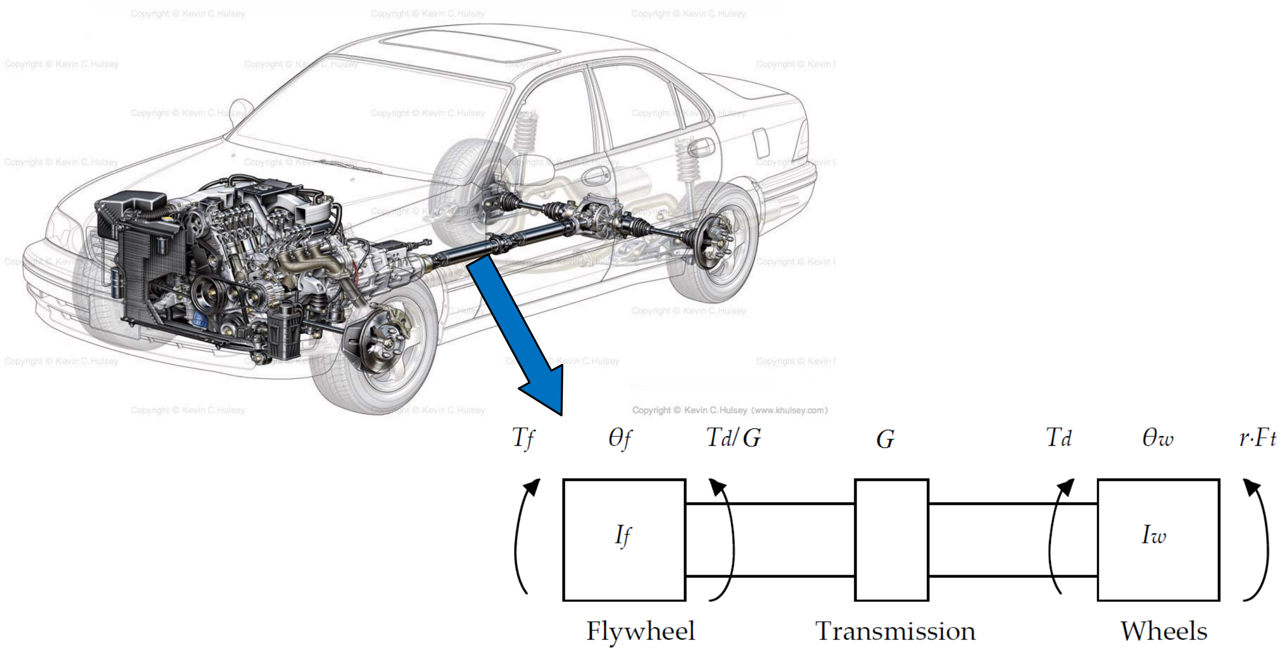
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (6 CFU) / “CONTROLLI AUTOMATICI”

Prova scritta – 8 giugno 2018

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Il sistema di trasmissione della trazione in un’automobile può essere schematizzato come un gruppo meccanico costituito da due inerzie principali, quella dell’albero motore con relativo volano e quella dell’assale delle ruote motrici, interconnesse in modo elastico e con un certo rapporto di riduzione. La figura seguente mostra lo schema semplificato di interconnessione delle parti considerate di una generica automobile:



Dal bilancio dei momenti (T_f, T_d e $r \cdot F_t$) applicati alle due parti in moto (i.e. motore e assale ruote), si ottengono le seguenti equazioni differenziali:

$$I_f \ddot{\theta}_f = T_f - \left[\frac{K_s}{G} \left(\frac{\theta_f}{G} - \theta_w \right) + \frac{B_s}{G} \left(\frac{\dot{\theta}_f}{G} - \dot{\theta}_w \right) \right]$$

$$I_w \ddot{\theta}_w = \left[K_s \left(\frac{\theta_f}{G} - \theta_w \right) + B_s \left(\frac{\dot{\theta}_f}{G} - \dot{\theta}_w \right) \right] - r \cdot F_t$$

nella quale I_f e I_w sono i momenti di inerzia dell'albero motore e dell'assale ruote, K_s e B_s sono rispettivamente l'elasticità e la viscosità della trasmissione, T_f è il momento generato dal motore mentre $r{\cdot}F_t$ è quello generato dalle ruote per effetto della trazione al suolo.
NOTA BENE: quest'ultima quantità $r{\cdot}F_t$ verrà nel seguito considerata un disturbo, per cui esclusa dal modello matematico per il controllo oggetto dell'esercizio.

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, di ordine 3 e del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\; y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = (\frac{\theta_f}{G} - \theta_w);\; x_2 = \dot{\theta}_f;\; x_3 = \dot{\theta}_w;\; u = T_f;\; y = x_2$$

RISPOSTA:

Occorre

- sostituire la notazione delle variabili di stato, ingresso e uscita
- notare che la derivata della prima variabile di stato corrisponde alla differenza tra la seconda variabile di stato, divisa per G, e la terza variabile di stato, in quanto:
  $$\dot{x}_1 = (\frac{\dot{\theta}_f}{G} - \dot{\theta}_w) = \frac{x_2}{G} - x_3$$

Si ottengono così le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= && \frac{x_2}{G} && -x_3 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{K_s}{I_f G}x_1 && -\frac{B_s}{I_f G^2}x_2 && +\frac{B_s}{I_f G}x_3 && +\frac{1}{I_f}u \\
\dot{x}_3 &= \frac{K_s}{I_w}x_1 && +\frac{B_s}{I_w G}x_2 && -\frac{B_s}{I_w}x_3
\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{G} & -1 \\ -\frac{K_s}{I_f G} & -\frac{B_s}{I_f G^2} & \frac{B_s}{I_f G} \\ \frac{K_s}{I_w} & \frac{B_s}{I_w G} & -\frac{B_s}{I_w} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_f} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y = x_2$, poiché tale uscita non dipende dall'ingresso $D = 0$ (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la variabile dal vettore di stato è $C = [\ 0\ \ 1\ \ 0\ ]$.

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$I_f = 0{,}05; \quad I_w = 0{,}1; \quad K_s = 4; \quad B_s = 1; \quad G = 2;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno <u>completamente controllabile</u>, calcolando la matrice di raggiungibilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema diventano:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ -40 & -5 & 10 \\ 40 & 5 & -10 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & -150 \\ 20 & -100 & 1100 \\ 0 & 100 & -1100 \end{bmatrix}$$

rango(P) = 3

Perciò il sistema **E'** ~~/ NON E'~~ completamente controllabile

---

ESERCIZIO 3.

Per il sistema con i valori numerici indicati nell'Esercizio 2, si progetti una retroazione stato-ingresso (i.e. $u = H\,x + v$), in modo tale che:

- gli autovalori assegnabili del sistema chiuso in retroazione siano tutti reali e distinti;
- il più lento di tali autovalori abbia tempo di assestamento (al 5%) di 1 secondo e gli altri assegnabili abbiano valori assoluti progressivi di una unità (es. -3, -4, ecc.).

RISPOSTA:

Poiché il sistema è completamente controllabile (v. Esercizio 2) è possibile assegnare arbitrariamente tutti e tre gli autovalori del sistema chiuso in retroazione con una retroazione stato-ingresso. Gli autovalori desiderati sono determinali dalle specifiche dell'esercizio ricordando che il tempo di assestamento al 5% del modo corrispondente ad un autovalore reale è:

$$T_a = -\frac{3}{\lambda} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{T_a}$$

Pertanto, per avere $T_a = 1$, l'autovalore più lento deve essere pari a $\lambda_1 = -3$, mentre gli altri devono essere: $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = -5$.

Con tale scelta, il polinomio caratteristico desiderato per il sistema chiuso in retroazione deve essere:

$$\begin{aligned} p_{des}(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) = \\ &= (\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda+5) = \lambda^3+12\lambda^2+47\lambda+60 \end{aligned}$$

La matrice H del controllore deve essere di dimensione 1x3, cioè $H = [h_1 \quad h_2 \quad h_3]$, pertanto la matrice del sistema chiuso in retrazione con i coefficienti incogniti di H risulta:

$$A + BH = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ 20h_1 - 40 & 20h_2 - 5 & 20h_3 + 10 \\ 40 & 5 & -10 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza, il polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione risulta:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(\lambda I - A - BH) = \\ &= \lambda^3 + (15-20h_2)\lambda^2 + (60-10h_1-200h_2-100h_3)\lambda - 800h_2 - 400h_3 \end{aligned}$$

Uguagliando tra loro i coefficienti dei termini di pari grado nel polinomio caratteristico desiderato e nel polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione si ottengono i 3 vincoli per determinare i 3 coefficienti incogniti di H:

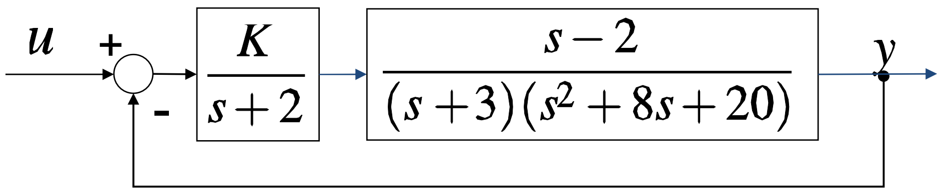
$$\begin{aligned} 15 - 20h_2 &= 12 \\ 60 - 10h_1 - 200h_2 - 100h_3 &= 47 \\ -800h_2 - 400h_3 &= 60 \end{aligned}$$

la cui soluzione finale è:

$$H = [\ 14/5 \quad 3/20 \quad -9/20\ ]$$

ESERCIZIO 4.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:

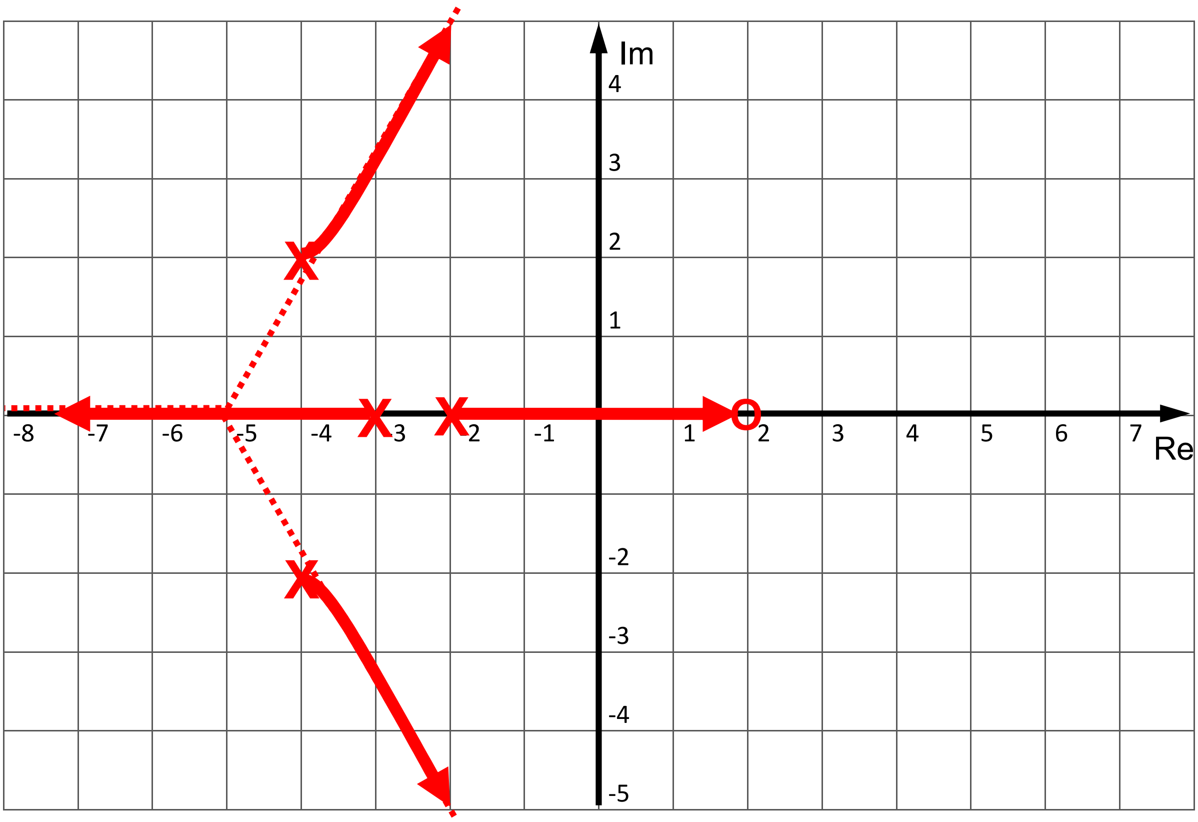


si disegni il corrispondente luogo delle radici valido per $K > 0$ (luogo diretto).

RISPOSTA:

NOTA: la funzione di trasferimento di anello ha uno zero (n_z = 1) in +2, e quattro poli (n_p = 4) rispettivamente in -2, -3, -4-2i e -4+2i. Pertanto il luogo ha tre asintoti (numero asintoti = n_p - n_z = 3), disposti con angoli di $\pi/3$, π e $5/3 * \pi$ rispetto all'asse reale. Il centro degli asintoti è il punto sull'asse reale con coordinata:

$$\sigma_{asintoti} = \frac{1}{n_p - n_z}\left(\sum_{i=1}^{n_p} p_i - \sum_{i=1}^{n_z} z_i\right) = -5$$



ESERCIZIO 5.

Dato il sistema dal diagramma a blocchi dell'Esercizio 4, si determini il valore di K tale per cui il sistema ad anello chiuso risulti avere un polo in s=0.

RISPOSTA:

Il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso risulta essere:

$$D_{cl}(s) = s^4+13s^3+6s^2+(148+K)s+120-2K$$

Per avere un polo in s=0 il termine costante deve essere nullo, pertanto tale condizione si ottiene con:

K = 60

ESERCIZIO 6.

Dato il seguente sistema dinamico:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x(t); \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Si calcoli il valore della risposta *y(t)* all'istante *t* = *2* secondi, a partire dallo stato iniziale:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

RISPOSTA:

Per calcolare il valore della risposta è necessario determinare anzitutto la matrice esponenziale di A, applicando il metodo del polinomio interpolante, che risulta:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{(e^{-t}-e^{-3\,t})}{2} \\ 0 & e^{-3\,t} \end{bmatrix}$$

Dopodichè, poiché y(t) = [1 0] x(t), per calcolare la risposta all'istante 2 secondi è necessario calcolare lo stato allo stesso istante:

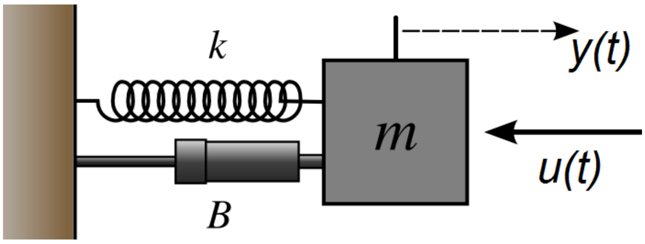
$$x(2) = e^{A2}x(0) = \begin{bmatrix} (e^{-2} - e^{-6}) \\ 2e^{-6} \end{bmatrix}$$

L'uscita corrisponde all'elemento nella prima riga dello stato ottenuto:

$$y(2) = (e^{-2} - e^{-6}) = 0.1329$$

ESERCIZIO 7.

Si consideri il seguente sistema massa-molla-smorzatore (ingresso = forza applicata, uscita = spostamento della massa):



per il quale il modello matematico nel dominio del tempo risulta essere:

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 6y(t) = u(t)$$

Si determinino la corrispondente funzione di trasferimento $G(s)$ con la trasformata di Laplace ed il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino.

RISPOSTA:

Il modello matematico fornito, applicando la regola della derivata per le trasformate di Laplace, diventa:

$$s^2Y(s) + 2sY(s) + 6Y(s) = U(s)$$

Dal quale si deduce la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+2s+6}$$

Per determinare il coefficiente di smorzamento si faccia riferimento alla formulazione standard del denominatore di un sistema del secondo ordine (**NOTA**: non si considera il numeratore poiché esso influenza solo il guadagno statico G(0) della funzione e non l'andamento nel tempo della risposta):

$$G(s) = \frac{\cdots}{s^2 + 2\,\delta\,\omega_n\,s + \omega_n^2}$$

Per determinare il tempo di assestamento è sufficiente considerare il coefficiente del termine di primo grado:

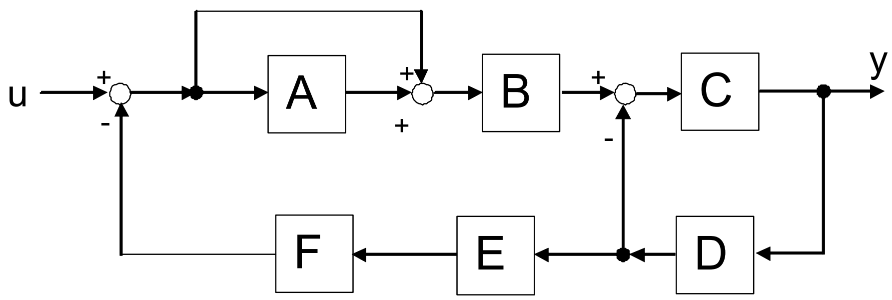
$2\delta\omega_n = 2 \Rightarrow \delta\omega_n = 1$

in quanto il tempo di assestamento è determinato dalla seguente formula:

$$T_a = \frac{3}{\delta\omega_n} = \frac{3}{1} = 3 \text{ (secondi)}$$

ESERCIZIO 8.

Dato il sistema costituito dal seguente diagramma a blocchi:



Si determini la funzione di trasferimento tra Y e U:

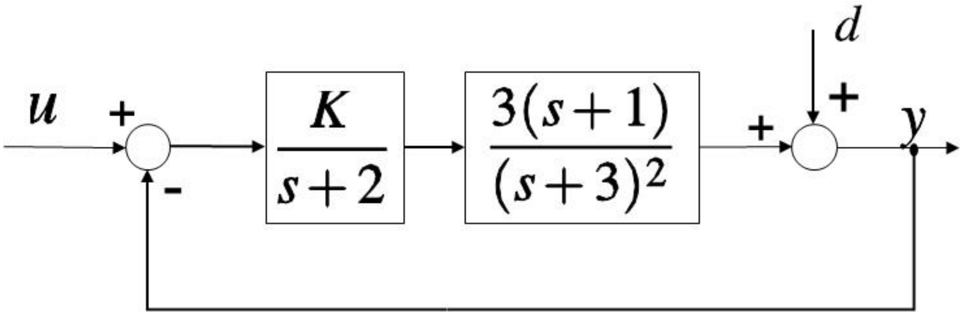
RISPOSTA:

Y / U = [(1+A) B C] / [1 + C D + (1+A) B C D E F]

Si noti che il blocco A è in parallelo con un ramo a FdT unitaria. Inoltre, il punto di diramazione successivo al blocco D può essere spostato a monte del blocco D stesso, moltiplicandolo per la FdT D. “Successivo” e “monte” si intendono rispetto all’orientamento dei segnali di ingresso/uscita, poiché D si ritrova in un ramo di retroazione ciò si traduce rispettivamente in “A SINISTRA” e “A DESTRA”, nel diagramma.
Con questo spostamento, si ottiene un anello tra C e D che può essere risolto in modo indipendente, in quanto annidato rispetto all’anello esterno che comprende sul ramo di retroazione i blocchi D (ancora), E ed F.
Risolvendo quest’ultimo anello si ottiene il risultato finale.

ESERCIZIO 9.

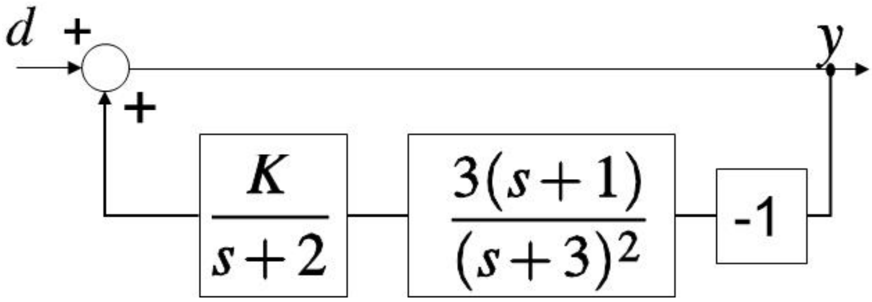
Dato il seguente sistema in retroazione:



Si progetti il valore di K tale per cui, quando u(t) = 0 e d(t) è un segnale a gradino unitario (con trasformata di Laplace D(s) = 1/s), y(t) → 0,01 per t →∞.

RISPOSTA:

Essendo u(t) = 0, si può eliminare il corrispondente nodo sommatore (considerando però il segno del ramo di retroazione) e riorganizzare lo schema a blocchi in modo da evidenziare d(t) come ingresso:



Si noti che questo schema ha retroazione positiva, ma è presente un blocco con funzione di trasferimento -1 (necessario per mantenere la coerenza con il segno della retroazione nello schema originario).

Poiché l'obiettivo di progetto è il valore a regime del segnale y(t), a questo punto è sufficiente calcolare la funzione di trasferimento ad anello chiuso ed applicare a quest'ultima, moltiplicata per D(s) = 1/s, il teorema del valore finale per le trasformate di Laplace, da cui si ottiene:

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sG_{c.l.}(s)D(s) =$$
$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{3K(s+1)}{(s+2)(s+3)^2}}$$

che tende a 0,01 se <u>K = 594</u>

ESERCIZIO 10.

Data la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{100(1+2s)(1+\frac{s}{2})^2}{s(1+\frac{s}{20})^2(1+\frac{s}{100})}$$

Si tracci il corrispondente diagramma di Bode delle ampiezze, considerandone solamente l'approssimazione asintotica.

RISPOSTA: