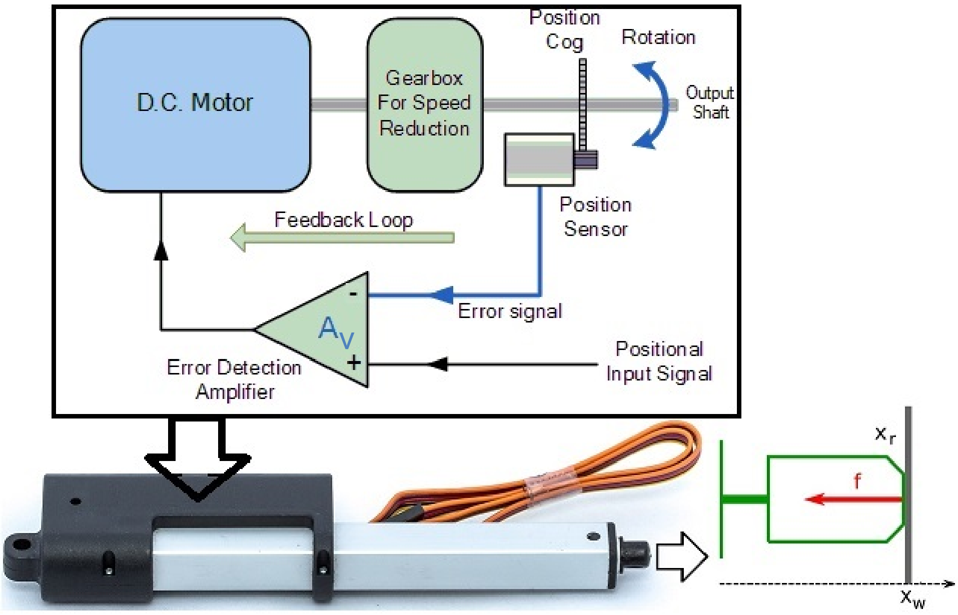
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (6 CFU) / “CONTROLLI AUTOMATICI”

Prova scritta – 29 gennaio 2018

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si vuole realizzare un sistema robotico, costituito da un attuatore lineare che integra il circuito elettronico di regolazione della posizione, al fine di mantenere una forza di spinta desiderata nel punto di contatto tra il robot ed una superficie dell’ambiente, come mostrato nella figura seguente:



Il modello dinamico di tale sistema si ottiene unendo il modello del circuito elettrico (di tipo RL) di un motore a corrente continua (DC motor), la cui tensione è generata dall’amplificatore di controllo in modo proporzionale alla differenza tra la posizione misurata e la posizione desiderata (ingresso del sistema), con il bilancio delle forze agenti sullo stelo dell’attuatore. In particolare, si ipotizza che la posizione della superficie di contatto X_W **sia fissata in 0** e che la forza di contatto, misurabile, sia proporzionale alla differenza tra la posizione dello stelo X_r e X_W. Per semplicità, si considera anche che i parametri del motore includano già il rapporto di riduzione e di trasformazione del moto del motore DC da rotativo a lineare.
In tali condizioni, le equazioni che descrivono il modello dinamico del sistema sono le seguenti:

$$L_a \dot{I}_a + R_a I_a + k_m \dot{x}_r = A_v(x_i - x_r)$$

$$m\ddot{x}_r + b\dot{x}_r + f = k_m I_a$$

$$f = k_w(x_r - x_w) = k_w x_r$$

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = I_a;\ x_2 = x_r;\ x_3 = \dot{x}_r;\ u = x_i;\ y = f;$$

RISPOSTA:

Occorre:

- sostituire la notazione delle variabili di stato, ingresso e uscita
- notare che la derivata della seconda variabile di stato corrisponde alla terza variabile di stato: $\dot{x}_2 = x_3$

Si ottengono così le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{R_a}{L_a}x_1 - \frac{A_v}{L_a}x_2 - \frac{k_m}{L_a}x_3 + \frac{A_v}{L_a}u \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= \frac{k_m}{m}x_1 - \frac{k_w}{m}x_2 - \frac{b}{m}x_3
\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{A_v}{L_a} & -\frac{k_m}{L_a} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_m}{m} & -\frac{k_w}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{A_v}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y=f=k_w x_2$: poiché tale uscita non dipende dall'ingresso $D = 0$ (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la prima variabile dal vettore di stato è:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & k_w & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$R_a = 0{,}4; \quad L_a = 0{,}2; \quad k_m = 0{,}4; \quad A_v = 4;$$

$$m = 0{,}4; \quad b = 0{,}4; \quad k_w = 2;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno **completamente osservabile**, calcolando la matrice di **osservabilità** ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema <u>che interessano per l'analisi di osservabilità</u> (i.e. A e C) diventano:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 20 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -10 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

rango(Q^T) = 3

Perciò il sistema **E'** ~~/ NON E'~~ completamente osservabile

---

ESERCIZIO 3.

Per il sistema con i valori numerici indicati nell'Esercizio 2, si progetti un osservatore in catena chiusa dello stato (osservatore identità), cioè del tipo:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(C\hat{x}(t) - y(t))$$

i cui autovalori assegnabili risultino tutti reali ed uguali tra loro (se quelli assegnabili sono più di uno), con tempo di assestamento (al 5%) pari a $T_a = 0{,}5$ secondi.

RISPOSTA:

Poiché il sistema è completamente osservabile (v. Esercizio 2) è possibile assegnare arbitrariamente tutti e tre gli autovalori dell'osservatore in catena chiusa. Gli autovalori desiderati sono determinali dalle specifiche dell'esercizio ricordando che il tempo di assestamento al 5% del modo corrispondente ad un autovalore reale è:

$$T_a = -\frac{3}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{T_a}$$

Pertanto, per avere $T_a = 0{,}5$ ed autovalori tutti uguali tra loro: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -6$
Con tale scelta, il <u>polinomio caratteristico desiderato</u> per l'osservatore deve essere:

$$\begin{aligned} p_{des}(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) = \\ &= (\lambda+6)^3 = \lambda^3 + 18\lambda^2 + 108\lambda + 216 \end{aligned}$$

La matrice K dell'osservatore deve essere di dimensione 3x1, cioè $K = [k_1 \;\; k_2 \;\; k_3]^T$, pertanto la matrice dell'osservatore con i coefficienti incogniti di K risulta:

$$A + KC = \begin{bmatrix} -2 & 2k_1 - 20 & -2 \\ 0 & 2k_2 & 1 \\ 1 & 2k_3 - 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza, il <u>polinomio caratteristico dell'osservatore</u> risulta:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(\lambda I - A - KC) = \\ &= \lambda^3 + (3-2k_2)\lambda^2 + (9-6k_2-2k_3)\lambda + 30 - 2k_1 - 8k_2 - 4k_3 \end{aligned}$$

Uguagliando tra loro i coefficienti dei termini di pari grado nel polinomio caratteristico desiderato e nel polinomio caratteristico dell'osservatore si ottengono i 3 vincoli per determinare i 3 coefficienti incogniti di K:

$$\begin{aligned} 3 - 2k_2 &= 18 \\ 9 - 6k_2 - 2k_3 &= 108 \\ 30 - 2k_1 - 8k_2 - 4k_3 &= 216 \end{aligned}$$

risolti i quali si ottiene è $k_1 = -9$, $k_2 = -15/2$ e $k_3 = -27$, perciò la soluzione finale è:

$$K = [\,-9 \quad -15/2 \quad -27]^T$$

ESERCIZIO 4.

Per il sistema autonomo seguente, con corrispondente valore dello stato all'istante $t = 1$:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) \qquad x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si determini il valore dello stato iniziale (cioè all'istante $t = 0$).

RISPOSTA:

L'esponenziale della matrice A risulta:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{0\,t} & e^{-\,t} - e^{0\,t} \\ 0 & e^{-\,t} \end{bmatrix}$$

e ricordando che $e^{0t} = 1$ per ogni t, il valore dello stato iniziale risulta:

$$x(0) = e^{A\,(0-1)} x(1) = \begin{bmatrix} e \\ e \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 5.

Per il sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(\mathrm{s}) = \frac{5\mathrm{s}+6}{\mathrm{s}^2+5\mathrm{s}+6}$$

Si calcoli l'espressione in funzione del tempo dell'uscita, cioè $y(t)$, quando in ingresso è applicato un gradino di ampiezza unitaria (i.e. $U(s) = 1 / s$):

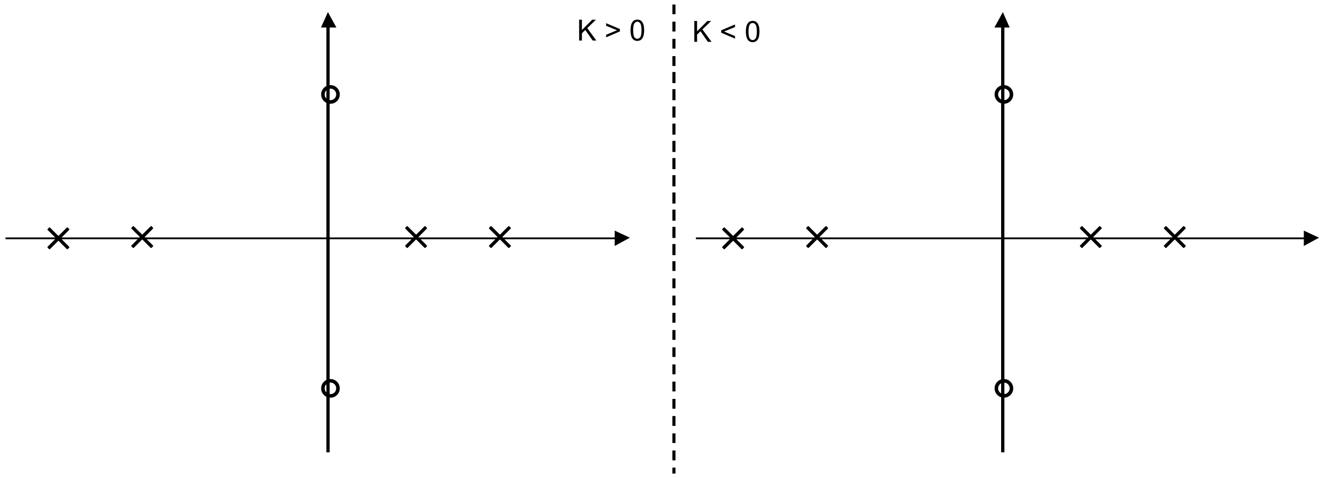
RISPOSTA:

Moltiplicando $G(s)$ per $1/s$ (ingresso a gradino di ampiezza unitaria) ed applicando il metodo per il calcolo dell'antitrasformata di Laplace tramite la scomposizione in fratti semplici, si ottiene:

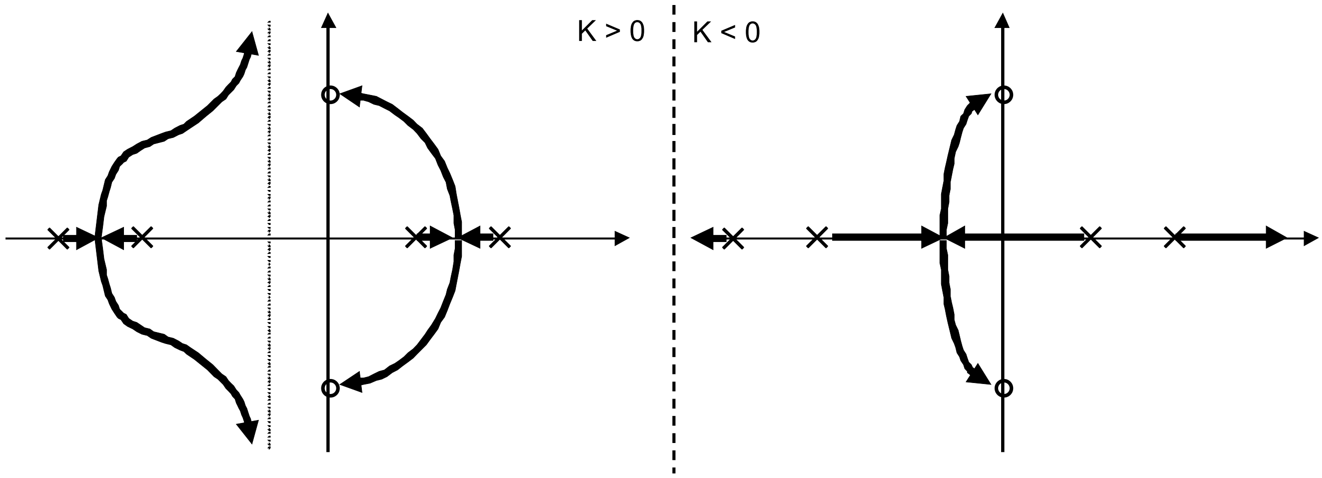
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(\mathrm{s})\frac{1}{s}] = 1 + 2e^{-2t} - 3e^{-3t}$$

ESERCIZIO 6.

Si tracci l'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema con poli (x) e zeri (o) della funzione di trasferimento d'anello come indicato in figura:

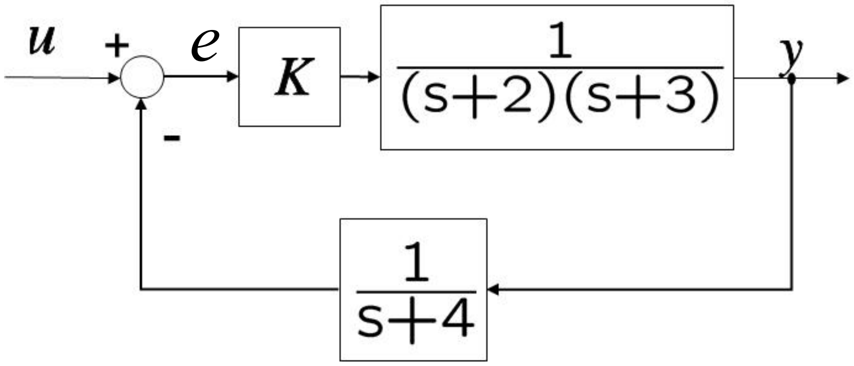


RISPOSTA:



ESERCIZIO 7.

Dato il sistema descritto dallo schema a blocchi mostrato nel seguito, si calcoli il valore di K tale per cui l'errore a regime ($e(t)$) in risposta ad un gradino di ampiezza unitaria ($U(s) = 1 / s$) risulti essere pari a $e(\infty) = 0{,}1$.

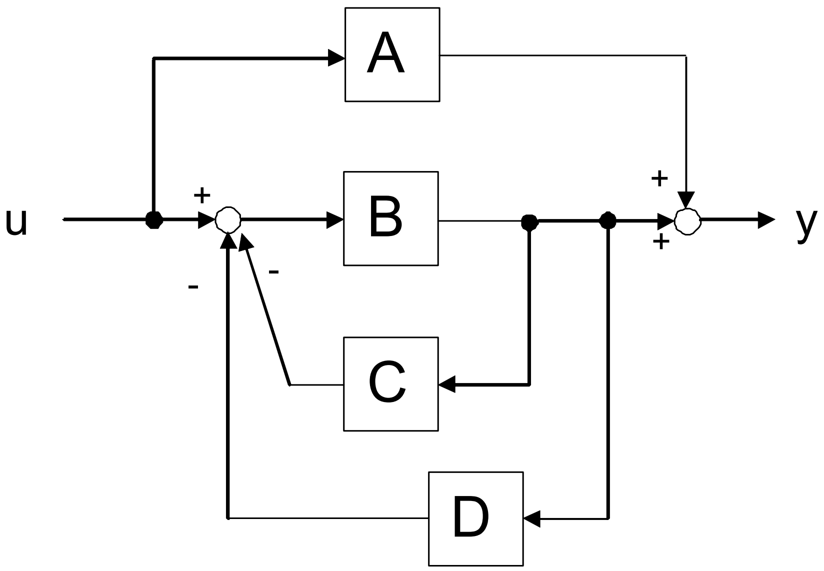


RISPOSTA:

K = 216

ESERCIZIO 8.

Si determini la funzione di trasferimento del seguente schema a blocchi:



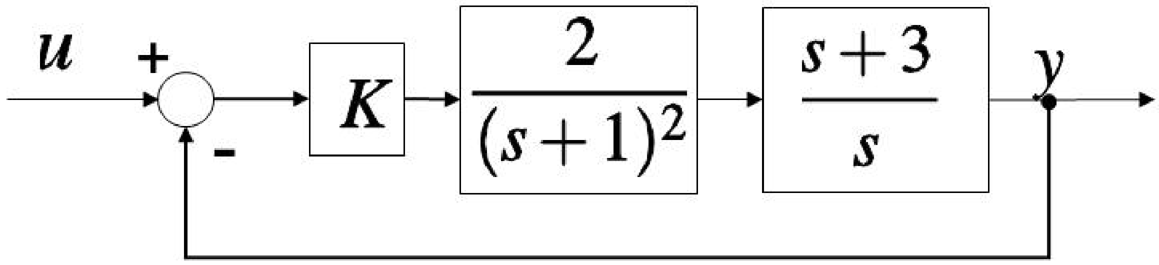
RISPOSTA:

Il ramo del blocco A risulta in parallelo con il doppio anello annidato contenente B e C. Questi due ultimi anelli possono quindi essere risolti in modo indipendente e il risultato parziale sommato ad A:

$$Y/U = A + \frac{\frac{B}{1+BC}}{1+(\frac{B}{1+BC})D}$$

ESERCIZIO 9.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



Si determinino i valori di K che rendono il sistema asintoticamente stabile.

RISPOSTA:
Applicando il criterio di Routh al polinomio ottenuto da 1 + K G1(s)G2(s), si ottiene

$$0 < K < 1$$

ESERCIZIO 10.

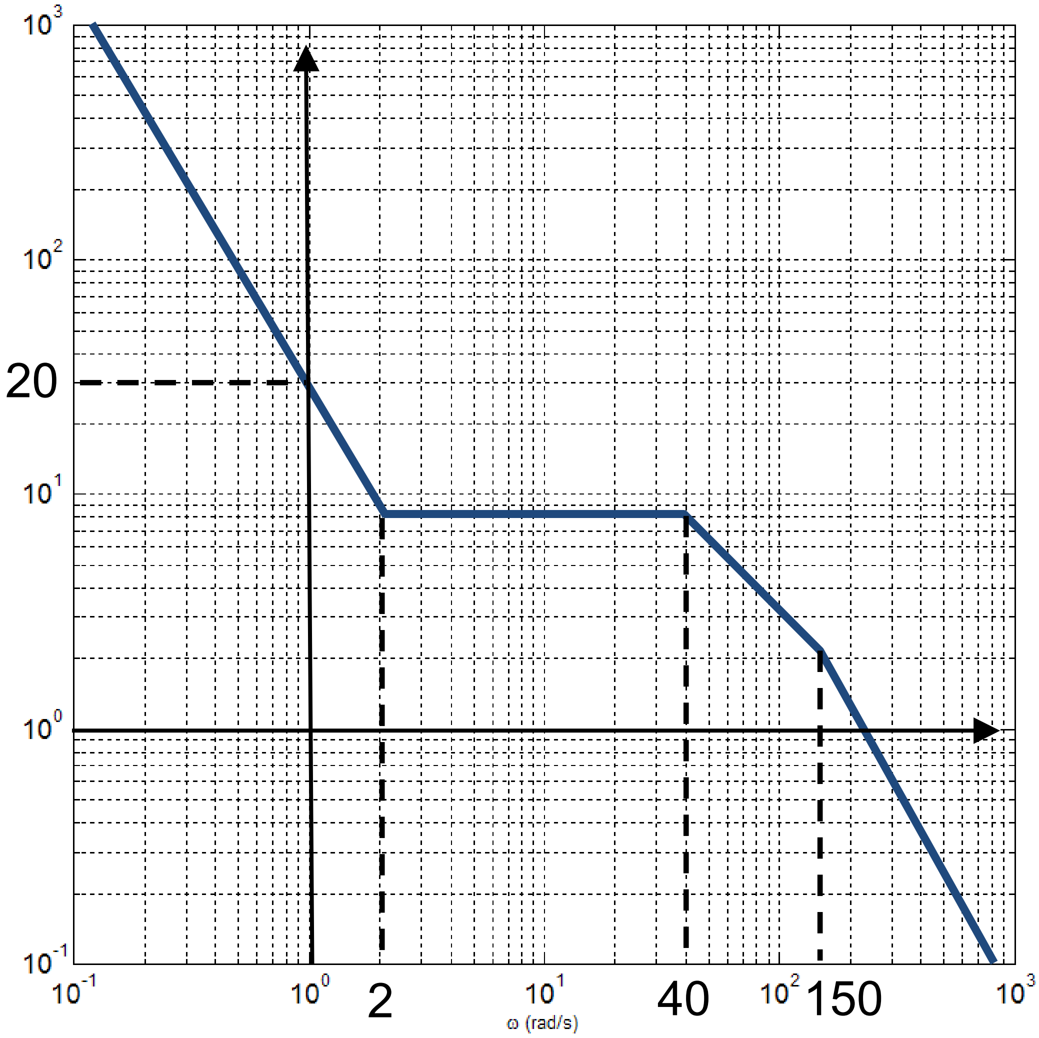
Data la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{20\left(1+\frac{s}{2}\right)^2}{s^2\left(1+\frac{s}{40}\right)\left(1+\frac{s}{150}\right)}$$

Si disegni il diagramma di Bode delle ampiezze, considerando ovviamente solo la linea spezzata che ne determina l'approssimazione asintotica.

Si noti che entrambi gli assi del piano predisposto per il tracciato del diagramma sono in scala logaritmica (ma che il valore sull'asse delle ascisse è assoluto, <u>NON in dB</u>).

RISPOSTA:



10^3
10^2
20
10^1
10^0
10^-1
10^-1
10^0
2
10^1
ω (rad/s)
40
10^2
150
10^3