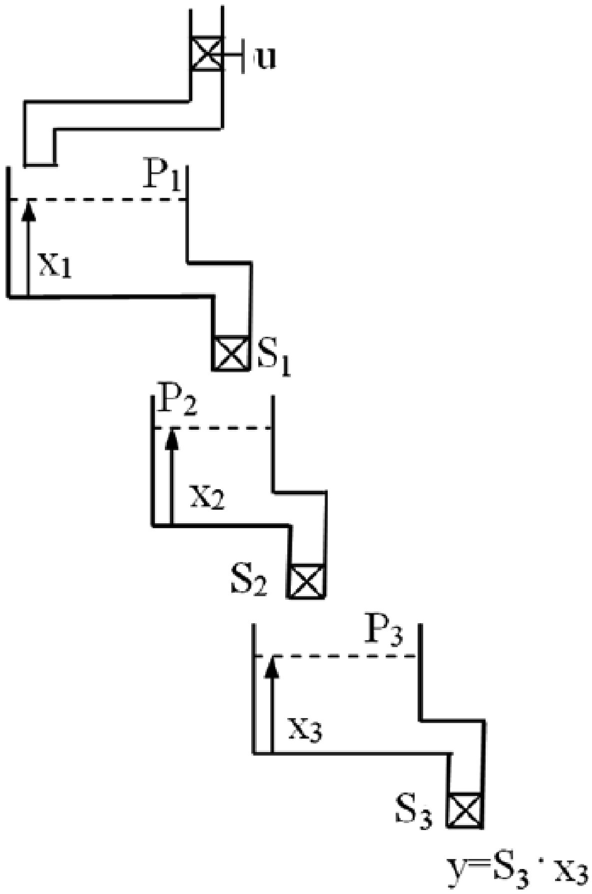
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (6 CFU) / “CONTROLLI AUTOMATICI”

Prova scritta – 19 settembre 2018

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si consideri il sistema qui a fianco, costituito da tre serbatoi di liquido in cascata tra loro, al primo dei quali è applicato un flusso di liquido entrante manipolabile direttamente ed in ciascuno dei quali il flusso di liquido uscente è proporzionale al livello di liquido nel serbatoio stesso.



Il modello dinamico di tale sistema si ottiene effettuando il bilancio di massa per ogni serbatoio, considerando che la massa contenuta nel serbatoio è data dal livello del liquido moltiplicata per l’area della sezione orizzontale del serbatoio stesso e per la densità del fluido, mentre la variazione nel tempo di tale massa è data dalla differenza tra il flusso entrante e quello uscente. Indicando (per l’i-esimo serbatoio) il prodotto di queste ultime quantità con P_i, il livello del liquido con x_i ed coefficiente del flusso in uscita con S_i, le equazioni differenziali che descrivono il sistema, sono quindi le seguenti:

$$P_1\dot{x}_1 = u - S_1x_1$$

$$P_2\dot{x}_2 = S_1x_1 - S_2x_2$$

$$P_3\dot{x}_3 = S_2x_2 - S_3x_3$$

Si considerino le seguenti impostazioni dei parametri del modello:

$P_1 = 1;\quad P_2 = 2;\quad P_3 = 1;$

$S_1 =$ **ultima cifra (a destra) del proprio numero di matricola (se 0, sostituire con 1)**
$S_2 =$ **penultima cifra (a destra) del numero di matricola (se 0, sostituire con 2)**;
$S_3 =$ **terzultima cifra (a destra) del numero di matricola (se 0, sostituire con 3)**;

Fissati i parametri in base al proprio numero di matricola, si determini il modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Considerando come variabili di stato e ingresso quelle con la notazione standard x_1, x_2, x_3 e u e come uscita $y = S_3\, x_3$.

Si verifichi poi se il sistema sia o meno completamente <u>controllabile</u>, calcolando la matrice di raggiungibilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

N.B.: fornita in funzione del numero di matricola dello studente.
Occorre dividere ciascuna equazione differenziale di partenza per il coefficiente della variabile derivata, cioè rispettivamente P_1, P_2 e P_3 per la prima, seconda e terza equazione.
Riordinando opportunamente i termini nelle equazioni per evidenziare l'ordine delle variabili di stato e uscita:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -S_1 x_1 & & & +u \\
\dot{x}_2 &= \frac{S_1}{2} x_1 & -\frac{S_2}{2} x_1 & & \\
\dot{x}_3 &= & S_2 x_2 & -S_3 x_3 &
\end{aligned}$$

si possono ricavare agevolmente i coefficienti delle matrici A e B richieste:

$$A = \begin{bmatrix} -S_1 & 0 & 0 \\ \frac{S_1}{2} & -\frac{S_2}{2} & 0 \\ 0 & S_2 & -S_3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono dall'espressione dell'uscita $y = S_3\, x_3$: poiché tale uscita non dipende dall'ingresso $D = 0$ (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione $1x3$ che estrae la prima variabile dal vettore di stato è:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Per l'analisi di controllabilità, la matrice di interesse è:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -S_1 & S_1^2 \\ 0 & \frac{S_1}{2} & \frac{S_1^2}{2} - \frac{S_1 S_2}{4} \\ 0 & 0 & \frac{S_1 S_2}{2} \end{bmatrix}$$

Che risulta avere rango(P) = 3 (cioè sistema <u>completamente controllabile</u>) per qualsiasi numero di matricola dello studente (considerando le opportune sostituzioni imposte nel caso di cifre nulle).

ESERCIZIO 2.

Per il sistema con i valori numerici indicati nell'Esercizio 1, si progetti una retroazione stato-ingresso (i.e. $u = H\,x + v$), in modo tale che:

- gli autovalori assegnabili del sistema chiuso in retroazione siano tutti reali e distinti;
- il più lento di tali autovalori abbia tempo di assestamento (al 5%) di 3 secondi e gli altri assegnabili abbiano valori assoluti progressivi di una unità (es. -1, -2, ecc.).

RISPOSTA:

Poiché la matrice di raggiungibilità ha rango 3, (v. Esercizio 1) è possibile assegnare arbitrariamente TUTTI gli autovalori del sistema chiuso in retroazione con una retroazione stato-ingresso. Gli autovalori desiderati sono determinali dalle specifiche dell'esercizio ricordando che il tempo di assestamento al 5% del modo corrispondente ad un autovalore reale è:

$$T_a = -\frac{3}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{T_a}$$

Pertanto, per avere $T_a = 3$, l'autovalore più lento deve essere pari a $\lambda_1 = -1$ e gli altri devono essere: $\lambda_2 = -2$, $\lambda_2 = -3$.

Con tale scelta, il <u>polinomio caratteristico desiderato</u> per il sistema chiuso in retroazione deve essere:

$$\begin{aligned} p_{des}(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) = \\ &= (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 \end{aligned}$$

La matrice H del controllore deve essere di dimensione 1x3, cioè $H = [h_1 \;\; h_2 \;\; h_3]$, pertanto la matrice del sistema chiuso in retrazione con i coefficienti incogniti di H risulta:

$$A+BH=\begin{bmatrix} h_1-S_1 & h_2 & h_3 \\ \frac{S_1}{2} & -\frac{S_2}{2} & 0 \\ 0 & S_2 & -S_3 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza, il <u>polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione</u> risulta:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(\lambda I - A - BH) = \\ &= \lambda^3 + (S_1 - h_1 + \tfrac{S_2}{2} + S_3)\lambda^2 + \\ &\quad +(\tfrac{S_1S_2}{2} - \tfrac{h_2S_1}{2} - h_1S_3 - \tfrac{h_1S_2}{2} + S_1S_3 + \tfrac{S_2S_3}{2})\lambda + \\ &\quad -\tfrac{h_1S_2S_3}{2} - \tfrac{h_2S_1S_3}{2} - \tfrac{h_3S_1S_2}{2} + \tfrac{S_1S_2S_3}{2} \end{aligned}$$

Uguagliando quindi i coefficienti dei termini di pari grado nel polinomio caratteristico desiderato e nel polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione, dipendente da H, si ottengono i vincoli di progetto:

$$\begin{aligned} S_1 - h_1 + \tfrac{S_2}{2} + S_3 &= 6 \\ \tfrac{S_1S_2}{2} - \tfrac{h_2S_1}{2} - h_1S_3 - \tfrac{h_1S_2}{2} + S_1S_3 + \tfrac{S_2S_3}{2} &= 11 \\ -\tfrac{h_1S_2S_3}{2} - \tfrac{h_2S_1S_3}{2} - \tfrac{h_3S_1S_2}{2} + \tfrac{S_1S_2S_3}{2} &= 6 \end{aligned}$$

NOTA BENE: il sistema di equazioni da risolvere da parte dello studente avrà coefficienti numerici al posto dei parametri S_1, S_2 e S_3.

Ricavando dalle equazioni precedenti i valori di h_1, h_2 e h_3 si ottiene la soluzione finale:

$$H = \left[\begin{array}{c} S_1 + \frac{S_2}{2} + S_3 - 6 \\ \vdots \\ \frac{-S_2^2 - 2S_2S_3 + 12S_2 - 4S_3^2 + 24S_3 - 44}{2S_1} \\ \vdots \\ \frac{2S_3^3 - 12S_3^2 + 22S_3 - 12}{S_1S_2} \end{array}\right]$$

ESERCIZIO 3.

Dato il seguente sistema dinamico ed il corrispondente valore dello stato all'istante t = 3 secondi:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x(t) \qquad x(3) = \begin{bmatrix} 3e^{-4} \\ e^{-6} \end{bmatrix}$$

Si calcoli il valore dello stato *x(t)* all'istante $t = 1$ secondo:

RISPOSTA:

Per calcolare il valore della risposta è necessario determinare anzitutto la matrice esponenziale di A, applicando il metodo del polinomio interpolante. Nel caso particolare di matrice diagonale, si verifica immediatamente che risulta:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2\,t} & 0 \\ 0 & e^{-3\,t} \end{bmatrix}$$

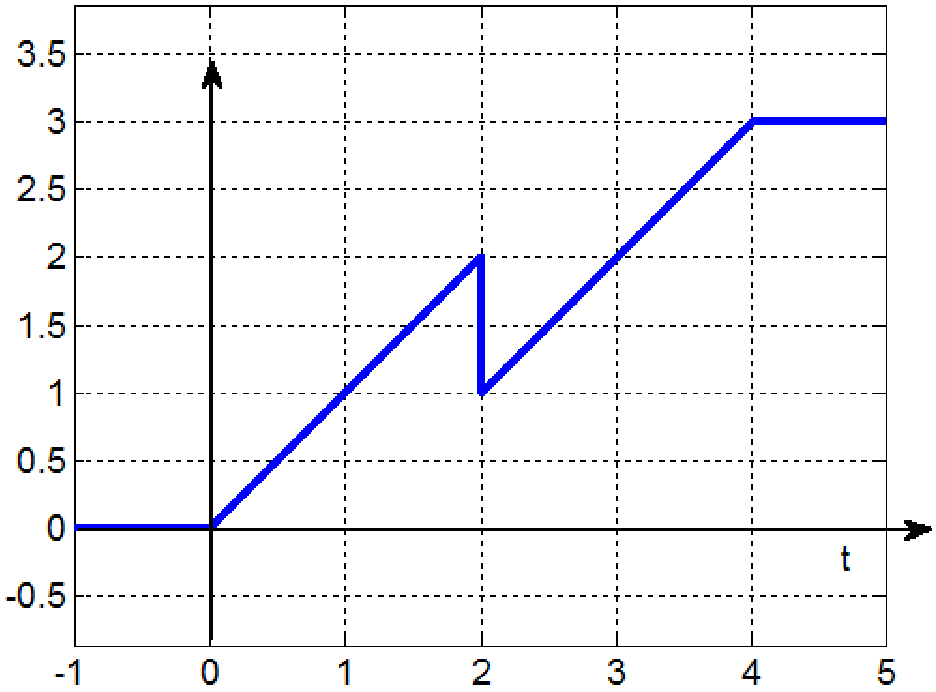
Dopodiché, per calcolare la riposta dell'esercizio:

$$x(1) = e^{A\,(1-3)}x(3) =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2(1-3} & 0 \\ 0 & e^{-3(1-3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3e^{-4} \\ e^{-6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 4.

Data la funzione f(t) avente il seguente andamento nel tempo:



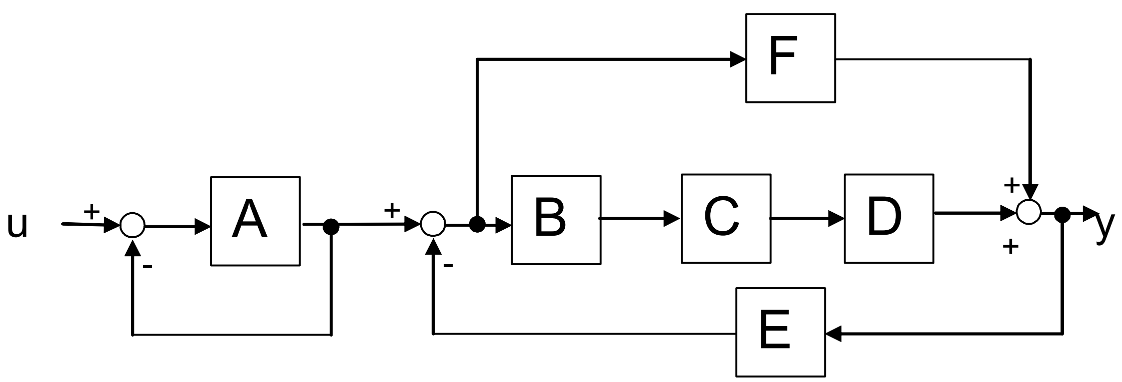
si calcoli la corrispondente funzione trasformata secondo Laplace.

RISPOSTA:

$$F(s) = 1/s^2 - 1/s\ e^{-2s} - 1/s^2\ e^{-4s}$$

ESERCIZIO 5.

Si determini la funzione di trasferimento del seguente diagramma a blocchi:

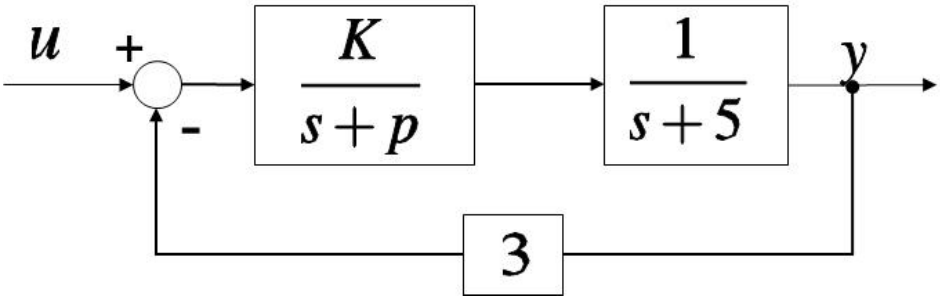


RISPOSTA:

Y / U = [A / (1 + A)] * [(BCD + F) / (1 + (BCD + F) E]

ESERCIZIO 6.

Dato il seguente sistema in retroazione:



si calcolino i valori di K e p tali per cui il sistema ad anello chiuso risulti avere tempo di assestamento $T_a = 0{,}5$ secondi e coefficiente di smorzamento $\delta = 0{,}6$.

RISPOSTA:

Il tempo di assestamento di un sistema del secondo ordine è noto essere $T_a = 3 / \delta\omega_n$, pertanto imporre che questo sia uguale a 0,5 significa anche imporre che il prodotto $\delta\omega_n$ sia uguale a 6 e quindi anche che il prodotto $2\,\delta\,\omega_n$ sia uguale a 12.
Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta:

$$s^2 + (p+5)s + (5p + 3K)$$

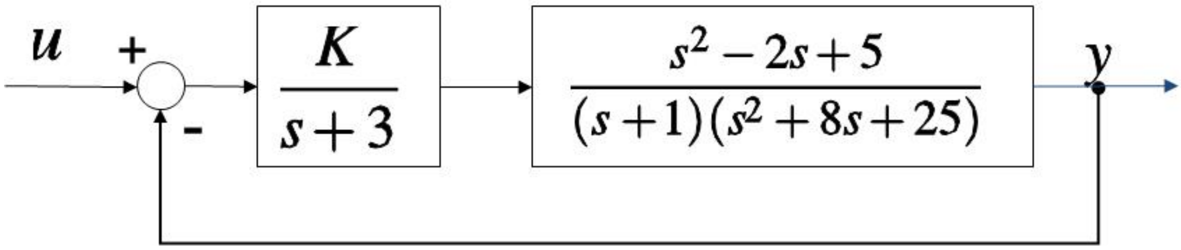
Confrontando tale polinomio con il denominatore tipico dei sistemi del secondo ordine $s^2 + 2\,\delta\,\omega_n\,s + \omega_n^2$, si può notare che il coefficiente del secondo termine, in base alle considerazioni precedenti, deve essere uguale a 12, da cui si ricava subito che $p = 7$.

Dal vincolo sul valore di $\delta = 0{,}6$ si ricava che $\omega_n = 10$ e quindi $\omega_n^2 = 100$. Dato il valore di p appena calcolato, si ricava dal termine costante del polinomio che $K = 65/3$, pertanto il risultato finale è

$$K = 65/3 \qquad p = 7$$

ESERCIZIO 7.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:

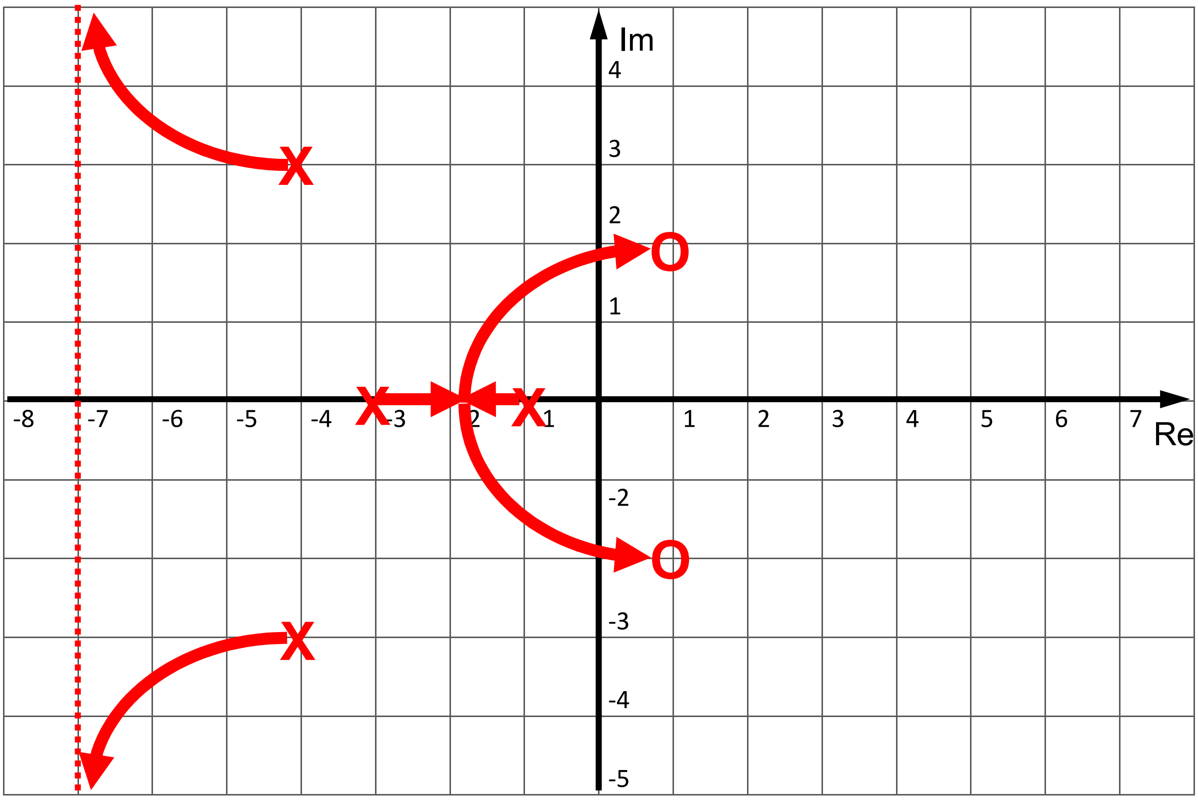


si disegni il corrispondente luogo delle radici valido per K > 0 (luogo diretto).

RISPOSTA:

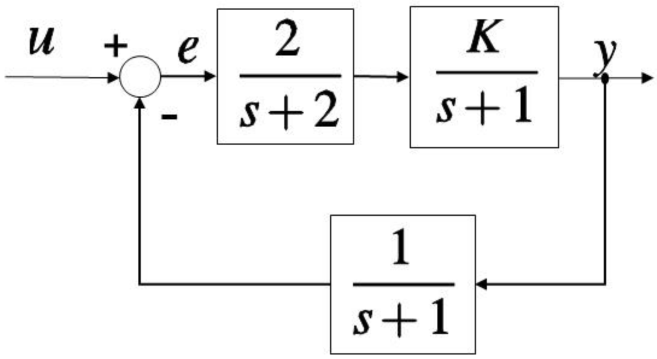
NOTA: la funzione di trasferimento di anello ha due zeri complessi (n_z = 2) in +1±2i e quattro poli, di cui due complessi (n_p = 4) rispettivamente in -1, -3 e -4±3i, pertanto il luogo ha due asintoti (numero asintoti = $n_p - n_z$ = 2), disposti con angolo di π/2 e 3/2 π rispetto all'asse reale. Il centro degli asintoti è il punto sull'asse reale con coordinata:

$$\sigma_{asintoti} = \frac{1}{n_p - n_z}\left(\sum_{i=1}^{n_p} p_i - \sum_{i=1}^{n_z} z_i\right) = -14/2 = -7$$



ESERCIZIO 8.

Dato il sistema descritto dallo schema a blocchi mostrato nel seguito:



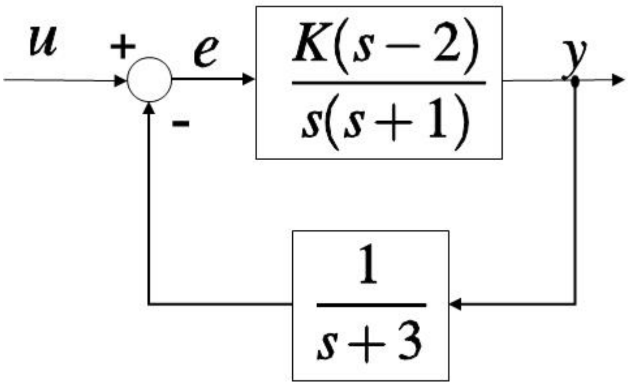
e considerando un ingresso a gradino unitario ($u(s) = 1\ /\ s$) i determini il valore di K tale per cui l'errore a regime risulti $e(\infty) = 0,2$.

RISPOSTA:

$$K = 4$$

ESERCIZIO 9.

Dato il seguente sistema in retroazione:



si determinino i valori di K tali per cui il sistema ad anello chiuso risulti essere ASINTOTICAMENTE STABILE.

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta:

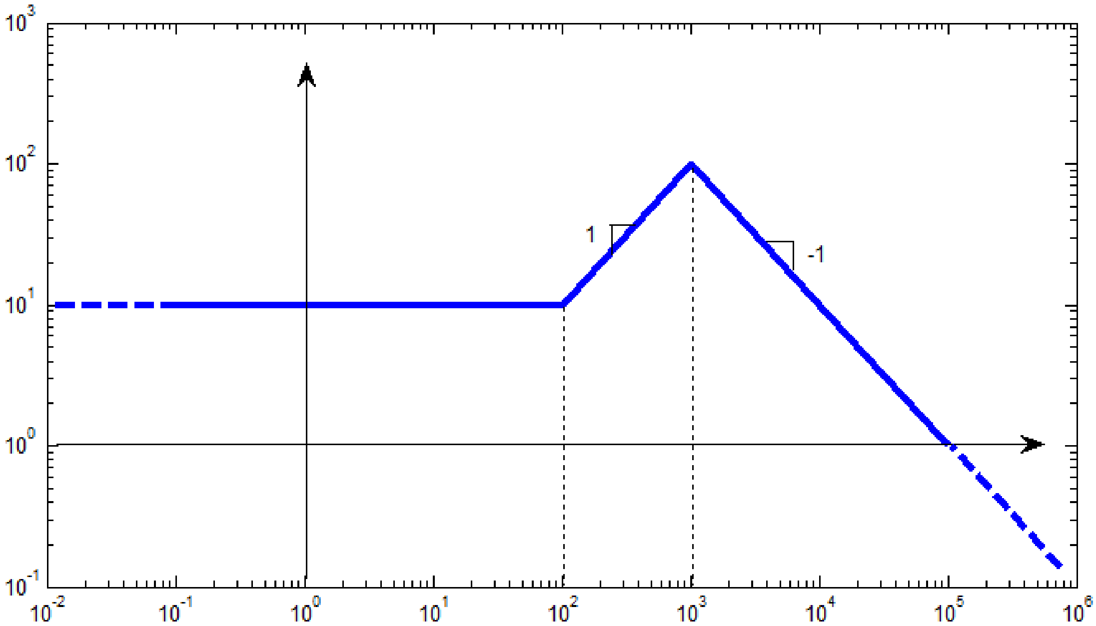
$$s^3 + 4s^2 + (3+K)s - 2K$$

Applicando a questo polinomio il criterio di Routh, si ottiene l'intervallo di stabilità:

$$-2 < K < 0$$

ESERCIZIO 10.

Si determini la funzione di trasferimento, supposta a fase minima, il cui diagramma di Bode delle ampiezze è descritto dalla seguente figura:



RISPOSTA:

$$G(s) = \frac{10\left(1+\frac{s}{100}\right)}{\left(1+\frac{s}{1000}\right)^2}$$
