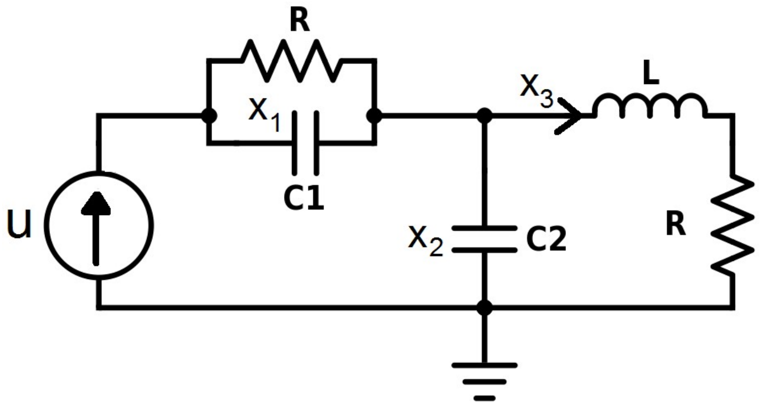
SOLUZIONE della Prova TIPO – F per:

- **Esame di "FONDAMENTI DI AUTOMATICA" (9 CFU):** 6 degli 8 esercizi numerici + 4 delle 5 domande a risposta multipla (v. ultime due pagine) **NOTA**: nell'effettiva prova d'esame i due esercizi e la domanda non richiesti verranno scartati a priori dal docente (lo studente riceverà un testo già adattato al numero di CFU)

- **Esame di "FONDAMENTI DI AUTOMATICA" (6 CFU) / "CONTROLLI AUTOMATICI":** tutti gli 8 esercizi numerici + 5 domande a risposta multipla (v. ultime 2 pagine)

ESERCIZIO 1.

Si consideri il seguente circuito elettrico passivo:



Applicando le leggi di Kirchhoff e le formule di base dei componenti RLC, si ottiene il seguente modello matematico:

$$C_1\dot{x}_1 + \frac{x_1}{R} = u$$

$$C_2\dot{x}_2 + x_3 = u$$

$$L\dot{x}_3 + Rx_3 = x_2$$

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

considerando le ovvie scelte per stato e ingresso, mentre l'uscita sia fissata $y = x_1$;.

RISPOSTA:

Le equazioni fornite sono già predisposte per una immediata riscrittura in forma compatibile con la definizione delle matrici di sistema A, B, C, D:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{1}{RC_1}x_1 && && +\frac{1}{C_1}u \\
\dot{x}_2 &= && -\frac{1}{C_2}x_3 && +\frac{1}{C_2} \\
\dot{x}_3 &= \frac{1}{L}x_2 && -\frac{R}{L}x_3 &&
\end{aligned}$$

Dalle quali risulta appunto:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{C_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

e poiché $y = x_1$, l'uscita non dipende dall'ingresso ($D = 0$, sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la prima variabile dal vettore di stato è:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$R = 2; \quad C_1 = 0{,}25; \quad C_2 = 0{,}5; \quad L = 0{,}25;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente osservabile, calcolando la matrice di osservabilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Con i parameri fissati, la matrice A (la matrice B non interessa ai fini dell'analisi di osservabilità) diventa:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Pertanto la matrice di osservabilità è:

$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rango(Q^T) = 1

Perciò il sistema ~~E' /~~ **NON E'** completamente osservabile.

ESERCIZIO 3.

Si calcoli la risposta impulsiva del sistema descritto dal seguente modello matematico ingresso-uscita nel dominio del tempo:

$$\dot{y}(t) + 4y(t) = 2u(t)$$

RISPOSTA:

La risposta impulsiva del sistema è l'antitrasformata di Laplace della funzione di trasferimento ingresso-uscita. Quest'ultima, può essere ottenuta in modo molto semplice dalla trasformata di Laplace del modello matematico fornito, ricordando il teorema della trasformata di Laplace per la derivata di un segnale:

$$sY(s) + 4Y(s) = 2U(s)$$

Da cui si ottiene:

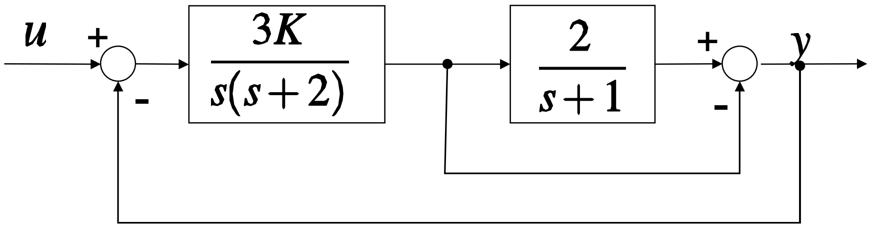
$$G(\mathrm{s}) = \frac{Y(\mathrm{s})}{U(\mathrm{s})} = \frac{2}{(\mathrm{s}+4)}$$

la cui antitrasformata è il risultato immediato:

$$W(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(\mathrm{s})] = 2e^{-4t}$$

ESERCIZIO 4.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determini l'intervallo di valori di K tali per cui il sistema ad anello chiuso risulti essere ASINTOTICAMENTE STABILE.

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso, ottenuto risolvendo la retroazione tra il blocco dipendente da K e il parallelo di 2/(s+1) con un ramo unitario negativo, risulta:

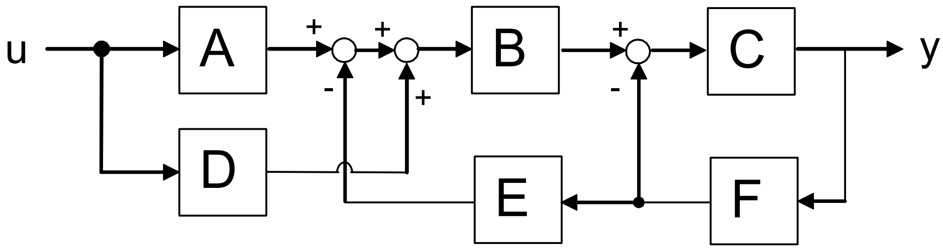
$$s^3 + 3\, s^2 + (1 - 3\, K)\, s + 3\, K$$

Applicando a quest'ultimo il criterio di Routh si ottiene la condizione:

$$0 < K < 1/2$$

ESERCIZIO 5.

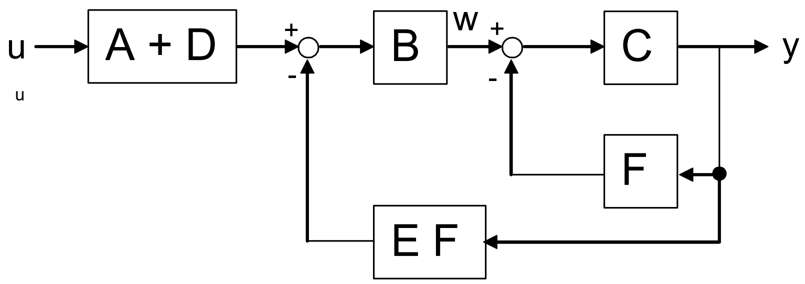
Si determini la funzione di trasferimento del seguente schema a blocchi:



RISPOSTA:

$$Y / U = (A + D)\,(B\,C) / (1 + C\,F + B\,C\,E\,F)$$

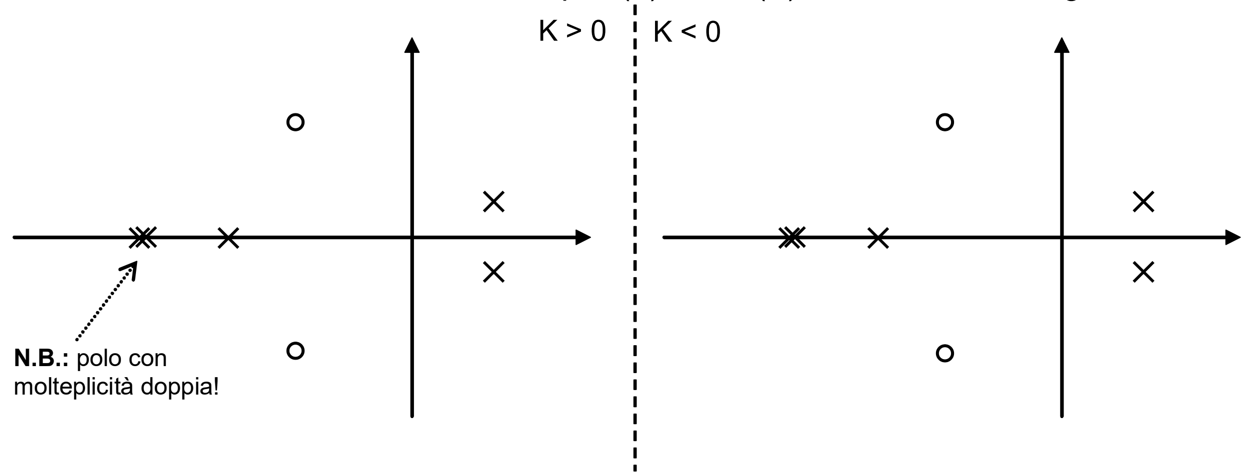
Lo schema è equivalente al seguente, ottenuto scambiando di ordine i due nodi sommatori dopo il blocco A e spostando la diramazione che precede il blocco E a monte di F:



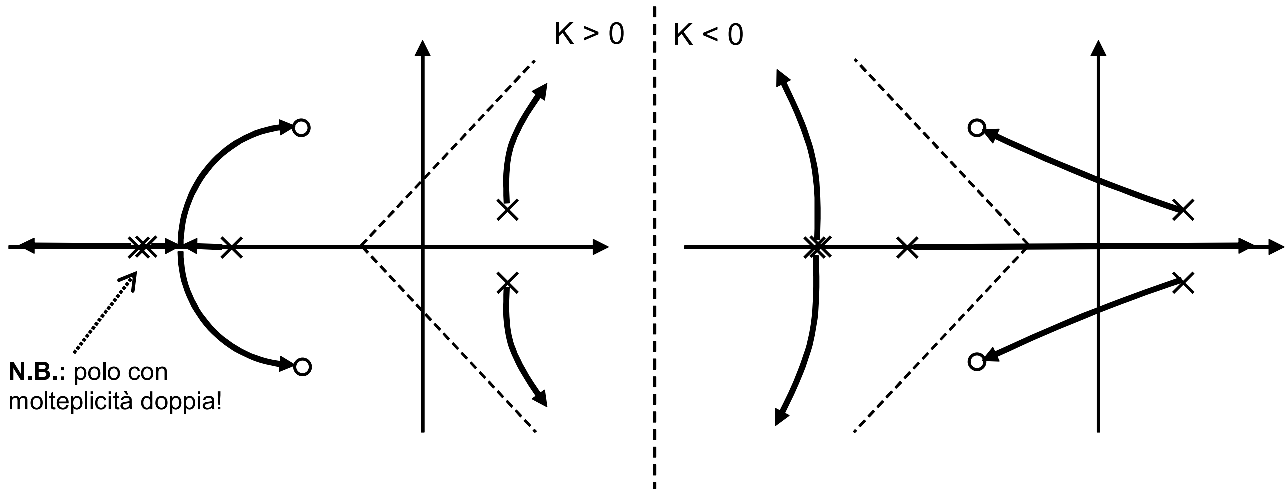
I due anelli di retroazione presenti possono essere ridotti in successione, a partire da quello più interno (per il quale risulta $y / w = C / (1 + CF)$).

ESERCIZIO 6.

Si tracci l'andamento qualitativo del luogo delle radici per un sistema in retroazione la cui funzione di trasferimento d'anello abbia poli (x) e zeri (o) come indicato in figura:



RISPOSTA:



ESERCIZIO 7.

Si calcoli la risposta $y(t)$ del sistema avente funzione di trasferimento ed al quale è applicato un ingresso a gradino unitario (trasformata di Laplace $u(s) = 1/s$):

$$G(s) = \frac{7s+24}{s^2+7s+12}$$

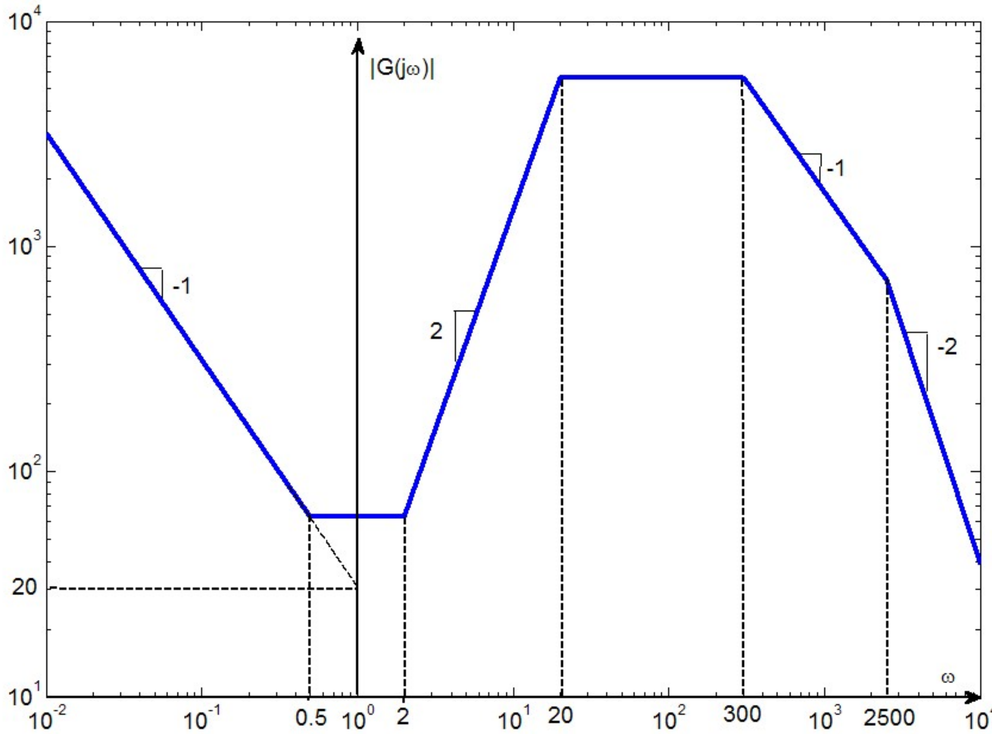
RISPOSTA:

Applicando il metodo della scomposizione in fratti semplici alla funzione ottenuta da $Y(s) = G(s)\ U(s)$, avente poli in 0 (dalla funzione del gradino in ingresso), -3 e -4 (poli di $G(s)$), si ottiene:

$$y(t) = 2 - e^{-3t} - e^{-4t}$$

ESERCIZIO 8.

Dato il seguente diagramma di Bode delle ampiezze:



si determinino le incognite della corrispondente funzione di trasferimento, supposta a fase minima:

$$G(s) = \frac{K(1+2s)(1+as)^{m_a}}{s(1+\frac{s}{20})^2(1+bs)^{n_b}(1+\frac{s}{2500})}$$

RISPOSTA:

$K = 20$ $a = 1/2$ (punto di rottura a pulsazione = 2) $m_a = 2$

$b = 1/300$ (punto di rottura a pulsazione = 300) $n_b = 1$

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.
La stabilità di un sistema lineare e stazionario:
O È funzione delle condizioni iniziali di un sistema
O È funzione del valore degli ingressi
O È funzione del valore dei disturbi
X È funzione degli autovalori del sistema

DOMANDA 2.
L'ingresso u(t) e l'uscita y(t) di un sistema sono legati dalla relazione $\dot{y}(t) = u(t)$
Tale sistema:
O ha una funzione di trasferimento pari a G(s) = Y(s) / U(s) = s
X ha una funzione di trasferimento pari a G(s) = Y(s) / U(s) = 1 / s
O ha una funzione di trasferimento pari a G(s) = Y(s) / U(s) = 1 / (s+1)
X è puramente dinamico

NOTA: *Il modello del sistema in questione equivale ad un modello nello spazio degli stati con:* $\dot{x}(t) = u(t);\ y(t) = x(t)$. *Riconducendo questo modello a quello di un generico modello nello spazio degli stati, si può notare come le "matrici" (di dimensione 1x1) del sistema siano* $A=0$, $B=1$, $C=1$ *e* $D=0$. *Pertanto, il sistema è puramente dinamico e la corrispondente funzione di trasferimento è* $G(s) = C(sI-A)^{-1}B = 1/s$.

DOMANDA 3.
Il luogo delle radici di una funzione di trasferimento di anello avente n poli e m zeri, con $n > m$, presenta almeno un asintoto reale:
X quando $K > 0$ (luogo diretto) e $n - m$ è dispari
O quando $K > 0$ (luogo diretto) e $n - m$ è pari
X quando $K < 0$ (luogo inverso) e $n - m$ è dispari
X quando $K < 0$ (luogo inverso) e $n - m$ è pari

NOTA: *Se* $n > m$ *il luogo delle radici presenta sempre almeno un asintoto. Nel caso in cui sia* $K < 0$ *il primo asintoto ha sempre un angolo nullo rispetto all'asse reale, pertanto coincide con il semiasse reale positivo. Se invece* $K > 0$ *ed* $n - m$ *è dispari, sempre in base alla regola sugli angoli degli asintoti, uno degli asintoti avrà angolo π rispetto all'asse reale, pertanto coinciderà con il semiasse reale negativo.*

DOMANDA 4.
Sia F(s) una funzione razionale fratta nella variabile di Laplace s. La scomposizione in fratti semplici mediante il metodo dei residui, cioè:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{s - p_i}$$

nella quale i valori p_i sono i poli (tutti distinti) di $F(s)$, n è il grado di $D(s)$, m è il grado di $N(s)$ e:

$$k_i = \left[(s - p_i) \frac{N(s)}{D(s)} \right]_{s=p_i}$$

O è sempre possibile

O è possibile solo se la funzione $F(s)$ è propria ($m \leq n$)

X è possibile solo se la funzione $F(s)$ è strettamente propria ($m < n$)

O è sempre impossibile

DOMANDA 5.

Il criterio di Routh per lo studio di stabilità di un sistema retroazionato:

X è un criterio necessario e sufficiente

O è un criterio solo sufficiente

O si applica solo a sistemi ad anello aperto che siano stabili

O è un metodo basato sull'approssimazione