO 7.

Dato il sistema dal diagramma a blocchi dell'Esercizio 4, si determini il valore di $K > 0$ per cui il sistema risulti semplicemente stabile. Si specifichi inoltre se per tale valore di K il sistema risulti avere un polo nullo oppure una coppia di poli puramente immaginari (senza necessariamente calcolarli).

RISPOSTA:

Il luogo delle radici disegnato in risposta all'Esercizio 4 dimostra in effetti che superando un determinato valore di K il sistema in retroazione diventa instabile. Il valore limite di K che corrisponde alla condizione in cui il sistema è semplicemente stabile (o marginalmente

stabile) si determina applicando il criterio di Routh al polinomio a denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso:

$$D_d(s) = s^3 + 7s^2 + (17 + K)s + 15 - 3K$$

si verifica che i due estremi dell'intervallo di valori di K per cui il sistema in retroazione risulta stabile sono -10,4 e 5. Quest'ultimo valore, essendo il primo escluso dal vincolo del testo, determina la prima parte della risposta, cioè:

$$K = 5$$

Sostituendo tale valore, si può facilmente verificare che:

$$D_d(s) = s(s^3 + 8s^2 + 23)$$

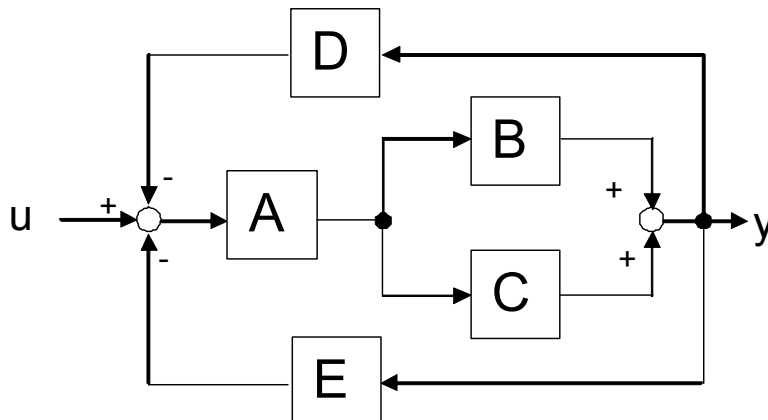
cioè che il sistema in retroazione ha un polo nullo.

☒ POLO NULLO

☐ POLI PURAMENTE IMMAGINARI

ESERCIZIO 8.

Si determini la funzione di trasferimento del seguente diagramma a blocchi:



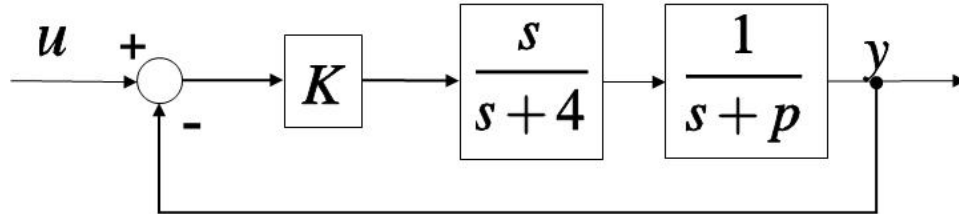
RISPOSTA:

NOTA: i due rami di retroazione passanti per D e per E hanno la stessa diramazione di partenza e lo stesso blocco sommatore di destinazione, pertanto sono rami in parallelo tra loro.

$$Y / U = [A (B+C)] / [1 + A (B+C)(D+E)]$$

ESERCIZIO 9.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determinino i valori di K e p tali che il sistema ad anello chiuso risulti avere pulsazione naturale $\omega_n = 4$ e tempo di assestamento $T_a = 1$ secondo.

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta $= s^2 + (K + p + 4)s + 4p$.

Confrontando tale polinomio con il denominatore tipico dei sistemi del secondo ordine $s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2$, si può notare che il coefficiente del terzo termine corrisponde a $\omega_n^2 = 4p = 16$, da cui si ricava immediatamente $p = 4$.

Il tempo di assestamento di un sistema del secondo ordine è noto essere:

$T_a = 3 / \delta \omega_n$, pertanto ipotizzando che la specifica su ω_n sia rispettata, si ottiene che deve essere $\delta = 3/4$. Dati quindi i valori di p e δ e confrontando il coefficiente del secondo termine tipico con quello ottenuto in funzione di K e p , si ottiene $K = -2$, pertanto il risultato finale è

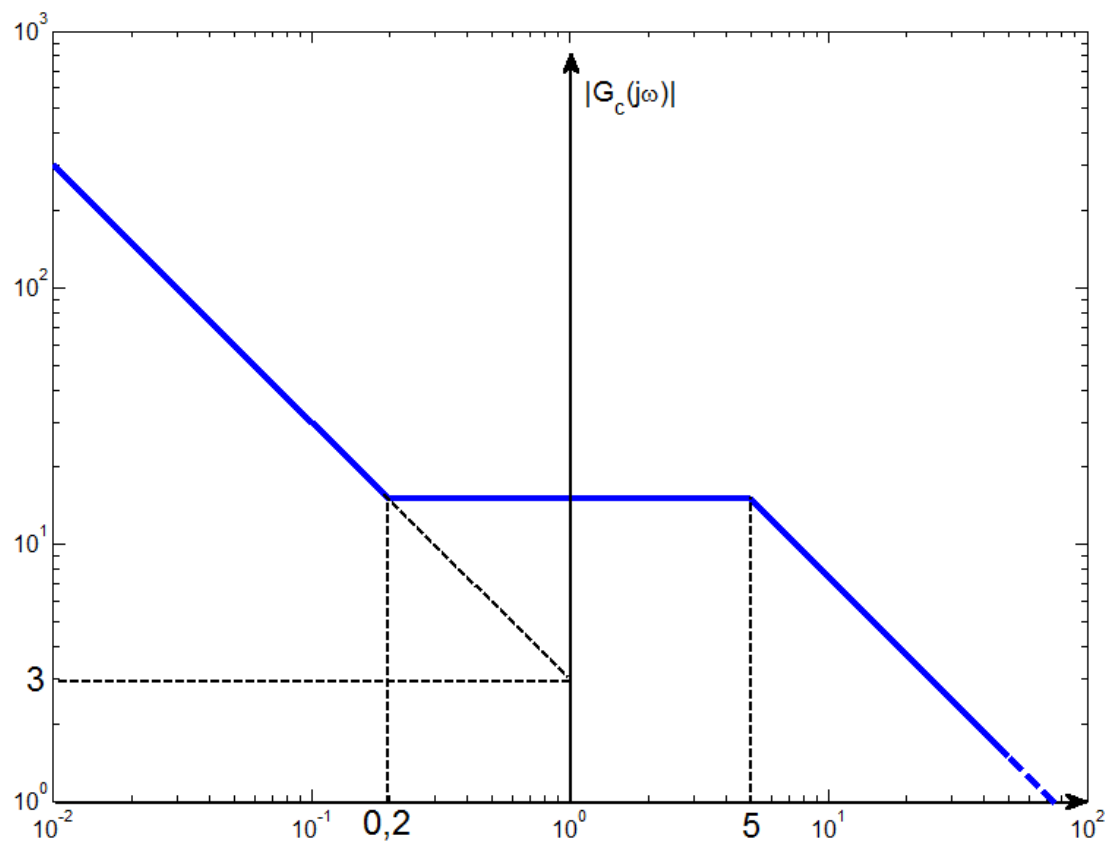
$$K = -2 \qquad p = 4$$

ESERCIZIO 10.

Un controllore è stato progettato con una costante di guadagno, un integratore puro ed una rete anticipatrice:

$$G_c(s) = \frac{K(1+\tau s)}{s(1+\alpha\tau s)}$$

Tale controllore, supposto a fase minima, ha il seguente diagramma di Bode:



Si determino dal diagramma i parametri del controllore:

RISPOSTA:

$$K = 3 \quad \tau = 5 \quad \alpha = 0,04$$
