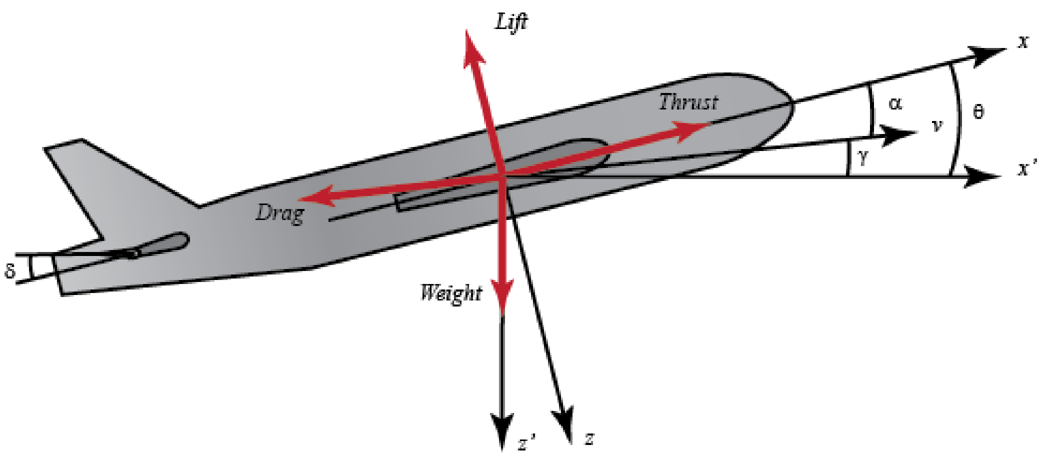
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (6 CFU) / “CONTROLLI AUTOMATICI”

Prova scritta – 20 luglio 2018

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si consideri il modello semplificato della dinamica longitudinale di un aereo, con particolare riferimento al movimento rispetto all’angolo di beccheggio (*pitch angle*) schematizzato dalla seguente figura:



[Fonte: Control Tutorials for Matlab&Simulink, http://ctms.engin.umich.edu]

e descritto dalle seguenti equazioni differenziali:

$$\dot{\alpha} = -2\alpha + C_q q + 2\delta$$

$$\dot{q} = -\alpha - 4q + \delta$$

$$\dot{\theta} = C_q q$$

nelle quali α è il cosiddetto angolo di attacco, q è la velocità dell’angolo di beccheggio, θ è l’angolo di beccheggio e δ è l’inclinazione dell’ala di controllo posteriore, mentre C_q **è una costante che va sostituita con l’ULTIMA cifra (a destra) del numero di matricola dello studente (se questa cifra è 0, la si sostituisca con 5)**.

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = \alpha;\ x_2 = q;\ x_3 = \theta;\ u = \delta;\ y = \theta;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente controllabile, calcolando la matrice di raggiungibilità ed il relativo rango.

N.B.: tutte le soluzioni richieste vanno determinate sostituendo fin dall'inizio C_q con l'ULTIMA cifra (a destra) del numero di matricola dello studente (se questa cifra è 0, la si sostituisca con 5).

RISPOSTA:

N.B.: fornita in funzione del numero di matricola dello studente.

Le equazioni sono di fatto già in forma compatibile con la scrittura del modello differenziale ingresso-stato-uscita, con matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & C_q & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & C_q & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato considerando l'uscita $y = \theta = x_1$: poiché tale uscita non dipende dall'ingresso D = 0 (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la terza variabile dal vettore di stato è:

$$C = [\,0 \quad 0 \quad 1\,]$$

Per l'analisi di controllabilità, la matrice di interesse è:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & C_q - 4 & 8 - 8C_q \\ 1 & -6 & 28 - C_q \\ 0 & C_q & -6C_q \end{bmatrix}$$

Che risulta avere rango(P) = 2 (cioè sistema NON completamente controllabile) per qualsiasi possibile valore di C_q, quindi per qualsiasi numero di matricola dello studente. Infatti, anche considerando l'espressione simbolica riportata sopra si può notare che:

- Indicando con p_1, p_2 e p_3 le tre colonne di P a partire da sinistra, l'elemento della terza riga della colonna p_3 corrisponde a quello della colonna p_2, se moltiplicato per -6.

- Dato il fattore moltiplicativo -6 per la colonna p_2, si può verificare che sommando a questa la p_1 moltiplicata per $(-\ 8\ -\ C_q)$, fattore che può essere ottenuto analizzando la combinazione linerare degli elementi nella prima riga, l'intera colonna p_3 risulta linearmente dipendente da p_1 e p_2
  (i.e. $p_1 = (-\ 8 - C_q)\ p_1 - 6\ p_2$)

ESERCIZIO 2.

Per il sistema con i valori numerici indicati nell'Esercizio 1, si progetti una retroazione stato-ingresso (i.e. $u = H\ x + v$), in modo tale che:

- gli autovalori assegnabili del sistema chiuso in retroazione siano tutti reali e distinti;
- il più lento di tali autovalori abbia tempo di assestamento (al 5%) di 3 secondi e gli altri assegnabili abbiano valori assoluti progressivi di una unità (es. -1, -2, ecc.).

RISPOSTA:

Poiché la matrice di raggiungibilità ha rango 2, (v. Esercizio 1) è possibile assegnare solo due degli autovalori del sistema chiuso in retroazione con una retroazione stato-ingresso. Gli autovalori desiderati sono determinali dalle specifiche dell'esercizio ricordando che il tempo di assestamento al 5% del modo corrispondente ad un autovalore reale è:

$$T_a = -\frac{3}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{T_a}$$

Pertanto, per avere $T_a = 3$, l'autovalore più lento deve essere pari a $\lambda_1 = -1$, mentre l'altro devono essere: $\lambda_2 = -2$. Il terzo autovalore, non assegnabile, risulterà determinato dalla struttura della matrice A + B H.

Con tale scelta, il <u>polinomio caratteristico desiderato</u> per il sistema chiuso in retroazione deve essere:

$$\begin{aligned} p_{des}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \\ &= (\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 \end{aligned}$$

La matrice H del controllore deve essere di dimensione 1x3, cioè $H = [h_1\ \ h_2\ \ h_3]$, pertanto la matrice del sistema chiuso in retrazione con i coefficienti incogniti di H risulta:

$$A + BH = \begin{bmatrix} 2h_1 - 2 & C_q + 2h_2 & 2h_3 \\ h_1 - 1 & h_2 - 4 & h_3 \\ 0 & C_q & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza, il <u>polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione</u> risulta:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(\lambda I - A - BH) = \\ &= \lambda\{\lambda^2 + (6-2h_1-h_2)\lambda + \left[C_q + 8 - (8+C_q)h_1 - C_q h_3\right]\} \end{aligned}$$

Come si può notare, il fatto che risulti il termine costante nullo e quindi si possa raccogliere un termine λ significa che il sistema ad anello chiuso ha un autovalore $= 0$ non modificabile dal controllo. Uguagliando quindi i coefficienti dei termini di pari grado nel polinomio caratteristico desiderato e nella parte di polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione dipendente da H si ottengono i vincoli di progetto:

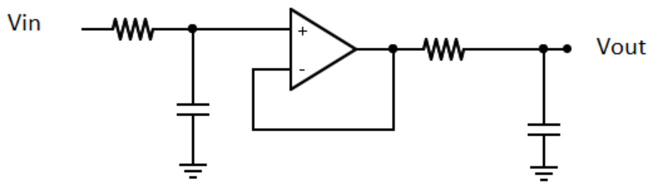
$$\begin{aligned} 6-2h_1-h_2 &= 3 \\ 8+C_q-(8+C_q)h_1-C_q h_3 &= 2 \end{aligned}$$

NOTA BENE: il sistema di equazioni da risolvere ha 2 vincoli e 3 incognite, pertanto risulta avere <u>infinite</u> soluzioni. La struttura delle soluzioni dipende dall'ordine con il quale si scelga di ricavare una incognita per ottenere le altre. AD ESEMPIO, una possibile scelta di comodo può essere ricavare h_2 e h_3 in funzione di h_1 (che risulterà quindi arbitrario), in quanto questa compare in entrambe le equazioni di vincolo:

$$H = [\ \text{arb.} \quad 3 - 2h_1 \quad (C_q - 8h_1 - C_q h_1 + 6)/C_q]$$

ESERCIZIO 3.

Un sistema costituito dal circuito elettronico del tipo mostrato a fianco risulta avere il seguente modello nello spazio degli stati:



$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t)$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -P_s \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove P_s **è una costante che va sostituita con la PENULTIMA cifra (a destra) del numero di matricola dello studente (se questa cifra è 1, la si sostituisca con 2).**

Si determini la risposta impulsiva del sistema considerato.

RISPOSTA:

La risposta impulsiva del sistema è calcolabile con la formula:

$$W(t) = C\, e^{At}\, B =$$

Notando che gli autovalori della matrice A sono -1 e - P_s ed applicando il metodo del polinomio interpolante per il calcolo dell'esponenziale della matrice A, si ottiene:

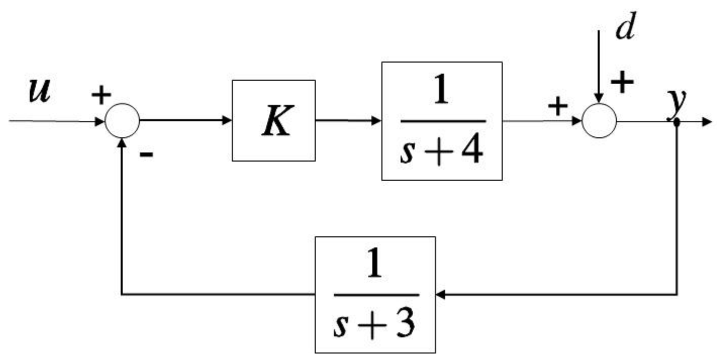
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{1}{P_s - 1}\left(e^{-t} - e^{-P_s\,t}\right) & e^{-P_s\,t} \end{bmatrix}$$

Pertanto il risultato finale **in funzione del numero di matricola dello studente** è:

$$W(t) = \frac{1}{P_s - 1}\left(e^{-t} - e^{-P_s\,t}\right)$$

ESERCIZIO 4.

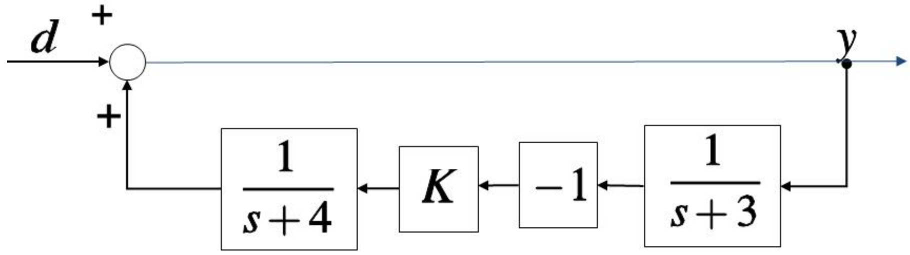
Dato il sistema costituito dal seguente diagramma a blocchi:



si determini il valore di K tale per cui y(t) → 0,1 per t → ∞, imponendo u(t) = 0 ed applicando un gradino unitario al segnale d(t) (cioè: D(s) = 1 / s).

RISPOSTA:

Ponendo u(t) = 0 e ridisegnando il diagramma a blocchi in modo da evidenziare la relazione ingresso uscita tra y e d, si ottiene

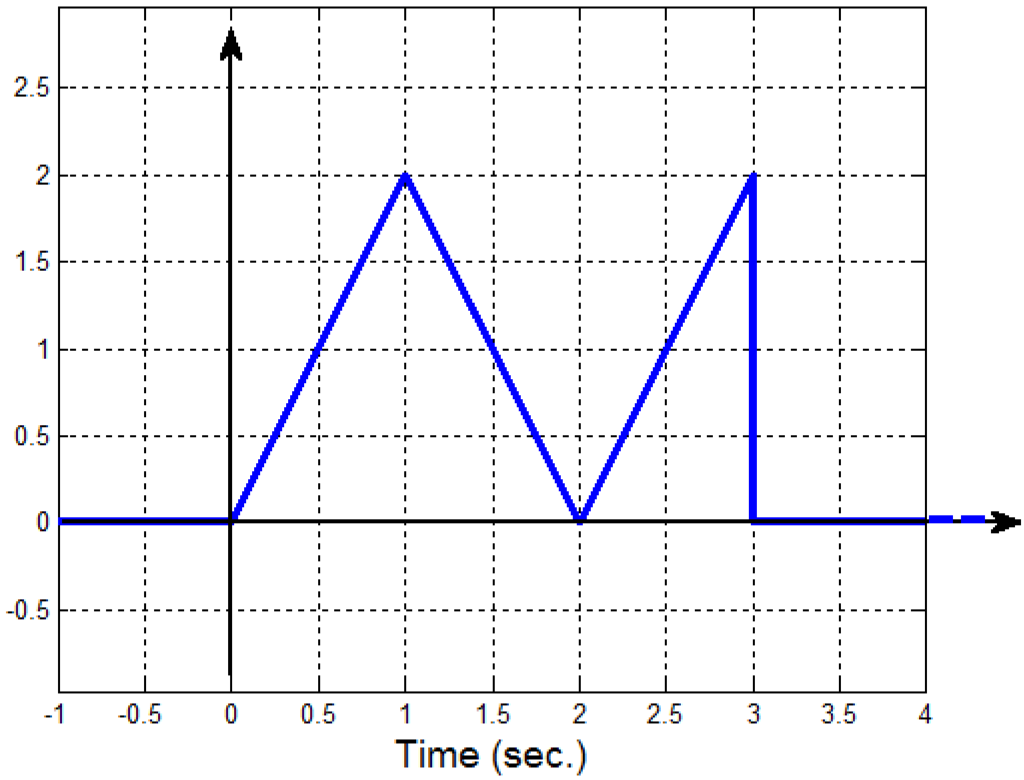


Si noti che il nodo sommatore a sinistra nel diagramma iniziale è stato sostituito con il blocco -1 nel ramo di retroazione, perciò di fatto si tratta ancora di un anello con retroazione negativa. Risolvendo l'anello per ottenere la funzione di trasferimento $G_{cl}(s)$, applicando il teorema del valore finale al segnale $Y(s) = G_{cl}(s)\, D(s)$ ed imponendo il vincolo fornito dal testo si ottiene:

$$K = 108$$

ESERCIZIO 5.

Si calcoli la trasformata di Laplace del segnale $f(t)$ il cui andamento nel tempo è descritto dalla seguente figura:

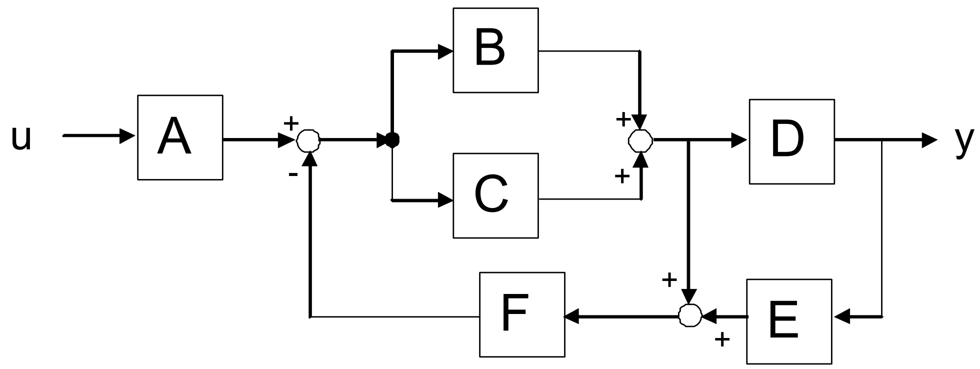


RISPOSTA:

$$F(s) = 2/s^2 + e^{-1s} (-4 / s^2) + e^{-1s} (4 / s^2) + e^{-1s} (-2 / s -2 / s^2)$$

ESERCIZIO 6.

Dato il sistema costituito dal seguente diagramma a blocchi:



Si determini la funzione di trasferimento tra Y e U:

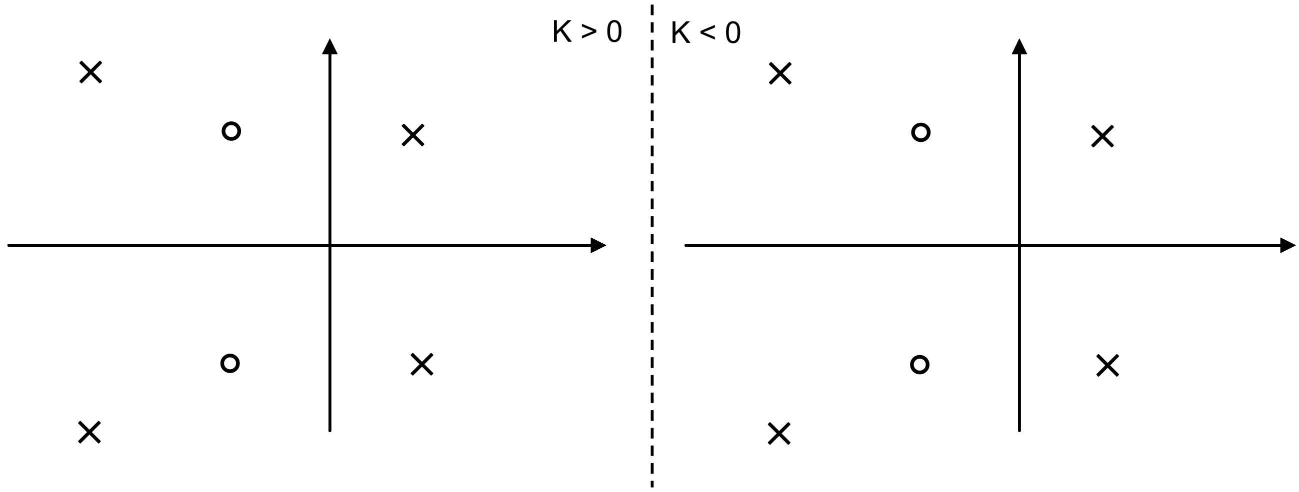
RISPOSTA:

$$Y / U = A [(B + C) D] / [1 + (B + C) D F (E + 1 / D)]$$

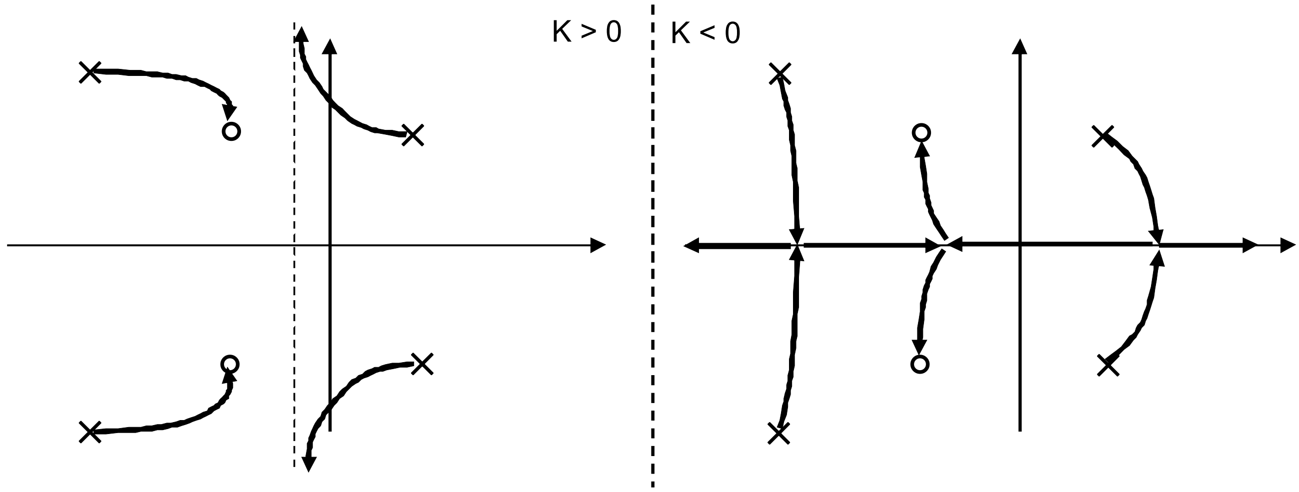
Si noti che il punto di diramazione precedente al blocco D può essere spostato a valle del blocco D stesso, moltiplicandolo per la FdT (1 / D), che risulta essere in parallelo al blocco E. Con questo spostamento il diagramma può essere ridotto osservando che B e C sono in parallelo tra loro e che il ramo di retroazione include il blocco F ed appunto il parallelo tra E e 1 / D.

ESERCIZIO 7.

Si tracci l'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema con poli (x) e zeri (o) della funzione di trasferimento d'anello come indicato in figura:

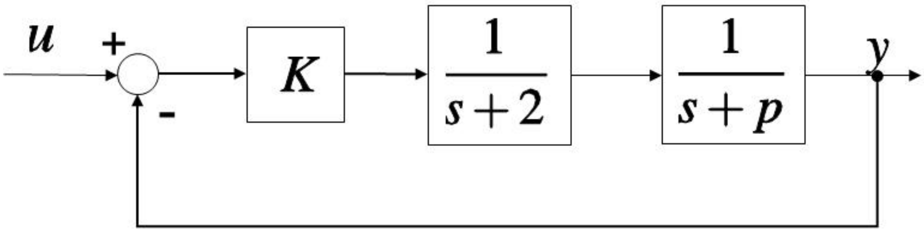


RISPOSTA:



ESERCIZIO 8.

Dato il sistema costituito dal diagramma a blocchi della seguente figura:



si progettino i valori di K e p in modo che il sistema in retroazione abbia tempo di assestamento $T_a = 3$ secondi e coefficiente di smorzamento $\delta = 0{,}1$

RISPOSTA:

Il denominatore ad anello chiuso risulta:

$$s^2 + (p + 2)\, s + 2\, p + K$$

che è direttamente confrontabile con quello tipico di un sistema del secondo ordine ponendo i vincoli:

$$p + 2 = 2\, \delta\, \omega_n \qquad 2\, p + K = \omega_n^2$$

Il primo dei due permette di calcolare p, poiché il tempo di assestamento di un sistema del secondo ordine è:

$$T_a = \frac{3}{\delta\omega_n}$$

$$\Rightarrow \delta\,\omega_n = 1 \;\Rightarrow\; p + 2 = 2 \;\Rightarrow\; p = 0$$

Mentre imponendo il coefficiente di smorzamento richiesto si ha che

$$\omega_n = 10 \;\Rightarrow\; \omega_n^2 = 100 \;\Rightarrow\; K = 100$$

ESERCIZIO 9.

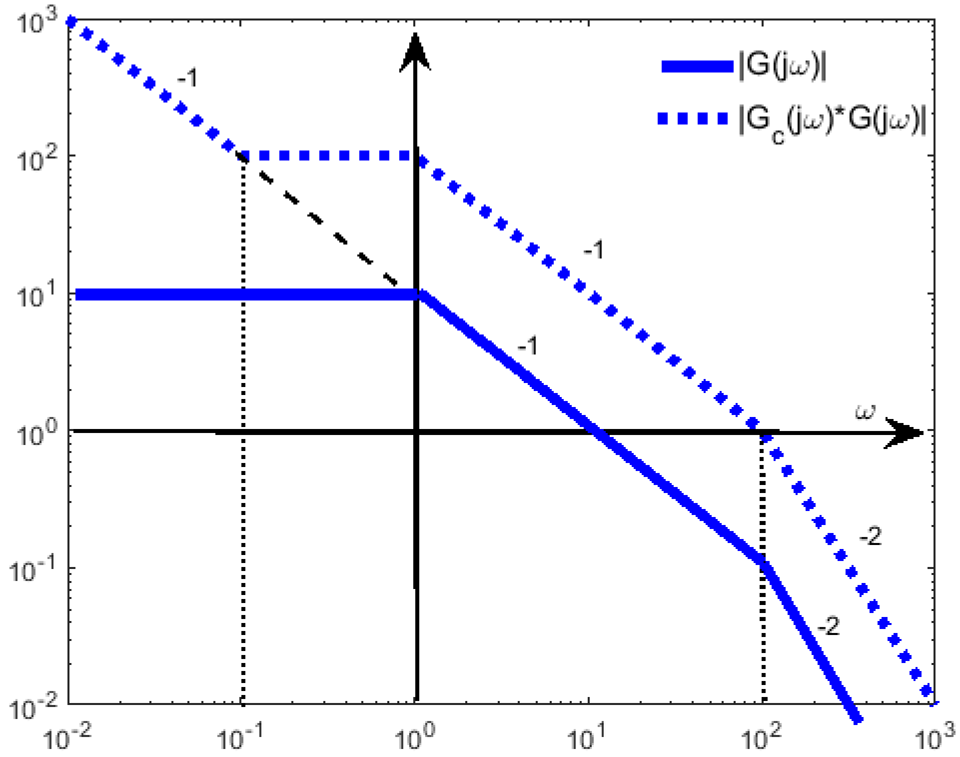
Dato lo stesso sistema dell'Esercizio 7, ma nel quale indipendentemente dal risultato calcolato come soluzione si sostituisca p **con l'ULTIMA (a destra) cifra del numero di matricola dello studente (se questa cifra è 0, la si sostituisca con 5)**, si determinino i valori di K tali per cui il sistema in retroazione risulti asintoticamente stabile.

RISPOSTA:

$$K > -4\,p - p^2$$

ESERCIZIO 10.

Dato il diagramma di Bode dei moduli descritto dalla seguente figura:



Si calcolino $G(s)$ e $G_c(s)$, considerate entrambe a fase minima.

RISPOSTA:

$$G(s) = \frac{10}{(1+s)\left(1+\frac{s}{100}\right)}$$

$$G_c(s) = \frac{\left(1+\frac{s}{10^{-1}}\right)}{s}$$
