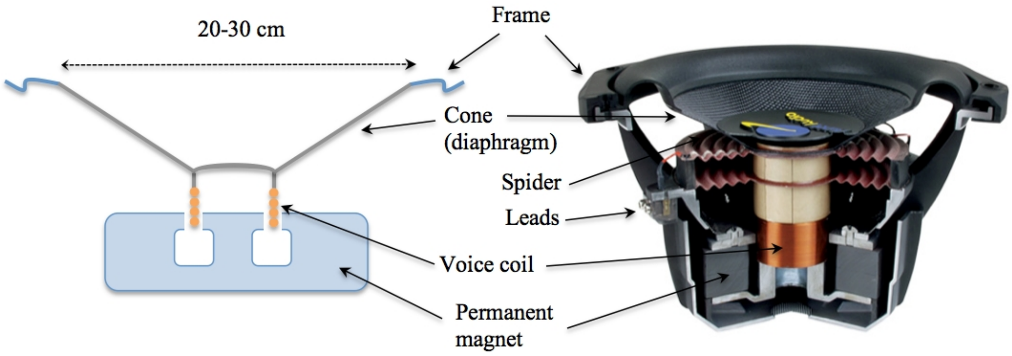
SOLUZIONE della Prova TIPO – B per:

- **Esame di "FONDAMENTI DI AUTOMATICA" (9 CFU):** 6 degli 8 esercizi numerici + 4 delle 5 domande a risposta multipla (v. ultime due pagine) **NOTA**: nell'effettiva prova d'esame i due esercizi e la domanda non richiesti verranno scartati a priori dal docente (lo studente riceverà un testo già adattato al numero di CFU)

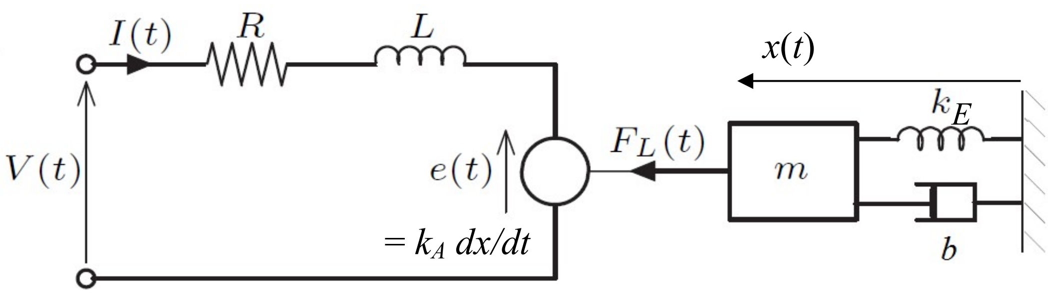
- **Esame di "FONDAMENTI DI AUTOMATICA" (6 CFU) / "CONTROLLI AUTOMATICI":** tutti gli 8 esercizi numerici + 5 domande a risposta multipla (v. ultime 2 pagine)

ESERCIZIO 1.

Si consideri un altoparlante ad attrazione magnetica per la riproduzione sonora, rappresentato dalla seguente figura:



Tale dispositivo è un sistema elettromeccanico che può essere schematizzato dal diagramma seguente, che evidenzia la presenza di un circuito elettrico RL e di un gruppo massa-molla-smorzatore azionato dalla forza di attrazione magnetica F_L:



Le equazioni differenziali che descrivono il modello dinamico del sistema sono le seguenti:

$$V = RI + L\dot{I} + k_A\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + k_E x = k_A I$$

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \; y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = I; \; x_2 = x; \; x_3 = \dot{x}; \; u = V; \; y = x_1$$

RISPOSTA:

Occorre:

- sostituire la notazione delle variabili di stato, ingresso e uscita
- notare che la derivata della seconda variabile di stato corrisponde alla terza variabile di stato: $\dot{x}_2 = x_3$

Si ottengono così le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{R}{L}x_1 & & -\frac{k_A}{L}x_3 & +\frac{1}{L}u \\
\dot{x}_2 &= & & x_3 & \\
\dot{x}_3 &= \frac{k_A}{m}x_1 & -\frac{k_E}{m}x_2 & -\frac{b}{m}x_3 &
\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & -\frac{k_A}{L} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_A}{m} & -\frac{k_E}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y=x_1$: poiché tale uscita non dipende dall'ingresso D = 0 (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la prima variabile dal vettore di stato è:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$m = 0{,}1; \quad b = 0{,}4; \quad k_E = 0{,}6; \quad R = 4; \quad L = 0{,}5; \quad k_A = 0{,}5$$

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente osservabile, calcolando la matrice di osservabilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema di interesse per l'analisi di osservabilità diventano:

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -6 & -4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T & A^TC^T & (A^T)^2C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 59 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 12 \end{bmatrix}$$

rango(Q^T) = 3

Perciò il sistema **E'** ~~/ NON E'~~ completamente osservabile.

ESERCIZIO 3.

Si calcoli l'antitrasformata di Laplace della seguente funzione:

$$F(s) = \frac{6s+26}{s^2+8s+15}$$

RISPOSTA:

Applicando la scomposizione in fratti semplici secondo il metodo dei residui, cioè calcolando:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{s - p_i}$$

nella quale p_i sono i poli (-3 e -5 in questo caso) di *F(s)*, *n* è il grado di *D(s)* e:

$$k_i = \left[(s-p_i)\frac{N(s)}{D(s)} \right]_{s \to p_i}$$

ed antitrasformando i fratti semplici così ottenuti, operazione di soluzione immediata ricordando che:

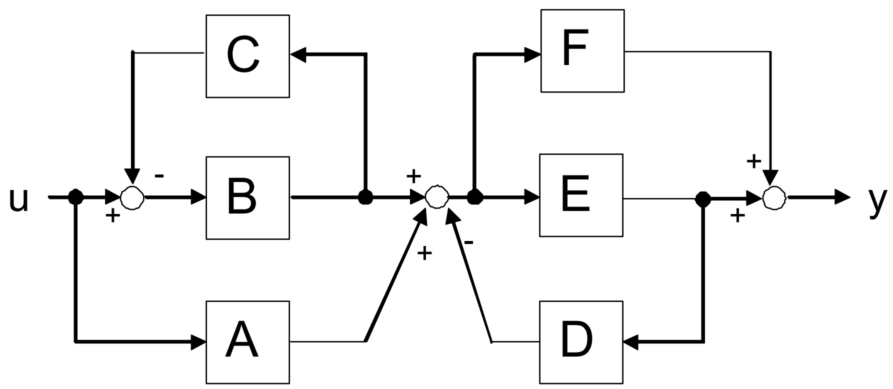
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k_i}{s-p_i}\right] = k_i e^{p_i t}$$

si ottiene:

$$f(t) = 4\,e^{-3t} + 2\,e^{-5t}$$

ESERCIZIO 4.

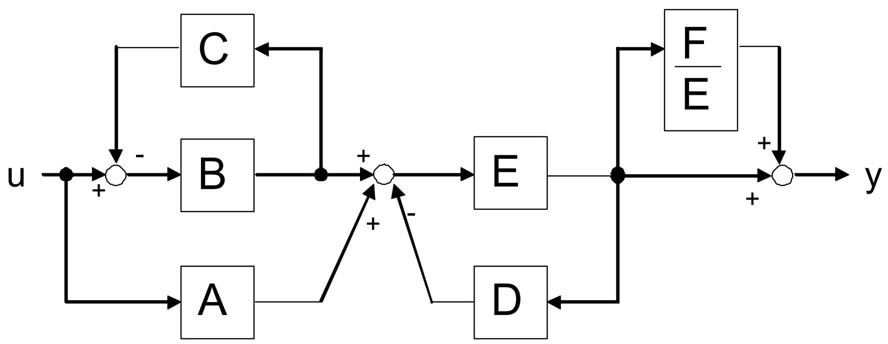
Si determini la funzione di trasferimento del seguente schema a blocchi:



RISPOSTA:

Y / U =
(B / (1 + B C) + A) x (E / (1 + E D)) x (1 + F / E)

Infatti, spostando a valle di E la diramazione entrante in F, si ottiene il seguente schema equivalente a quello di partenza:

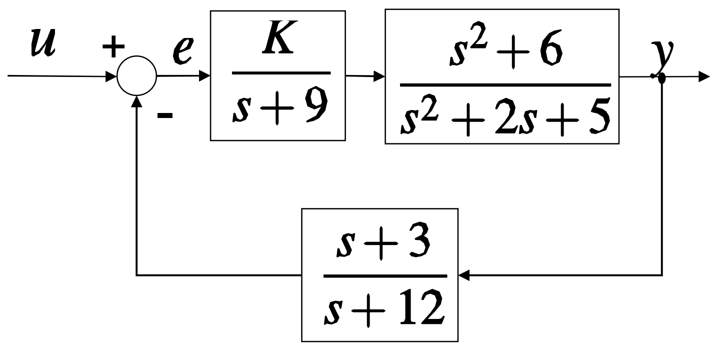


nel quale si può osservare che:
- l'anello che include B e C può essere direttamente ridotto alla relativa funzione di trasferimento
- tale funzione d'anello è in parallelo con il blocco A
- L'anello che include E e D può essere direttamente ridotto
- L'ultima parte del diagramma contiene un parallelo tra F/E ed un ramo con guadagno unitario

NOTA: il risultato si può ottenere anche spostando a monte di E la diramazione entrante in D.

ESERCIZIO 5.

Dato lo schema a blocchi della seguente figura:



si calcoli il valore di K tale per cui risulti:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0,2$$

qualora ad u sia applicato un gradino unitario:

$$u(s) = \frac{1}{s}$$

RISPOSTA:

Per lo schema a blocchi considerato è necessario applicare la formula dell'errore a regime valida in generale per schemi con retroazione non unitaria e con ingresso di riferimento a gradino unitario. Tale formula, derivante dal teorema del valore finale per le trasformate di Laplace, è:

$$\lim_{s\to 0} s\,E(s) = 1 - \lim_{s\to 0} H(s)\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

Nel caso considerato:

$$G(s) = \frac{K(s^2+6)}{(s+9)(s^2+2s+5)} \qquad H(s) = \frac{s+3}{s+12}$$

Pertanto:

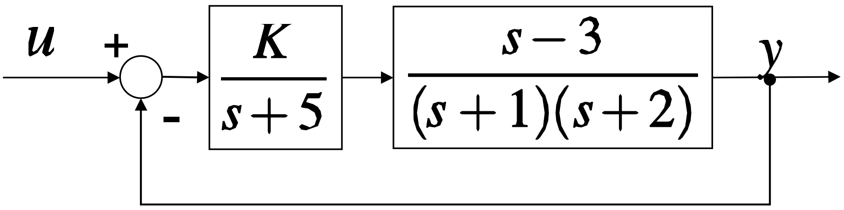
$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\,E(s) = 1 - \frac{3}{12}\frac{\frac{K\cdot 6}{9\cdot 5}}{1+\frac{3}{12}\frac{K\cdot 6}{9\cdot 5}} = 0{,}2$$

Dalla quale risulta, dopo opportune semplificazioni:

$$K = 120$$

ESERCIZIO 6.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:

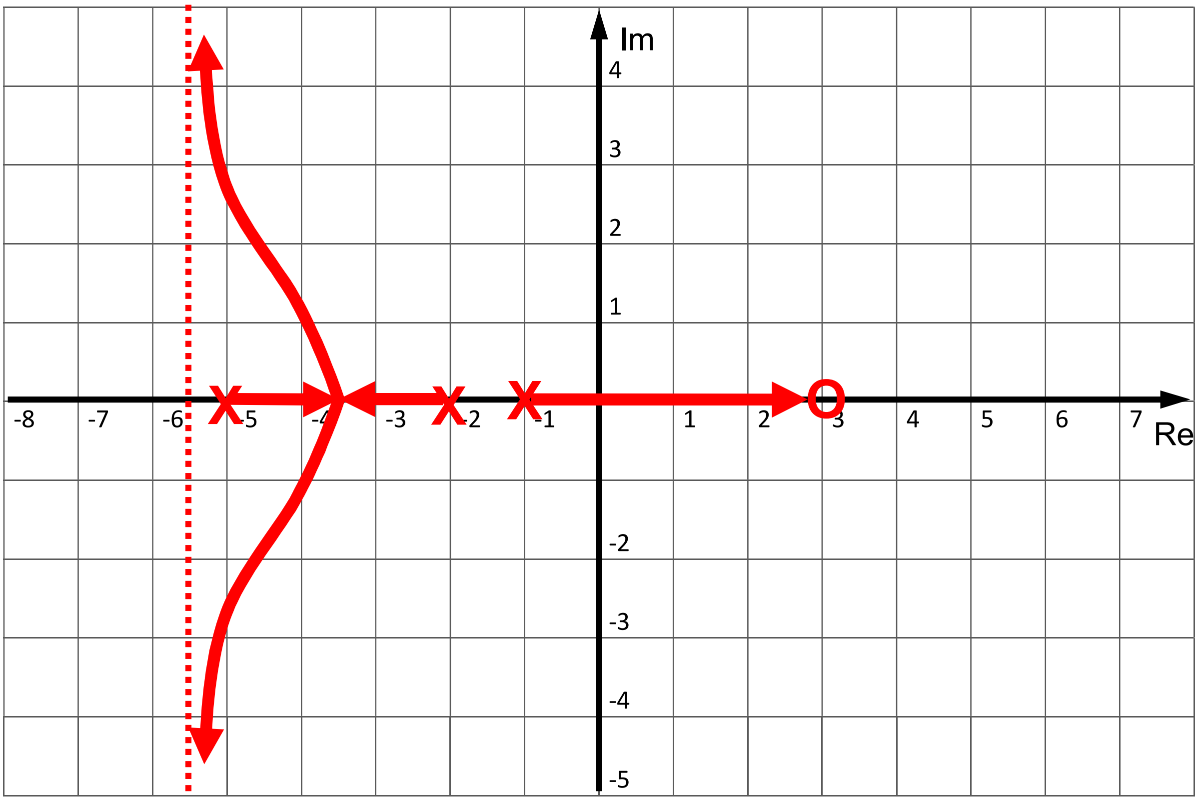


si disegni il corrispondente luogo delle radici valido per $K > 0$ (luogo diretto) e si determini il valore di K (compatibile con il luogo diretto) per cui il sistema risulti semplicemente stabile.

RISPOSTA:

NOTA: la funzione di trasferimento di anello ha uno zero ($n_z = 1$) in +3 e tre poli ($n_p = 3$) rispettivamente in -1, -2 e -5, pertanto il luogo ha due asintoti (numero asintoti = $n_p – n_z = 2$), disposti con angolo di $\pi/2$ e $3/2\,\pi$ rispetto all'asse reale. Il centro degli asintoti è il punto sull'asse reale con coordinata:

$$\sigma_{asintoti} = \frac{1}{n_p - n_z}\left(\sum_{i=1}^{n_p} p_i - \sum_{i=1}^{n_z} z_i\right) = -11/2$$



Il luogo delle radici dimostra in effetti che superando un determinato valore di K il sistema in retroazione diventa instabile, con un polo reale. Si noti infatti la presenza di un ramo "singolo" che tende verso lo zero in +3, corrispondente appunto ad un polo che all'aumentare di K passa da reale negativo a reale positivo. Lo specifico valore di K corrispondente alla condizione in cui il tale polo è nullo e, quindi, il sistema è semplicemente stabile (o marginalmente stabile) si ottiene applicando il criterio di Routh al polinomio a denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso:

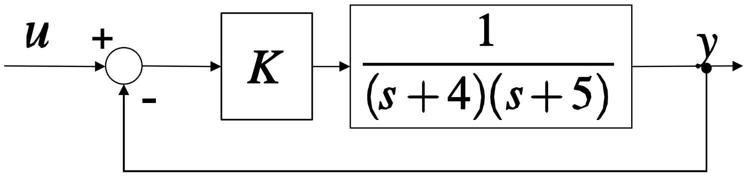
$$D_{cl}(s) = s^3 + 8s^2 + (17 + K)s + 10 - 3K$$

Tramite il criterio di Routh si verifica che i due estremi dell'intervallo di valori di K per cui il sistema in retroazione risulta asintoticamente stabile sono -126/11 e 10/3. Quest'ultimo valore, essendo il primo valore negativo e quindi incompatibile con l'intervallo di valori di K visualizzato dal luogo diretto, determina il valore numerico richiesto dall'esercizio (i.e. tale per cui sia ha un polo reale nullo), cioè:

$$K = 10/3$$

ESERCIZIO 7.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determini il valore di K tale che il sistema ad anello chiuso risulti avere coefficiente di smorzamento δ = 0,5 = 1/2

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta

$$s^2 + 9\,s + 20 + K$$

Confrontando tale polinomio con il denominatore tipico dei sistemi del secondo ordine:

$$s^2 + 2\,\delta\,\omega_n\,s + \omega_n^2$$

si può notare che il coefficiente del termine di primo grado, corrispondente a 2 $\delta\,\omega_n$, sia indipendente da *K*. Imporre δ = 0,5 = 1/2 significa che deve essere ω_n = 9.
Il coefficiente costante è:

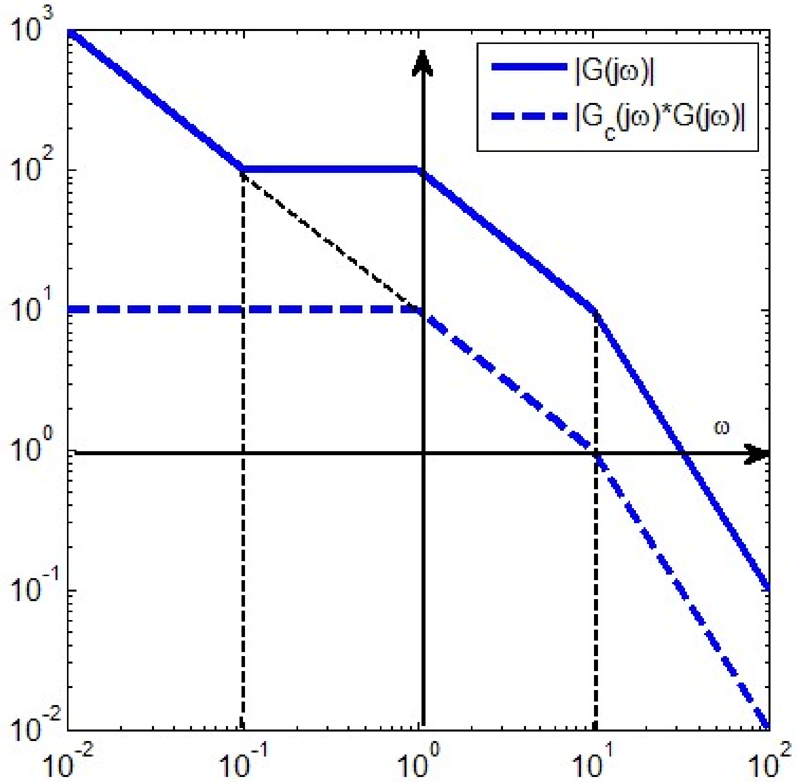
$$20 + K = \omega_n^2 = 81$$

quindi il risultato finale è:

$$K = 61$$

ESERCIZIO 8.

Dati i seguenti diagrammi di Bode delle ampiezze:



si determinino le corrispondenti funzioni di trasferimento $G(s)$ e $G_c(s)$, supponendo che siano entrambe a fase minima:

RISPOSTA:

NOTA: il grafico tratteggiato è il diagramma di $G_c(s)*G(s)$, pertanto per ottenere la funzione di trasferimento di $G_c(s)$ è necessario determinare la funzione di trasferimento di $G(s)$ dal grafico non tratteggiato, la funzione di trasferimento corrispondente al diagramma tratteggiato e poi moltiplicare quest'ultima per l'inversa di $G(s)$, effettuando le opportune semplificazioni per ottenere $G_c(s) = [G_c(s)*G(s)]*G^{-1}(s)$:

$$G(s) = \frac{10\left(1+\frac{s}{0,1}\right)}{s(1+s)\left(1+\frac{s}{10}\right)}$$

$$G_C(s) = \frac{s}{\left(1+\frac{s}{0,1}\right)}$$

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.

La matrice di transizione del sistema dinamico: $\dot{x}(t) = ax(t) \quad (x(t) \in \mathbb{R})$
risulta essere:

o e^{0t}

o e^{-at}

X e^{at}

o 0

DOMANDA 2.
Il <u>polinomio minimo</u> di un sistema dinamico lineare, stazionario e tempo continuo, è:

$$\lambda(\lambda+3)^2$$

Il sistema:
O ha un modo instabile
O potrebbe avere un modo instabile
X ha un modo semplicemente stabile
X ha due modi asintoticamente stabili

DOMANDA 3.
Il moto libero di un sistema dinamico, lineare, stazionario, continuo e di ordine due, è del tipo:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-t}x_1(0) \\ x_2(t) &= e^{-2t}x_2(0) \end{aligned}$$

Il sistema considerato:
O è completamente controllabile
X può essere completamente controllabile
X è asintoticamente stabile
O è instabile
NOTA: *Non sono fornite indicazioni dal moto libero dei sistema in merito alla proprietà di controllabilità, pertanto può essere completamente controllabile (come non esserlo).*

DOMANDA 4.
Il valore a regime $y(\infty)$ della risposta al gradino unitario ($U(s) = 1 / s$) della seguente funzione di trasferimento: $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{s+3}$
O è infinito
O è finito e vale 2
X è finito e vale 2/3
O è nullo

NOTA: *Il valore a regime della risposta al gradino della funzione di trasferimento è pari al valore di limite per* s *che tende a zero della funzione di trasferimento stessa.*

DOMANDA 5.

Il tempo di salita T_s della risposta al gradino di un sistema retroazionato è definito come:

O il tempo necessario per raggiungere il 50% del valore finale
O il tempo necessario per raggiungere il 90% del valore finale
X il tempo necessario per passare dal 10% al 90% del valore finale
O il tempo necessario perché l'uscita rimanga entro il ±5% del valore finale