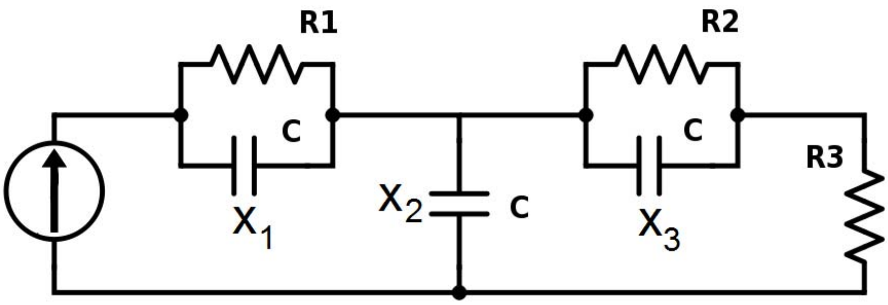
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (6 CFU) / “CONTROLLI AUTOMATICI”

Prova scritta – 8 settembre 2017

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si consideri il seguente circuito elettrico passivo:



Applicando le leggi di Kirchhoff e le formule di base dei componenti RLC, si ottiene il seguente modello matematico:

$$C\dot{x}_1 + \frac{x_1}{R_1} = u$$

$$C\dot{x}_2 + \frac{x_2 - x_3}{R_3} = u$$

$$C\dot{x}_3 - \frac{x_2 - x_3}{R_3} + \boxed{\frac{x_2}{R_2}} = 0$$

NOTA: con l’applicazione corretta delle leggi di Kirchhoff il termine evidenziato dovrebbe essere x_3/R_2. Poiché il testo è stato presentato in sede di esame con tale errore di battitura, la soluzione proposta nel seguito verrà sviluppata come se le equazioni di partenza fossero corrette.

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

considerando ovvie scelte per gli elementi del vettore di stato e per l’ingresso, mentre l’uscita sia fissata $y = (x_2 - x_3)$;.

RISPOSTA:

Le equazioni fornite sono già predisposte per una immediata riscrittura in forma compatibile con la definizione delle matrici di sistema A, B, C, D:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{1}{R_1 C}x_1 && && +\frac{1}{C}u \\
\dot{x}_2 &= && -\frac{1}{R_3 C}x_2 && +\frac{1}{R_3 C}x_3 && +\frac{1}{C}u \\
\dot{x}_3 &= && \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_2}\right)x_2 && -\frac{1}{R_3 C}x_3
\end{aligned}
$$

Dalle quali risulta appunto:

$$
A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_3 C} & \frac{1}{R_3 C} \\ 0 & \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_2}\right) & -\frac{1}{R_3 C} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

e poiché $y = (x_1 - x_2)$, l'uscita non dipende dall'ingresso ($D = 0$, sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la prima variabile dal vettore di stato è:

$$
C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}
$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$C = 0{,}1$; $R_1 = 10$; $R_2 = 5$; $R_3 = 20$;

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente osservabile, calcolando la matrice di osservabilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema, tranne C che non dipende dai parametri, diventano:

$$
A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Pertanto:

$$Q^T = \left[C^T \ A^T C^T \ (A^T)^2 C^T \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

rango(Q^T) = 2

Perciò il sistema ~~E' /~~ **NON E'** completamente osservabile.

ESERCIZIO 3.

Per il sistema con i valori numerici indicati nell'Esercizio 2, si progetti un osservatore in catena chiusa dello stato (osservatore identità), cioè del tipo:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(C\hat{x}(t) - y(t))$$

i cui autovalori assegnabili risultino tutti reali ed uguali tra loro (se quelli assegnabili sono più di uno), con valore pari a -5.

RISPOSTA:

La matrice K dell'osservatore deve essere di dimensione 3x1, cioè $K = [k_1 \ \ k_2 \ \ k_3]^T$, pertanto la matrice dell'osservatore con i coefficienti incogniti di K risulta:

$$A + KC = \begin{bmatrix} -1 & k_1 & -k_1 \\ 0 & k_2 - 1/2 & 1/2 - k_2 \\ 0 & k_3 - 3/2 & -k_3 - 1/2 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza, il <u>polinomio caratteristico dell'osservatore</u> risulta:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(\lambda I - A - KC) = \\ &= (\lambda+1)(\lambda - k_2 + 2)(\lambda + k_3 + 3) - (\lambda+1)(\lambda + k_2 + 2)(\lambda - k_3 + 2) \end{aligned}$$

Si noti che prima di espandere i prodotti tra i termini, si può raccogliere un polinomio di NON dipendente dai coefficienti di K ed un polinomio di secondo grado dipendente da k_2 e k_3:

$$p(\lambda) = (\lambda+1)\left[\lambda^2 + \lambda(1 - k_2 + k_3) + 1 - 2k_2)\right] = p'(\lambda)p''(\lambda)$$

Da questo (i.e. il grado del polinomio dipendente da coefficienti di K) si deduce che vi sono solo due autovalori assegnabili, condizione dovuta al rango della matrice di osservabilità pari a 2.

NOTA: allo stesso risultato si poteva arrivare anche osservando la struttura triangolare a blocchi della matrice dell'osservatore:

$$A + KC = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & k_1 & -k_1 \\ \hline \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}} & k_2 - 1/2 & 1/2 - k_2 \\ & k_3 - 3/2 & -k_3 - 1/2 \end{array}\right]$$

dalla quale si deduce che gli autovalori della matrice sono quelli del blocco 1x1 in alto a sinistra (i.e. -1, appunto) e del blocco 2x2 in basso a destra, l'unico nel quale compaiono coefficienti incogniti.

Imporre che questi due autovalori siano entrambi uguali a -5 significa forzare il polinomio p''(λ) ad essere uguale ad un polinomio ottenuto come segue:

$$p_{des}(\lambda) = (\lambda + 5)^2 = \lambda^2 + 10\lambda + 25$$

Uguagliando tra loro i coefficienti di pari grado del polinomio desiderato e del polinomio dipendente dai coefficienti incogniti p''(λ) si ottiene il seguente sistema di vincoli:

$$\begin{aligned} 1 - k_2 + k_3 &= 10 \\ 1 - 2k_2 &= 25 \end{aligned}$$

La cui soluzione è k_2 = -12 e k_3 = -3. Poiché k_1 è ininfluente sull'assegnazione degli autovalori, può assumere un valore arbitrario, e la soluzione finale è:

$$K = [\text{ arbitrario} \quad -12 \quad -3]^T$$

ESERCIZIO 4.

Dato il seguente sistema dinamico:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x(t); \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Si calcoli il valore della risposta *y(t)* all'istante *t = 1* secondo, a partire dallo stato iniziale:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

RISPOSTA:

Per calcolare il valore della risposta è necessario determinare anzitutto la matrice esponenziale di A, applicando il metodo del polinomio interpolante, che risulta:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & (e^{-2t} - e^{-3t}) \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Dopodichè, poiché y(t) = [1 0] x(t), per calcolare la risposta all'istante 1 secondo è necessario calcolare lo stato allo stesso istante:

$$x(1) = e^{A\,1}x(0) =$$

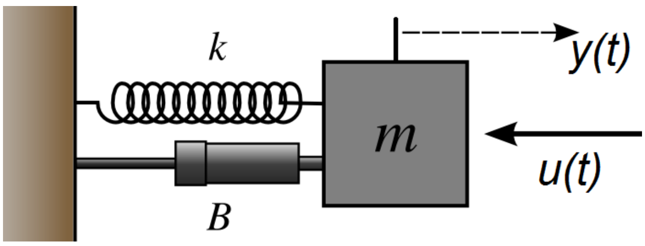
$$= \begin{bmatrix} e^{-2} & (e^{-2} - e^{-3}) \\ 0 & e^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(e^{-2} - e^{-3}) \\ 2e^{-3} \end{bmatrix}$$

L'uscita corrisponde all'elemento nella prima riga dello stato ottenuto:

$$y(1) = 2(e^{-2} - e^{-3}) = 0,1711$$

ESERCIZIO 5.

Si consideri il seguente sistema massa-molla-smorzatore (ingresso = forza applicata, uscita = spostamento della massa):



per il quale il modello matematico nel dominio del tempo risulta essere:

$$2\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 8y(t) = u(t)$$

Si determinino:

- la corrispondente funzione di trasferimento $G(s)$ con la trasformata di Laplace
- il coefficiente di smorzamento δ di tale funzione di trasferimento
- il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino.

RISPOSTA:

Il modello matematico fornito, applicando la regola della derivata per le trasformate di Laplace, diventa:

$$2s^2Y(s) + 3sY(s) + 8Y(s) = U(s)$$

Dal quale si deduce la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{2s^2+3s+8}$$

Per determinare il coefficiente di smorzamento si faccia riferimento alla formulazione standard del denominatore di un sistema del secondo ordine (**NOTA**: non si considera il numeratore poiché esso influenza solo il guadagno statico G(0) della funzione e non l'andamento nel tempo della risposta):

$$G(s) = \frac{\cdots}{s^2 + 2\,\delta\,\omega_n\,s + \omega_n^2}$$

Come si può notare, il denominatore della funzione di trasferimento calcolata non ha il coefficiente di secondo grado unitario. Per poterlo confrontare con quello generico occorre quindi dividere tutti i termini per 2, da cui si ottiene che:

$2\delta\omega_n = 3/2$

$\omega_n^2=4 \Rightarrow \omega_n = 2$

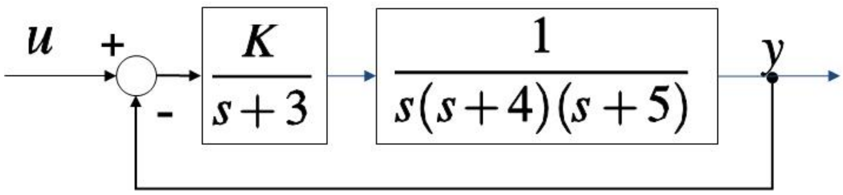
Perciò $\delta = (3/2) / 2 / 2 = 3/8 = 0,375$

Essendo tale valore inferiore ad 1, il sistema risulta sotto-smorzato e quindi la relativa risposta al gradino è caratterizzata da un transitorio iniziale oscillatorio. Il tempo di assestamento è determinato dalla seguente formula:

$$T_a = \frac{3}{\delta\omega_n} = \frac{3}{3/4\cdot 2} = 4$$ (secondi)

ESERCIZIO 6.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determini l’intervallo di valori di K per i quali il sistema risulti <u>asintoticamente stabile</u>.

RISPOSTA:

L’intervallo di stabilità per i valori di K si determina applicando il criterio di Routh al polinomio a denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso:

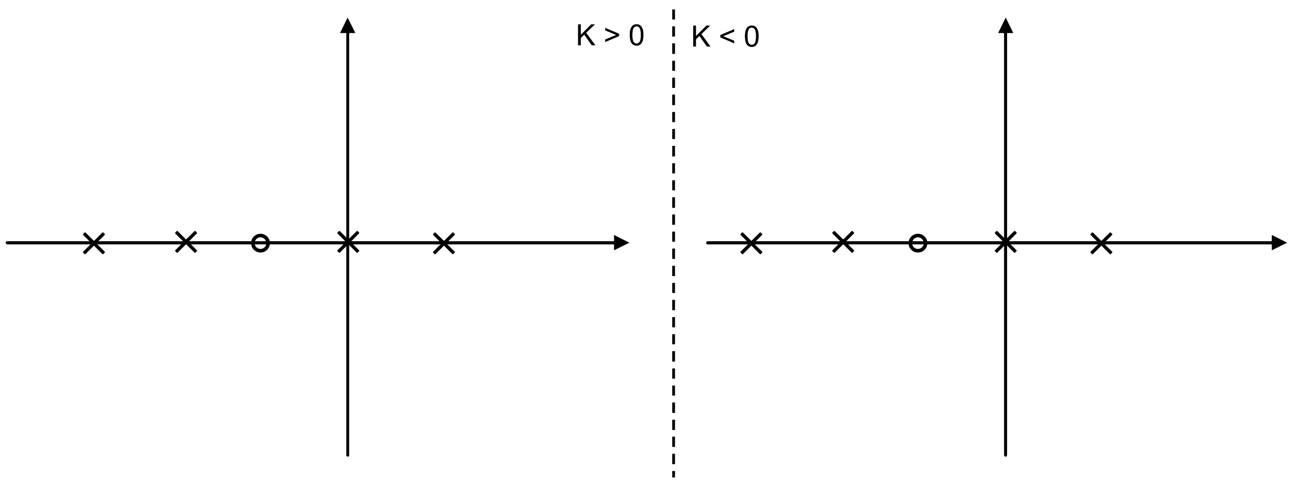
$$D_{cl}(s) = s^4 + 12s^3 + 47s^2 + 60s + K$$

Dalla tabella di Routh si ottengono due vincoli per K, cioè $K > 0$ e $K < 210$, perciò:

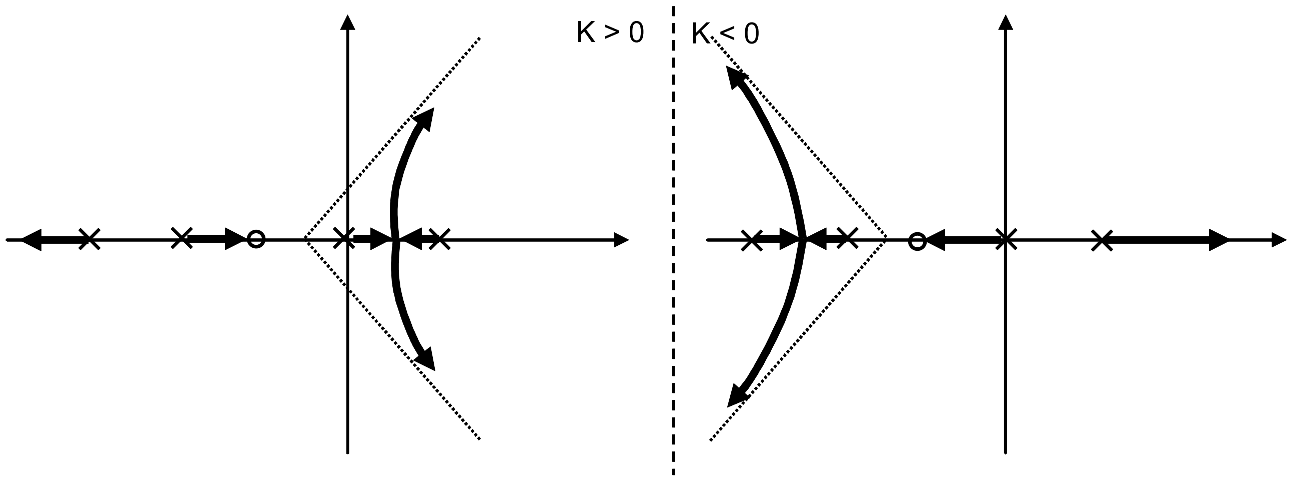
$$0 < K < 210$$

ESERCIZIO 7.

Si tracci l’andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema con poli (x) e zeri (o) della funzione di trasferimento d’anello come indicato in figura:



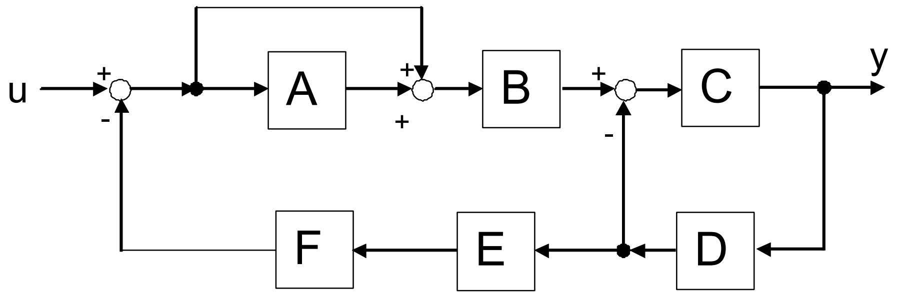
RISPOSTA:



NOTA: il centro degli asintoti dovrebbe essere lo stesso in entrambi i grafici. Poiché l'esercizio richiede un disegno qualitativo, gli asintoti sono stati invece posizionati in modo da rendere più agevole il tracciato. La soluzione è accettabile fintanto che gli angoli degli asintoti (fondamentali per determinare la tendenza verso la regione di stabilità o di instabilità dei rami del luogo) sono corretti.

ESERCIZIO 8.

Dato il sistema costituito dal seguente diagramma a blocchi:



Si determini la funzione di trasferimento tra Y e U:

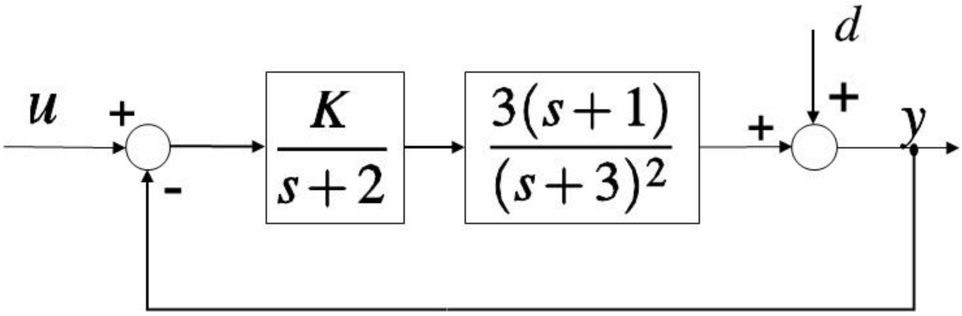
RISPOSTA:

Y / U = [(1+A) B C] / [1 + C D + (1+A) B C D E F]

Si noti che il blocco A è in parallelo con un ramo a FdT unitaria. Inoltre, il punto di diramazione successivo al blocco D può essere spostato a monte del blocco D stesso, moltiplicandolo per la FdT D. "Successivo" e "monte" si intendono rispetto all'orientamento dei segnali di ingresso/uscita, poiché D si ritrova in un ramo di retroazione ciò si traduce rispettivamente in "A SINISTRA" e "A DESTRA", nel diagramma.
Con questo spostamento, si ottiene un anello tra C e D che può essere risolto in modo indipendente, in quanto annidato rispetto all'anello esterno che comprende sul ramo di retroazione i blocchi D (ancora), E ed F.
Risolvendo quest'ultimo anello si ottiene il risultato finale.

ESERCIZIO 9.

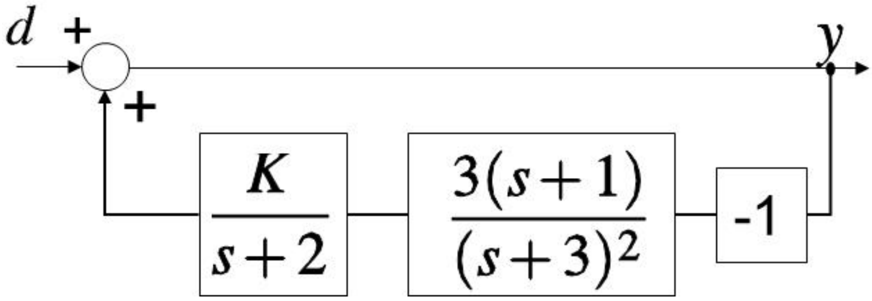
Dato il seguente sistema in retroazione:



Si progetti il valore di K tale per cui, quando $u(t) = 0$ e $d(t)$ è un segnale a gradino unitario (con trasformata di Laplace $D(s) = 1/s$), $y(t) \rightarrow 0{,}1$ per $t \rightarrow \infty$.

RISPOSTA:

Essendo $u(t) = 0$, si può eliminare il corrispondente nodo sommatore (considerando però il segno del ramo di retroazione) e riorganizzare lo schema a blocchi in modo da evidenziare d(t) come ingresso:



Si noti che questo schema ha retroazione positiva, ma è presente un blocco con funzione di trasferimento -1 (necessario per mantenere la coerenza con il segno della retroazione nello schema originario).

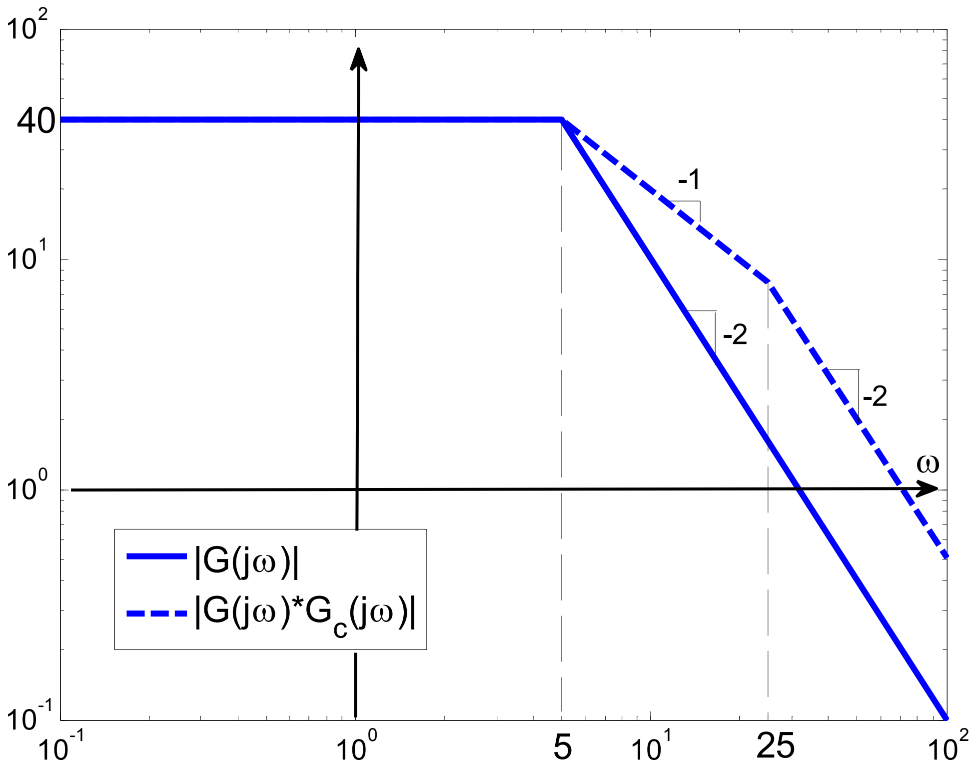
Poiché l'obiettivo di progetto è il valore a regime del segnale $y(t)$, a questo punto è sufficiente calcolare la funzione di trasferimento ad anello chiuso ed applicare a quest'ultima, moltiplicata per $D(s) = 1/s$, il teorema del valore finale per le trasformate di Laplace, da cui si ottiene:

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} sG_{c.l.}(s)D(s) =$$
$$= \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + \frac{3K(s+1)}{(s+2)(s+3)^2}}$$

che tende a 0,1 se <u>K = 54</u>

ESERCIZIO 10.

Dati i seguenti diagrammi di Bode delle ampiezze:



si determinino le funzioni di trasferimento, supposte a fase minima, del sistema controllato $G(s)$ e del controllore $G_c(s)$:

RISPOSTA:

$$G(s) = \frac{40}{(1+\frac{s}{5})^2}$$

$$G_c(s) = \frac{1+\frac{s}{5}}{1+\frac{s}{25}}$$