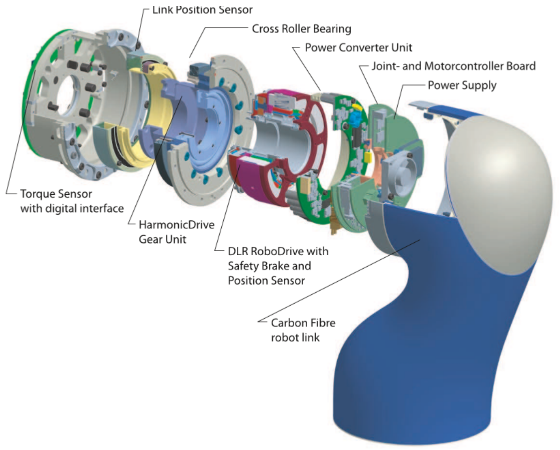
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (6 CFU) / “CONTROLLI AUTOMATICI”

Prova scritta – 13 luglio 2017

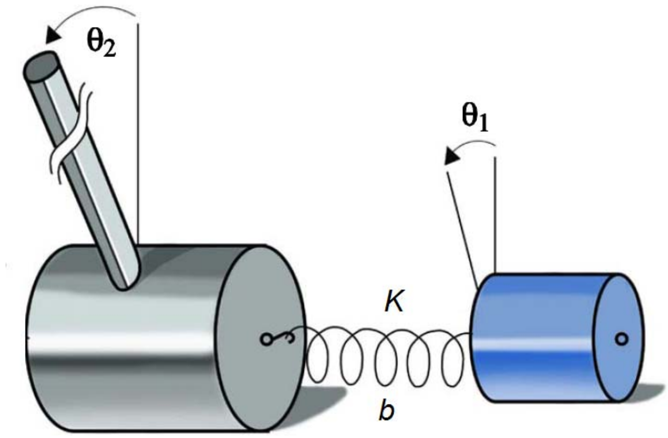
SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

I moderni robot industriali con funzionalità *collaborative* (i.e. co-esistenza e interazione sicura tra umani e robot) sono spesso dotati di accoppiamenti meccanici elastici tra motori e parti in movimento, come ad esempio nel Light-Weight Robot (LWR) progettato dall’ente di ricerca tedesco DLR. La figura seguente mostra un esploso dettagliato del progetto meccanico (sinistra) e uno schema semplificato della trasmissione del moto tra motore e giunto:



(figura dal sito DLR – Institute of Robotics and Mechatronics)



Dal bilancio delle forze generalizzate applicate alle due parti in moto (i.e. rotore del motore elettrico e braccio), si ottengono le seguenti equazioni differenziali:

$$J_1\dot{\omega}_1 = -K(\theta_1 - \theta_2) - b(\omega_1 - \omega_2) + K_m I$$

$$J_2\dot{\omega}_2 = K(\theta_1 - \theta_2) + b(\omega_1 - \omega_2)$$

nella quale $\omega_1 = \dot{\theta}_1$ e $\omega_2 = \dot{\theta}_2$, J_1 e J_2 sono i momenti di inerzia delle due parti rotanti, K e b sono rispettivamente l’elasticità e la viscosità dell’accoppiamento meccanico, mentre I e K_m sono rispettivamente la corrente elettrica nel motore e la costante di coppia di quest’ultimo.

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, di ordine 3 e del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = (\theta_1 - \theta_2);\ x_2 = \omega_1;\ x_3 = \omega_2;\ u = I;\ y = x_1$$

RISPOSTA:

Occorre

- sostituire la notazione delle variabili di stato, ingresso e uscita
- notare che la derivata della prima variabile di stato corrisponde alla differenza tra la seconda e la terza variabile di stato, in quanto:
  $$\dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = \omega_1 - \omega_2$$

Si ottengono così le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 - x_3 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{K}{J_1}x_1 - \frac{b}{J_1}x_2 + \frac{b}{J_1}x_3 + \frac{K_m}{J_1}u \\
\dot{x}_3 &= \frac{K}{J_2}x_1 + \frac{b}{J_2}x_2 - \frac{b}{J_2}x_3
\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{K}{J_1} & -\frac{b}{J_1} & \frac{b}{J_1} \\ \frac{K}{J_2} & \frac{b}{J_2} & -\frac{b}{J_2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{J_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y = x_1$, poiché tale uscita non dipende dall'ingresso D = 0 (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la variabile dal vettore di stato è C = [1 0 0].

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$J_1 = 0{,}2; \quad J_2 = 0{,}1; \quad K = 2; \quad b = 0{,}1; \quad K_m = 0{,}8;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente controllabile, calcolando la matrice di raggiungibilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema diventano:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -10 & -1/2 & 1/2 \\ 20 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 4 & -2 & -37 \\ 0 & 4 & 74 \end{bmatrix}$$

rango(P) = 3

Perciò il sistema **E'** ~~/ NON E'~~ completamente controllabile

---

ESERCIZIO 3.

Per il sistema con i valori numerici indicati nell'Esercizio 2, si progetti una retroazione stato-ingresso (i.e. $u = H x + v$), in modo tale che:

- gli autovalori assegnabili del sistema chiuso in retroazione siano tutti reali e distinti;
- il più lento di tali autovalori abbia tempo di assestamento (al 5%) di 0,6 secondi e gli altri assegnabili abbiano valori assoluti progressivi di una unità (es. -5, -6, ecc.).

RISPOSTA:

Poiché il sistema è completamente controllabile (v. Esercizio 2) è possibile assegnare arbitrariamente tutti e tre gli autovalori del sistema chiuso in retroazione con una retroazione stato-ingresso. Gli autovalori desiderati sono determinali dalle specifiche dell'esercizio ricordando che il tempo di assestamento al 5% del modo corrispondente ad un autovalore reale è:

$$T_a = -\frac{3}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{T_a}$$

Pertanto, per avere $T_a = 0,6$, l'autovalore più lento deve essere pari a $\lambda_1 = -5$, mentre gli altri devono essere: $\lambda_2 = -6$, $\lambda_3 = -7$.

Con tale scelta, il polinomio caratteristico desiderato per il sistema chiuso in retroazione deve essere:

$$\begin{aligned} p_{des}(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) = \\ &= (\lambda+5)(\lambda+6)(\lambda+7) = \lambda^3 + 18\lambda^2 + 107\lambda + 210 \end{aligned}$$

La matrice H del controllore deve essere di dimensione 1x3, cioè $H = [h_1 \quad h_2 \quad h_3]$, pertanto la matrice del sistema chiuso in retrazione con i coefficienti incogniti di H risulta:

$$A + BH = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4h_1 - 10 & 4h_2 - 1/2 & 4h_3 + 1/2 \\ 20 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza, il polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione risulta:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(\lambda I - A - BH) = \\ &= \lambda^3 + (3/2 - 4h_2)\lambda^2 + (30 - 4h_1 - 4h_2 - 4h_3)\lambda - 80h_2 - 80h_3 \end{aligned}$$

Uguagliando tra loro i coefficienti dei termini di pari grado nel polinomio caratteristico desiderato e nel polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione si ottengono i 3 vincoli per determinare i 3 coefficienti incogniti di H:

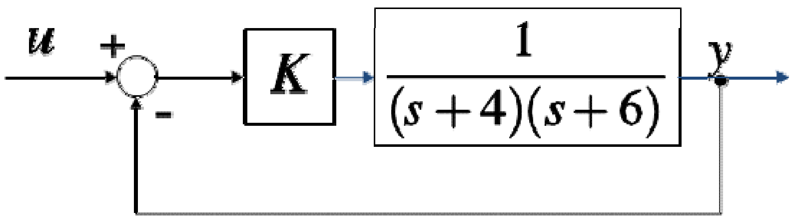
$$\begin{aligned} 3/2 - 4h_2 &= 18 \\ 30 - 4h_1 - 4h_2 - 4h_3 &= 107 \\ -80h_2 - 80h_3 &= 210 \end{aligned}$$

la cui soluzione finale è:

$$H = [\ -133/8 \quad -33/8 \quad 3/2\ ]$$

ESERCIZIO 4.

Dato lo schema a blocchi della seguente figura



si progetti il valore di K (>0) in modo che il sistema ad anello chiuso abbia due poli entrambi pari a $-p$, calcolando anche il valore di p(>0).

RISPOSTA:
Il denominatore ad anello chiuso del sistema è:

$$D_{c.l.}(s) = s^2 + 10s + 24 + K$$

Affinchè tale denominatore abbia due poli in a $-p$ è necessario che esso sia uguagliato al seguente denominatore desiderato:

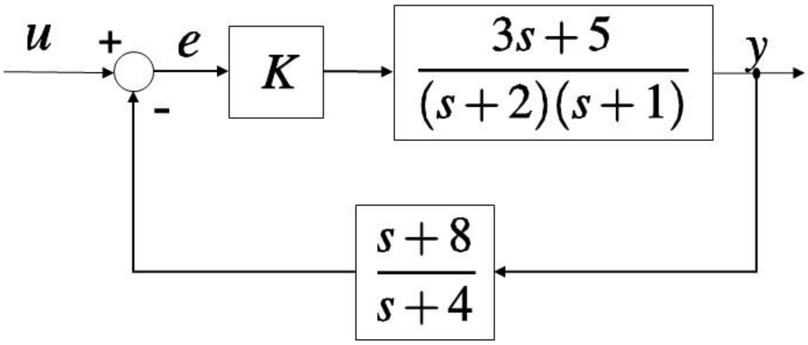
$$D_{des}(s) = (s+p)(s+p) = s^2 + 2ps + p^2$$

Uguagliando i coefficienti dei termini di primo grado e i termini costanti si ottengono due equazioni di vincolo che permettono di determinare prima p e poi K, con il seguente risultato:

$K = 1$ $\qquad\qquad$ $p = 5$

ESERCIZIO 5.

Dato il sistema descritto dallo schema a blocchi indicato in figura:



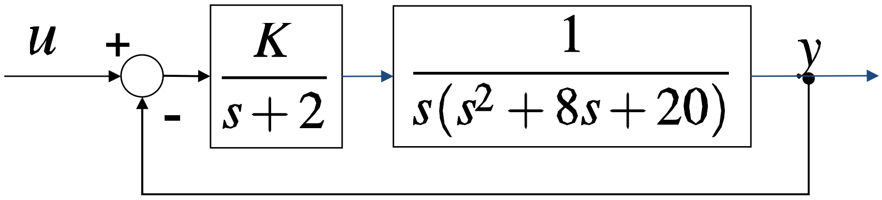
Si progetti il valore di K in modo che l'errore a regime tenda al seguente valore finale:

$e(\infty) = 1/5 = 0,2$

RISPOSTA: K = 4 / 5

ESERCIZIO 6.

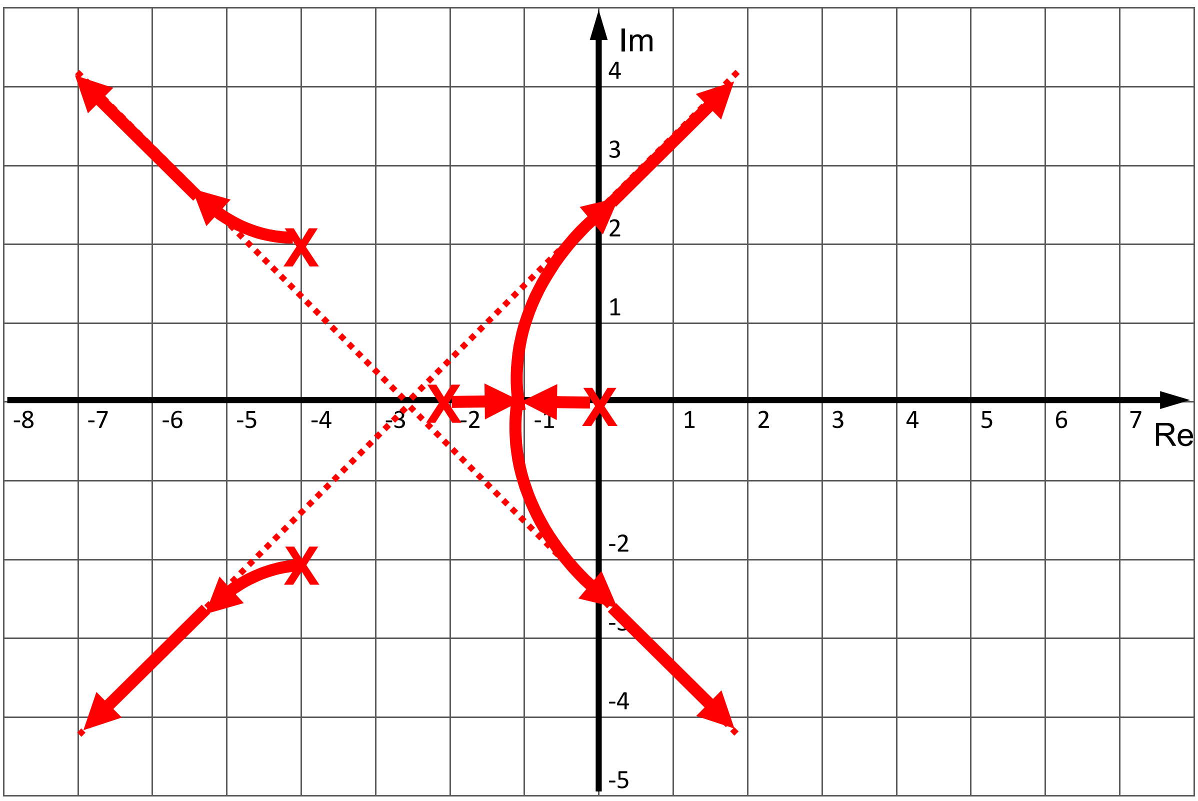
Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si disegni il corrispondente luogo delle radici valido per $K > 0$ (luogo diretto).

RISPOSTA:
NOTA: la funzione di trasferimento di anello non ha alcuno zero ($n_z = 0$), ma ha quattro poli ($n_p = 4$) rispettivamente in 0, -2, -4-2i e -4+2i. Pertanto il luogo ha quattro asintoti (numero asintoti = $n_p - n_z = 4$), disposti con angoli di π/4, 3/4*π, 5/4*π e 7/4*π rispetto all'asse reale. Il centro degli asintoti è il punto sull'asse reale con coordinata:

$$\sigma_{asintoti} = \frac{1}{n_p - n_z}\left(\sum_{i=1}^{n_p} p_i - \sum_{i=1}^{n_z} z_i\right) = -5/2$$



ESERCIZIO 7.

Dato il sistema dal diagramma a blocchi dell'Esercizio 6, si determini l'intervallo di valori di K per i quali il sistema risulti <u>asintoticamente stabile</u>.

RISPOSTA:

L'intervallo di stabilità per i valori di K si determina applicando il criterio di Routh al polinomio a denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso:

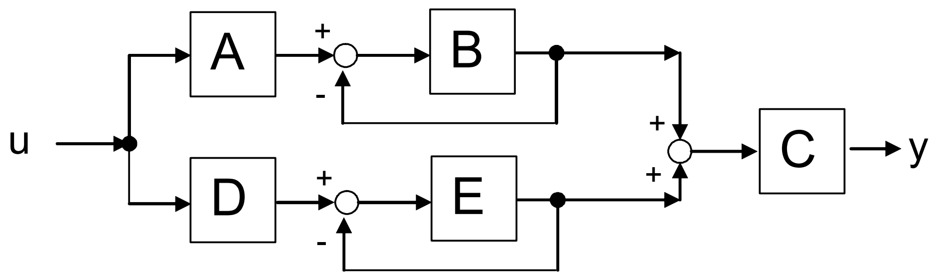
$$D_{cl}(s) = s^4 + 10s^3 + 36s^2 + 40s + K$$

Dalla tabella di Routh si ottengono due vincoli per K, cioè $K > 0$ e $K < 128$, perciò:

$$0 < K < 128$$

ESERCIZIO 8.

Si determini la funzione di trasferimento tra ingresso u e uscita y corrispondente al seguente diagramma a blocchi:

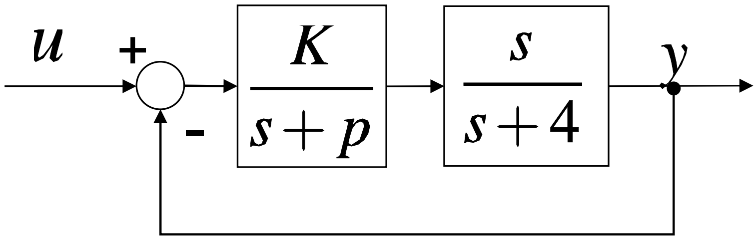


RISPOSTA:

$$Y / U = [\, A\,B / (1 + B) + D\,E / (1 + E)\,]\, C$$

ESERCIZIO 9.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determinino i valori di K e p tali che il sistema ad anello chiuso risulti avere pulsazione naturale $\omega_n = 3$ e tempo di assestamento $T_a = 2$ secondi

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta $= s^2 + (K + p + 4)\, s + 4\, p$.

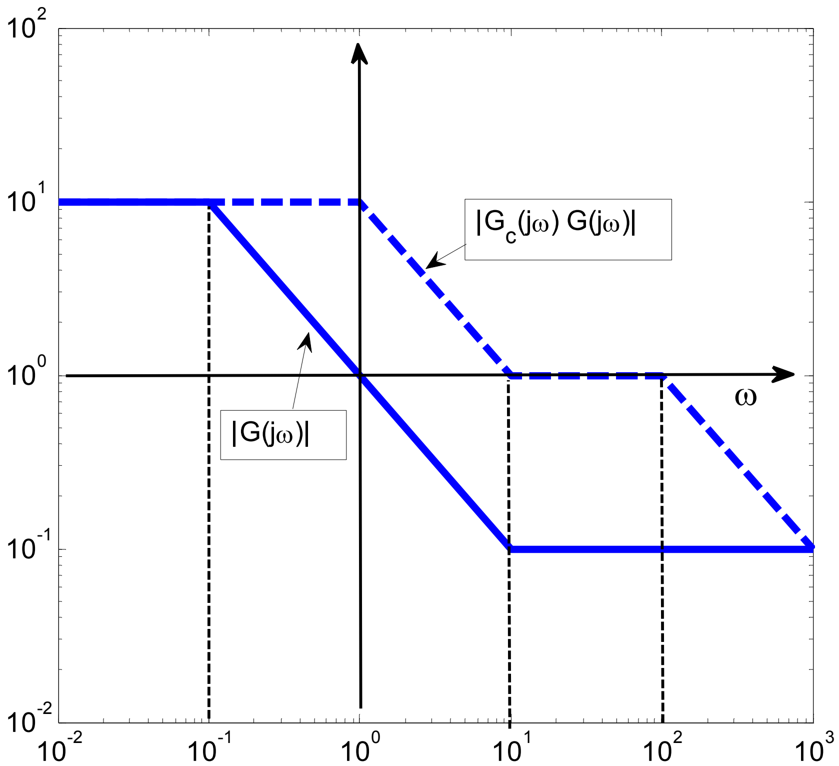
Confrontando tale polinomio con il denominatore tipico dei sistemi del secondo ordine $s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2$, si può notare che il coefficiente del terzo termine corrisponde a $\omega_n^2 = 9 = 4\, p$, da cui si ricava immediatamente $p = 9/4$.

Il tempo di assestamento di un sistema del secondo ordine è noto essere: $T_a = 3 / \delta\, \omega_n$, pertanto ipotizzando che la specifica su ω_n sia rispettata, si ottiene che deve essere $\delta = 3/4$. Dati quindi i valori di p e δ e confrontando il coefficiente del termine di grado due del denominatore tipico con quello ottenuto in funzione di K e p, si ottiene $K = -13/4$, pertanto il risultato finale è

$$K = -13/4 \qquad\qquad p = 9/4$$

ESERCIZIO 10.

Dato il seguente diagramma di Bode, si determinino le funzioni di trasferimento, supposte a fase minima, del sistema controllato $G(s)$ e del controllore $G_c(s)$:



RISPOSTA:

$$G(s) = \frac{10(1+\frac{s}{10})}{1+\frac{s}{10^{-1}}}$$

$$G_c(s) = \frac{1+\frac{s}{10^{-1}}}{(1+s)(1+\frac{s}{100})}$$