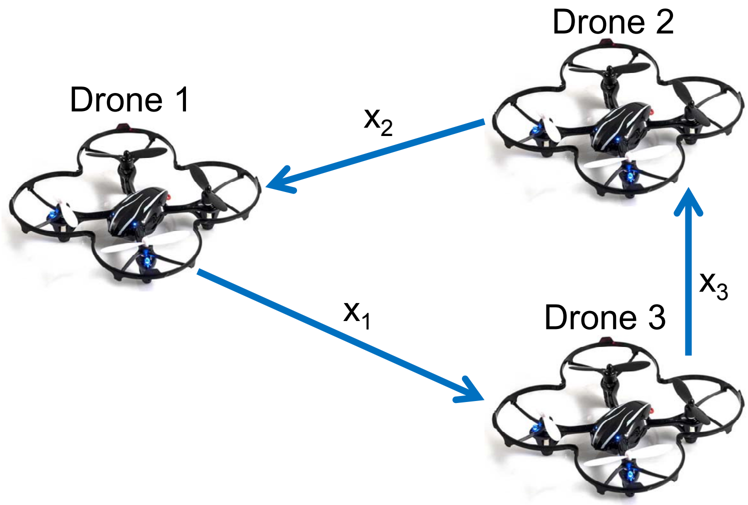
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (6 CFU) / “CONTROLLI AUTOMATICI”

Prova scritta – 23 febbraio 2018

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si vuole realizzare un sistema di sorveglianza costituito da una flotta di droni di tipologia quadricottero. Per coordinare e sincronizzare il moto dei quadricotteri è prevista una rete di comunicazione wireless low-power, con la quale ogni drone può inviare la propria posizione nello spazio solo ad uno dei droni vicini e solo uno dei droni può inviare la propria posizione al sistema di supervisione centralizzato. Come caso specifico si considerino tre droni con il seguente schema di comunicazione:



Al fine di mantenere un moto coordinato della flotta, ogni drone è programmato per regolare la propria velocità in funzione della distanza con l'altro drone del quale riceve la posizione via rete wireless, più un eventuale comando esterno fornito dal supervisore centralizzato. Considerando per semplicità la posizione del drone come una variabile scalare, indicata con x_i, le equazioni differenziali che descrivono il moto della flotta di tre droni sono esprimibili come segue:

$$\dot{x}_i = -(x_i - x_j) + b_i u$$

con le seguenti combinazioni degli indici i e j: [i=1, j=2], [i=2, j=3], [i=3, j=1].
Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le posizioni dei droni come variabili di stato e considerando:

- $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ e $b_3 = 0$.
- $y = x_3$

Si verifichi poi se il sistema considerato risulti o meno completamente controllabile, calcolando la matrice di raggiungibilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Occorre anzitutto sostituire gli indici nella generica equazione differenziale fornita dal testo. Si ottengono così le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + u\\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_3\\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_3\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y = x_3$, poiché tale uscita non dipende dall'ingresso D = 0 (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la variabile dal vettore di stato è quindi

$$C = [\,0 \quad 0 \quad 1\,]$$

La matrice di raggiungibilità risulta:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Poiché risulta rango(P) = 3, il sistema è completamente osservabile.

ESERCIZIO 2.

Per il sistema con le matrici ottenute all'Esercizio 1, si progetti una retroazione stato-ingresso (i.e. $u = Hx + v$), in modo tale che:

- gli autovalori assegnabili del sistema chiuso in retroazione siano tutti reali e distinti;
- il più lento di tali autovalori abbia tempo di assestamento (al 5%) di 3 secondi e gli altri assegnabili abbiano valori assoluti progressivi di una unità (es. -1, -2, ecc.).

RISPOSTA:

Poiché il sistema è completamente controllabile (v. Esercizio 1) è possibile assegnare arbitrariamente tutti e tre gli autovalori del sistema chiuso in retroazione con una retroazione stato-ingresso. Gli autovalori desiderati sono determinali dalle specifiche dell'esercizio ricordando che il tempo di assestamento al 5% del modo corrispondente ad un autovalore reale è:

$$T_a = -\frac{3}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{T_a}$$

Pertanto, per avere $T_a = 3$, l'autovalore più lento deve essere pari a $\lambda_1 = -1$, mentre gli altri devono essere: $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$.

Con tale scelta, il <u>polinomio caratteristico desiderato</u> per il sistema chiuso in retroazione deve essere:

$$\begin{aligned} p_{des}(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) = \\ &= (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = \lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6 \end{aligned}$$

La matrice H del controllore deve essere di dimensione 1x3, cioè $H = [h_1 \;\; h_2 \;\; h_3]$, pertanto la matrice del sistema chiuso in retrazione con i coefficienti incogniti di H risulta:

$$A + BH = \begin{bmatrix} h_1 - 1 & h_2 + 1 & h_3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza, il <u>polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione</u> risulta:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(\lambda I - A - BH) = \\ &= \lambda^3 + (3-h_1)\lambda^2 + (3-h_3-2h_1)\lambda - h_1 - h_2 - h_3 \end{aligned}$$

Uguagliando tra loro i coefficienti dei termini di pari grado nel polinomio caratteristico desiderato e nel polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione si ottengono i 3 vincoli per determinare i 3 coefficienti incogniti di H:

$$\begin{aligned} 3-h_1 &= 6 \\ 3-h_3-2h_1 &= 11 \\ -h_1-h_2-h_3 &= 6 \end{aligned}$$

la cui soluzione finale è:

$$H = [\ -3 \quad -1 \quad -2\ ]$$

ESERCIZIO 3.

Dato il sistema ed il relativo valore dello stato all'istante t = 4 s:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) \qquad x(4) = \begin{bmatrix} 1 \\ e \end{bmatrix}$$

Si calcoli il valore dello stato all'istante iniziale (t = 0).

RISPOSTA:

E' immediato verificare che la matrice di transizione del sistema considerato, cioè l'esponenziale della sua matrice A, risulta:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-4\,t} & 0 \\ 0 & e^{-\,t} \end{bmatrix}$$

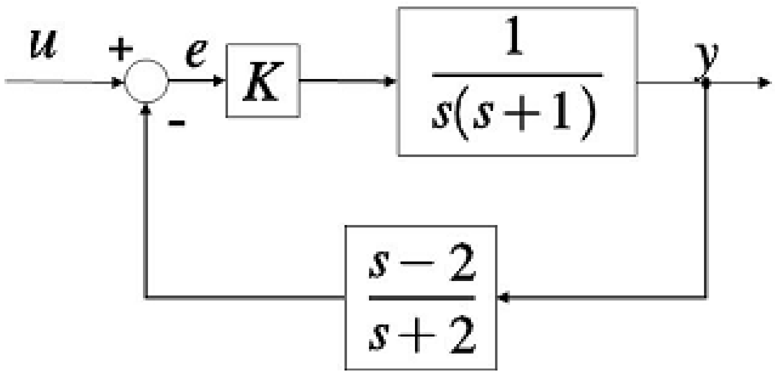
Per riportare allo stato iniziale il vettore di stato fornito dal testo, è sufficiente calcolare:

$$x(0) = e^{A(0-4)} x(4) =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-4\cdot(-4)} & 0 \\ 0 & e^{-1\cdot(-4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{16} \\ e^{5} \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 4.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determinino i valori di K tali per cui il sistema chiuso in retroazione risulti essere asintoticamente stabile.

RISPOSTA:

Applicando il criterio di Routh al denominatore del sistema chiuso in retroazione:

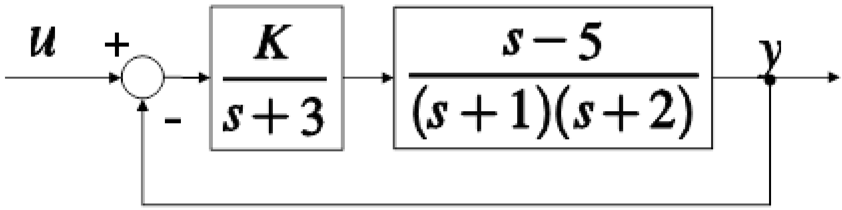
$$D_{cl}(s) = s^3 + 3s^2 + (K+2)s - 2K$$

si ottiene che:

$$-6/5 < K < 0$$

ESERCIZIO 5.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:

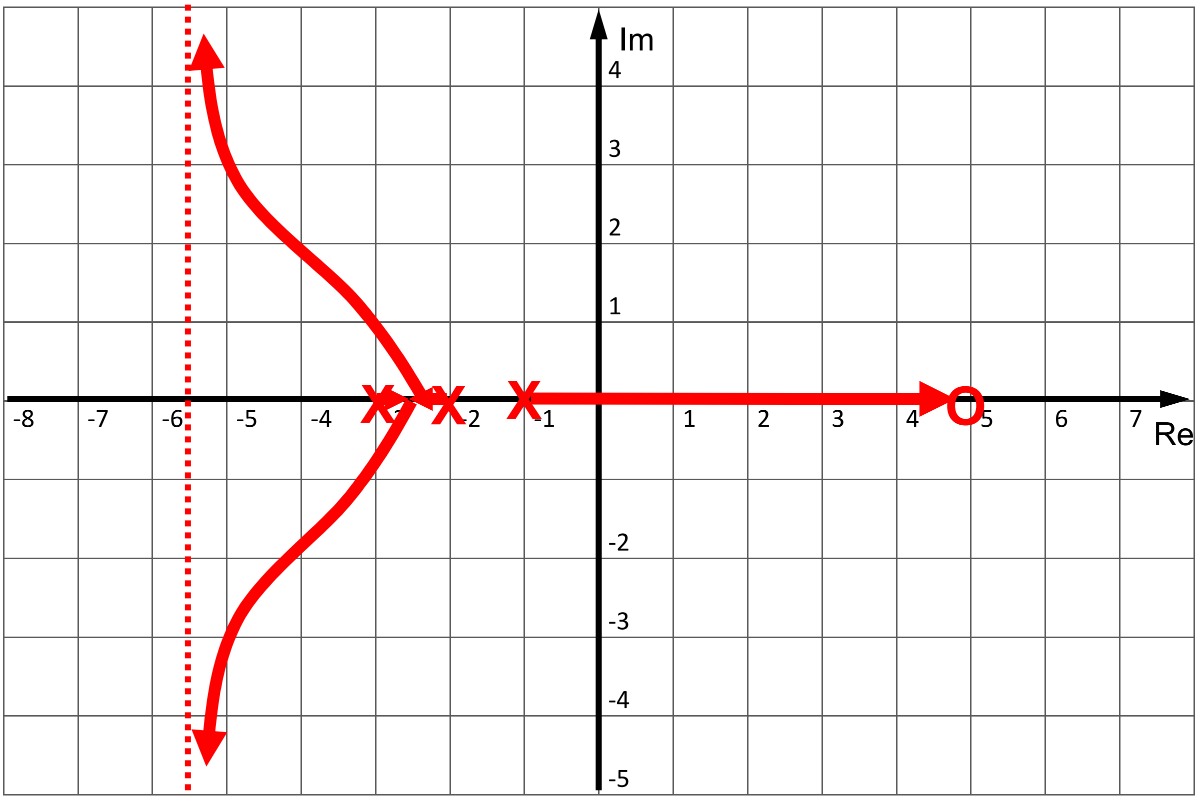


si disegni il corrispondente luogo delle radici valido per K > 0 (luogo diretto).

RISPOSTA:

NOTA: la funzione di trasferimento di anello ha uno zero (n_z = 1) in +5 e tre poli (n_p = 3) rispettivamente in -1, -2 e -3, pertanto il luogo ha due asintoti (numero asintoti = $n_p - n_z$ = 2), disposti con angolo di π/2 e 3/2 π rispetto all'asse reale. Il centro degli asintoti è il punto sull'asse reale con coordinata:

$$\sigma_{asintoti} = \frac{1}{n_p - n_z}\left(\sum_{i=1}^{n_p} p_i - \sum_{i=1}^{n_z} z_i\right) = -11/2$$



ESERCIZIO 6.

Si calcoli la risposta impulsiva del sistema avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{7s+12}{s^2+11s+28}$$

RISPOSTA:

Il problema si risolve anzitutto determinando la scomposizione in fratti semplici della funzione di trasferimento data. Poichè le radici del denominatore (poli della FdT) sono -4 e -7, applicando le formule per il calcolo dei residui si ottiene:

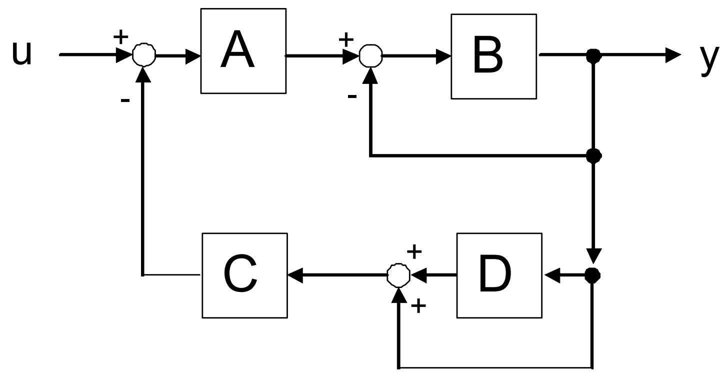
$$G(s) = \frac{7s+12}{s^2+11s+28} = \frac{37}{3}\frac{1}{s+7} - \frac{16}{3}\frac{1}{s+4}$$

da cui si ottiene immediatamente che:

$$W(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \frac{37}{3}e^{-7t} - \frac{16}{3}e^{-4t}$$

ESERCIZIO 7.

Si determini la funzione di trasferimento del seguente diagramma a blocchi:



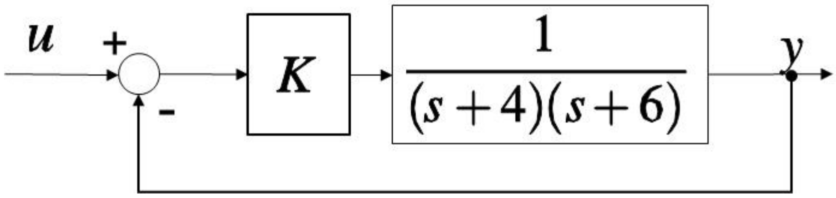
RISPOSTA:

Si noti che il blocco B è in retroazione con un ramo unitario, mentre il blocco D è in parallelo con un ramo unitario nella stessa direzione di segnale. Quest'ultimo parallelo, in serie con il blocco C, sono a loro volta elementi sul ramo di retroazione dell'anello il cui percorso diretto comprende A e il sotto-anello che include B.
Pertanto, la soluzione finale è la seguente FdT:

$$Y/U = \frac{\frac{AB}{1+B}}{1+\frac{ABC(D+1)}{1+B}} = \frac{AB}{1+B+ABC(D+1)}$$

ESERCIZIO 8.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determini il valore di K tale che il sistema ad anello chiuso risulti avere coefficiente di smorzamento δ = 0,4

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta

$$s^2 + 10\,s + 24 + K$$

Confrontando tale polinomio con il denominatore tipico dei sistemi del secondo ordine:

$$s^2 + 2\,\delta\,\omega_n\,s + \omega_n^2$$

si può notare che il coefficiente del termine di primo grado, corrispondente a 2 $\delta\,\omega_n$, sia indipendente da *K*. Imporre δ = 0,4 significa che deve essere ω_n = 25/2.
Il coefficiente costante è:

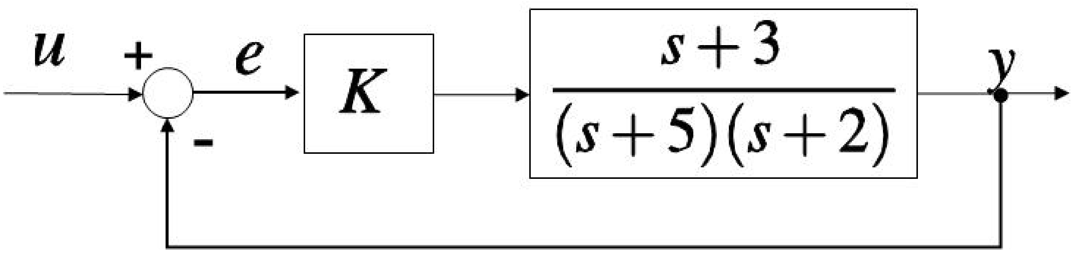
$$24 + K = \omega_n^2 = 625/4$$

quindi il risultato finale è:

$$K = 529/4$$

ESERCIZIO 9.

Si determini il valore di K tale per cui l'errore a regime, in risposta ad un gradino unitario (U(s) = 1/s), del seguente sistema in retroazione:



corrisponda a $e(\infty) = 0,1$

RISPOSTA:

Si può osservare che in questo caso il ramo di retroazione ha guadagno unitario, pertanto:

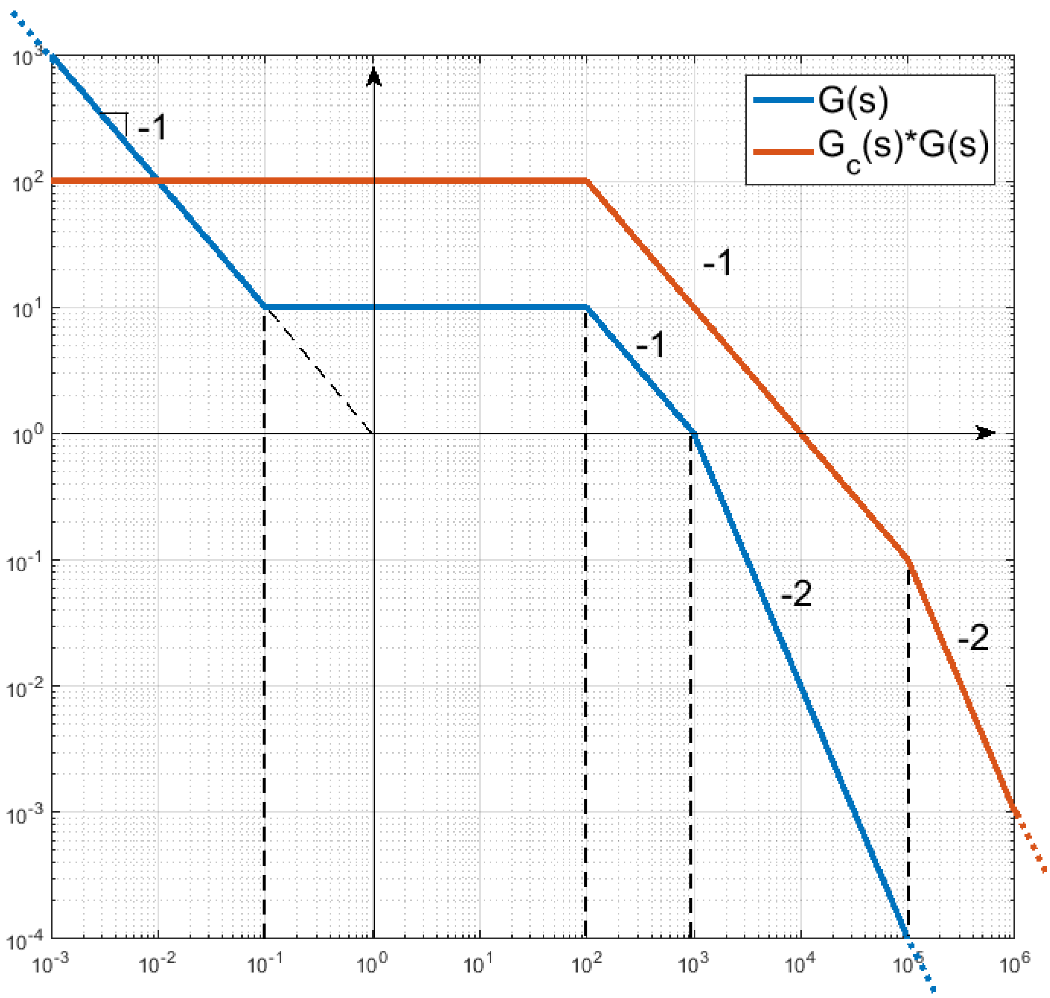
$$e(\infty) = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} G(s)} = \frac{1}{1 + \frac{3K}{10}}$$

Imponendo il vincolo di progetto e risolvendo rispetto a K, si ottiene:

$$K = 30$$

ESERCIZIO 10.

Dati i seguenti diagrammi di Bode delle ampiezze:



si determinino le funzioni di trasferimento **G(s)** e **G_c(s)**, supposte entrambe a fase minima.

RISPOSTA:

$$G(s) = \frac{\left(1+\frac{s}{10^{-1}}\right)}{s\left(1+\frac{s}{10^{2}}\right)\left(1+\frac{s}{10^{3}}\right)}$$

$$G_c(s) = \frac{100s\left(1+\frac{s}{10^{3}}\right)}{\left(1+\frac{s}{10^{-1}}\right)\left(1+\frac{s}{10^{5}}\right)}$$
