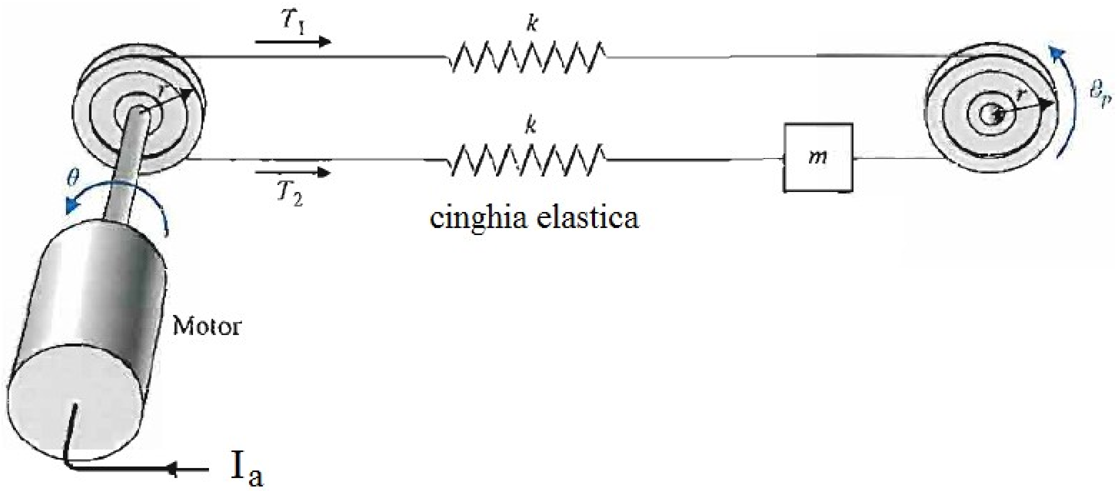
SOLUZIONE della Prova TIPO – A per:

- **Esame di "FONDAMENTI DI AUTOMATICA" (9 CFU):** 6 degli 8 esercizi numerici + 4 delle 5 domande a risposta multipla (v. ultime due pagine) **NOTA**: nell'effettiva prova d'esame i due esercizi e la domanda non richiesti verranno scartati a priori dal docente (lo studente riceverà un testo già adattato al numero di CFU)

- **Esame di "FONDAMENTI DI AUTOMATICA" (6 CFU) / "CONTROLLI AUTOMATICI":** tutti gli 8 esercizi numerici + 5 domande a risposta multipla (v. ultime 2 pagine)

ESERCIZIO 1.

Si consideri il sistema costituito da un motore elettrico ed una coppia di pulegge connesse da una cinghia elastica, il cui obiettivo è movimentare un dispositivo di massa *m* (es. la testina di una stampante):



(Figura adattata da "Modern Control Systems" di R. Dorf – R. Bishop, Pearson International Ed.)

Le equazioni differenziali che descrivono il modello dinamico del sistema, ottenute dal bilancio delle forze generalizzate agenti sulle parti in movimento, sono le seguenti:

$$T_1 = -T_2 = kr(\theta - \theta_p)$$

$$mr\ddot{\theta}_p = T_1 - T_2 = 2kr(\theta - \theta_p)$$

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + r(T_1 - T_2) = k_m I_a$$

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = (\theta - \theta_p);\ x_2 = \dot{\theta}_p;\ x_3 = \dot{\theta};\ u = I_a;\ y = x_1$$

RISPOSTA:

Occorre:

- sostituire la notazione delle variabili di stato, ingresso e uscita
- sostituire nella terza equazione l'espressione di T_1-T_2 ottenuta dalla seconda equazione
- notare che la derivata della prima variabile di stato corrisponde alla differenza tra la terza variabile di stato e la seconda:
  $\dot{x}_1 = x_3 - x_2$

Si ottengono così le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= && -x_2 && +x_3 \\
\dot{x}_2 &= \frac{2k}{m}x_1 \\
\dot{x}_3 &= -\frac{2kr^2}{J}x_1 && && -\frac{b}{J}x_3 && +\frac{k_m}{J}u
\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{2k}{m} & 0 & 0 \\ -\frac{2kr^2}{J} & 0 & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_m}{J} \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y = x_1$: poiché tale uscita non dipende dall'ingresso $D = 0$ (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1×3 che estrae la prima variabile dal vettore di stato è:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$m = 10; \quad r = 0{,}1; \quad k = 20; \quad J = 0{,}2; \quad b = 0{,}6; \quad k_m = 0{,}2$$

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente controllabile, calcolando la matrice di raggiungibilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema diventano:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

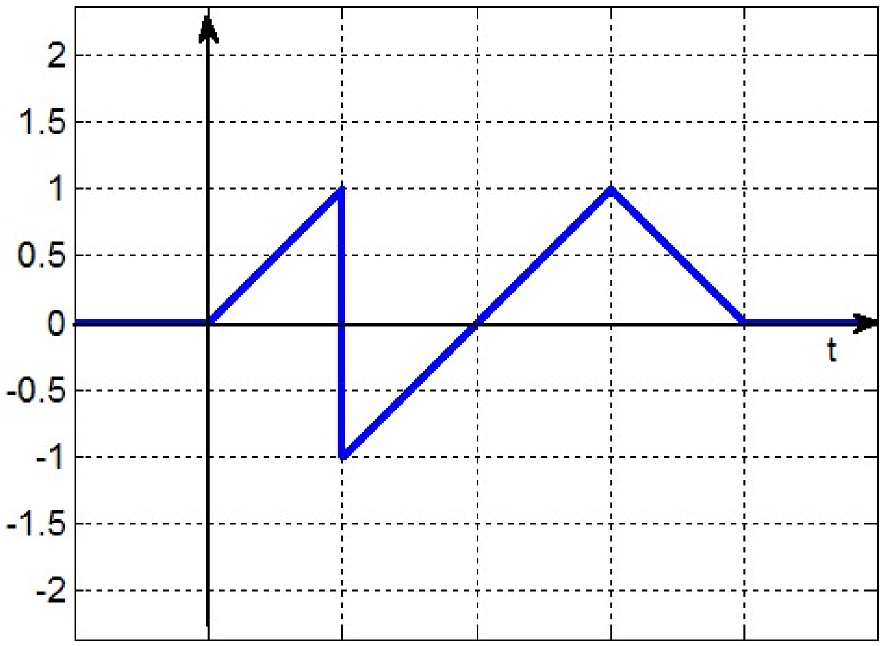
$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

rango(P) = 3

Perciò il sistema **E'** ~~/ NON E'~~ completamente controllabile.

ESERCIZIO 3.

Si determini la trasformata di Laplace del seguente segnale nel dominio del tempo $f(t)$:



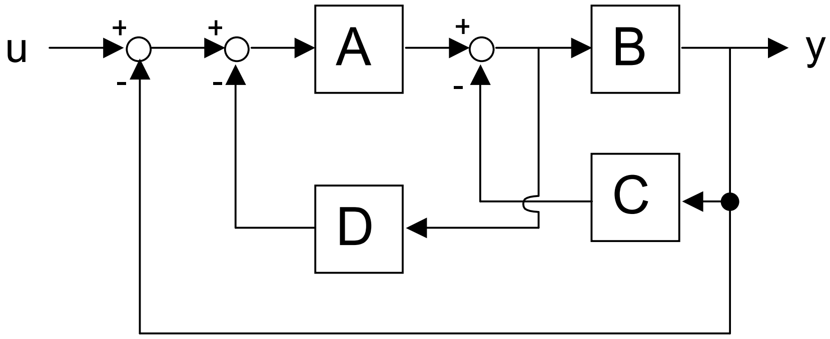
RISPOSTA:

$$F(s) = 1/s^2 - e^{-s} \, (2/s) - e^{-3s} \, (2/s^2) + e^{-4s} \, (1/s^2)$$

NOTA: nell'istante $t = 1$ la pendenza del segnale non cambia, pertanto in quell'istante viene applicato solamente un gradino di ampiezza -2. Negli istanti $t = 0$, $t = 3$ e $t = 4$ sono applicate delle rampe con pendenza rispettivamente $+1$, -2 e $+1$:

ESERCIZIO 4.

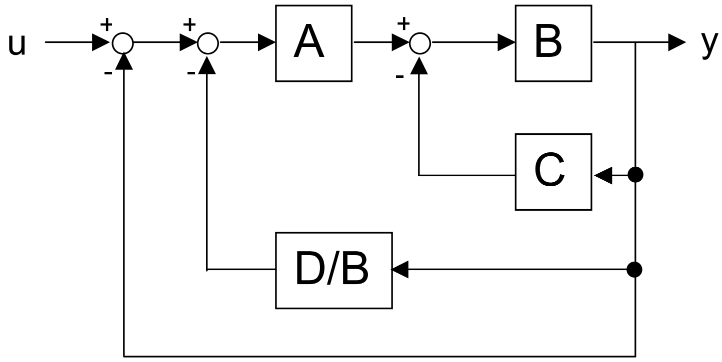
Si determini la funzione di trasferimento del seguente schema a blocchi:



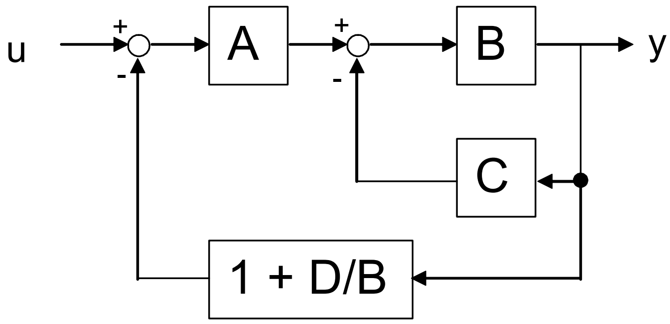
RISPOSTA:

$$Y / U = (A\,B) / (1 + A\,B + B\,C + A\,D)$$

Per ridurre lo schema è necessario separare gli anelli di retroazione passanti per D e C, intrecciati nello schema originario. Lo schema è infatti equivalente (spostando la diramazione che precede B a valle di B stesso) a:



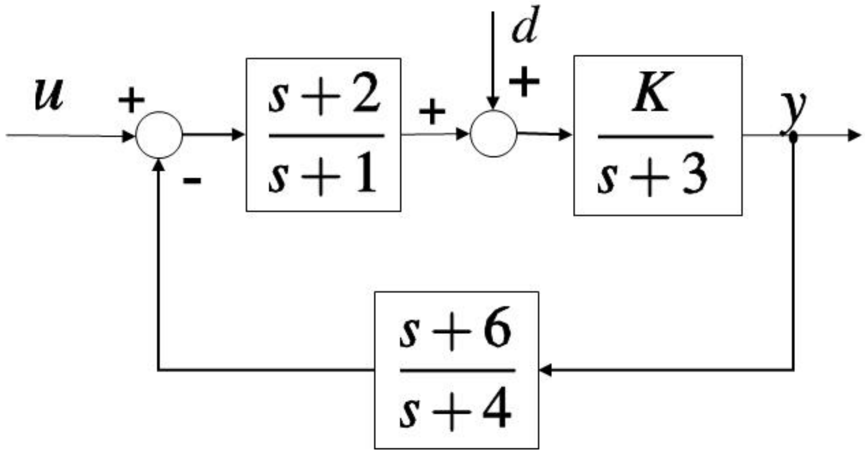
e quindi a:



NOTA: il risultato si può ottenere anche spostando il nodo sommatore della retroazione passante per C a monte di A.

ESERCIZIO 5.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si calcoli il valore di K tale per cui risulti:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0,1$$

qualora sia ad u che a d siano applicati dei gradini unitari:

$u(s) = d(s) = 1/s$

RISPOSTA:

Per calcolare l'uscita a regime nella condizione descritta dal testo occorre considerare la linearità del sistema e, pertanto, la sovrapposizione degli effetti di u e d:

$$y(s) = G_1(s)u(s) + G_2(s)d(s)$$

nella quale $G_1(s)$ è la funzione di trasferimento dell'anello avente come ramo di retroazione il blocco $(s+6)/(s+4)$, mentre $G_2(s)$ è la funzione di trasferimento dell'anello avente come ramo diretto $K/(s+3)$ e gli altri due blocchi come retroazione.

$$G_1(s) = \frac{\frac{K(s+2)}{(s+3)(s+1)}}{1+\frac{K(s+2)(s+6)}{(s+3)(s+1)(s+4)}}$$

$$G_2(s) = \frac{\frac{K}{s+3}}{1+\frac{K(s+2)(s+6)}{(s+3)(s+1)(s+4)}}$$

Sostituendo all'espressione ottenuta per $y(s)$ le funzioni di Laplace dei segnali di ingresso $u(s)$ e $d(s)$, applicando il teorema del valore finale:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\,y(s) = \lim_{s\to 0} G_1(s) + \\ + \lim_{s\to 0} G_2(s)$$

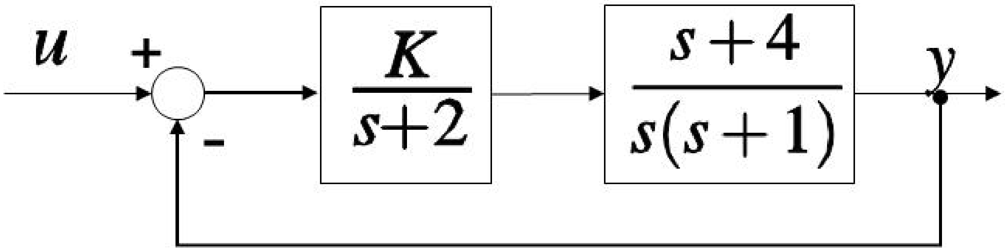
ed imponendo il vincolo di progetto si ottiene:

$$\frac{K}{1+K} = 0,1$$

$$\Rightarrow \quad K = 1/9$$

ESERCIZIO 6.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:

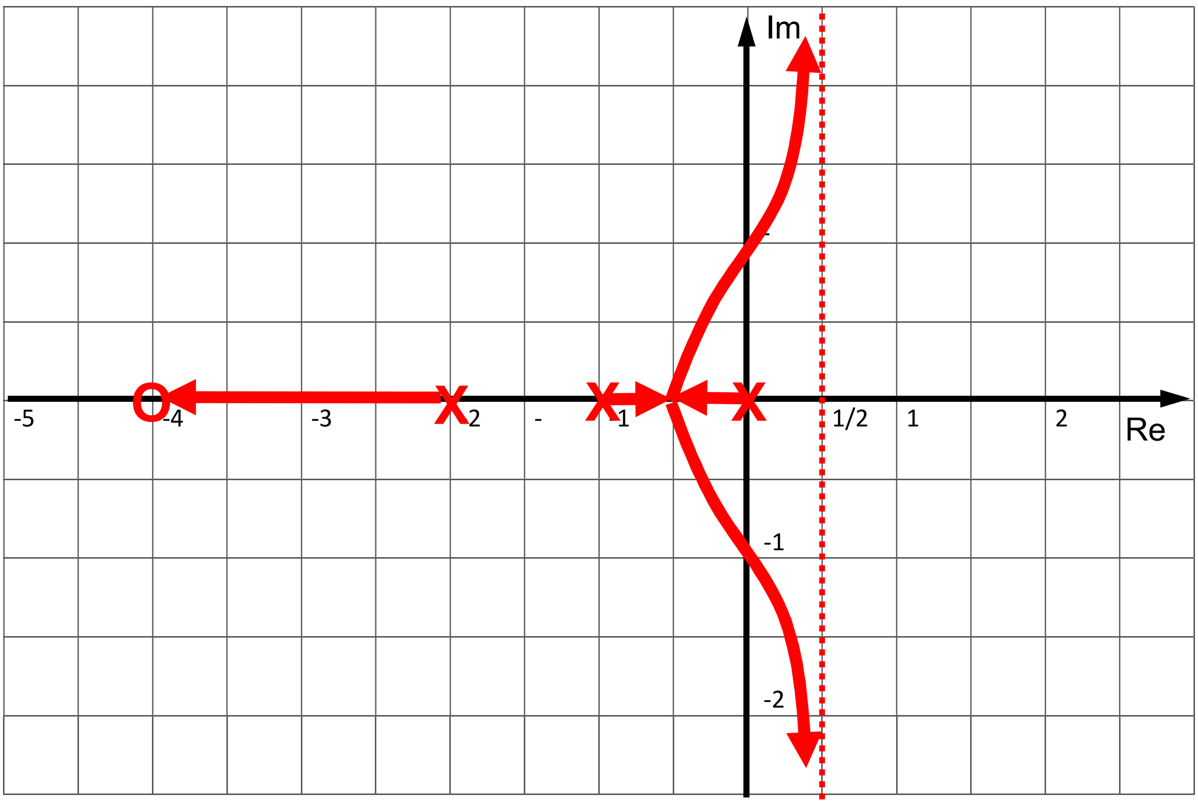


si disegni il corrispondente luogo delle radici valido per K > 0 (luogo diretto) e si determini il valore di K (compatibile con il luogo diretto) per cui il sistema risulti semplicemente stabile.

RISPOSTA:

NOTA: la funzione di trasferimento di anello ha uno zero (n_z = 1) in -4 e tre poli (n_p = 3) rispettivamente in 0, -1 e -2, pertanto il luogo ha due asintoti (numero asintoti = $n_p - n_z$ = 2), disposti con angolo di π/2 e 3/2 π rispetto all'asse reale. Il centro degli asintoti è il punto sull'asse reale con coordinata:

$$\sigma_{asintoti} = \frac{1}{n_p - n_z}\left(\sum_{i=1}^{n_p} p_i - \sum_{i=1}^{n_z} z_i\right) = 1/2$$



Il luogo delle radici dimostra che superando un determinato valore di K il sistema in retroazione diventa instabile, con una coppia di poli complessi e coniugati. Si noti, infatti, che il luogo ha due rami tendenti a due asintoti verticali, centrati su un valore reale positivo. Pertanto, i poli corrispondenti a questi due rami passano dall'essere complessi coniugati con parte reale negativa all'essere complessi coniugati con parte reale positiva, all'aumentare di K. Per uno specifico valore di K, corrispondente appunto alla condizione in cui il sistema è semplicemente stabile (o marginalmente stabile), i poli saranno complessi coniugati puramente immaginari. Applicando il criterio di Routh al polinomio a denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso:

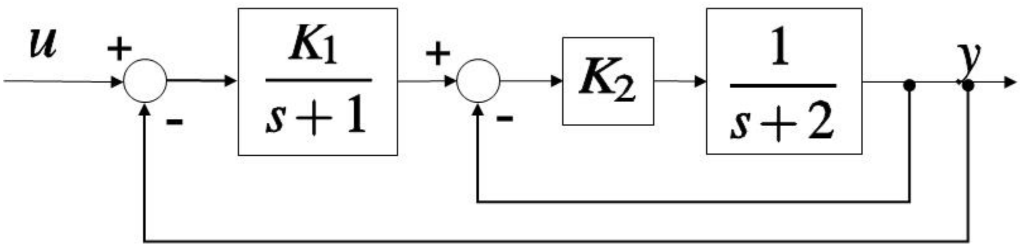
$$D_{cl}(s) = s^3 + 3s^2 + (2 + K)s + 4K$$

si verifica che i due estremi dell'intervallo di valori di K per cui il sistema in retroazione risulta asintoticamente stabile sono 0 e 6. Quest'ultimo valore, essendo il primo escluso dal vincolo su K richiesto dal testo (i.e. luogo diretto ➔ $K > 0$), determina il valore numerico richiesto dall'esercizio (i.e. tale per cui si hanno due poli complessi coniugati con parte reale nulla), cioè:

$$K = 6$$

ESERCIZIO 7.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



Si calcolino i valori di K_1 e K_2 tali per cui il sistema ad anello chiuso risulti avere tempo di assestamento $T_a = 0{,}5$ secondi e coefficiente di smorzamento $\delta = 0{,}6$.

RISPOSTA:

Una volta ridotti entrambi gli anelli di retroazione il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta:

$$D_{cl}(s) = s^2 + (3 + K_2)s + 2 + K_2 + K_1K_2$$

Confrontandolo con il tipico denominatore di un sistema del secondo ordine, cioè $s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2$, si può notare che il coefficiente del termine di grado 1 permette di calcolare K_2 considerando la formula per il tempo di assestamento valida nel caso in cui sia $\delta < 0{,}7$:

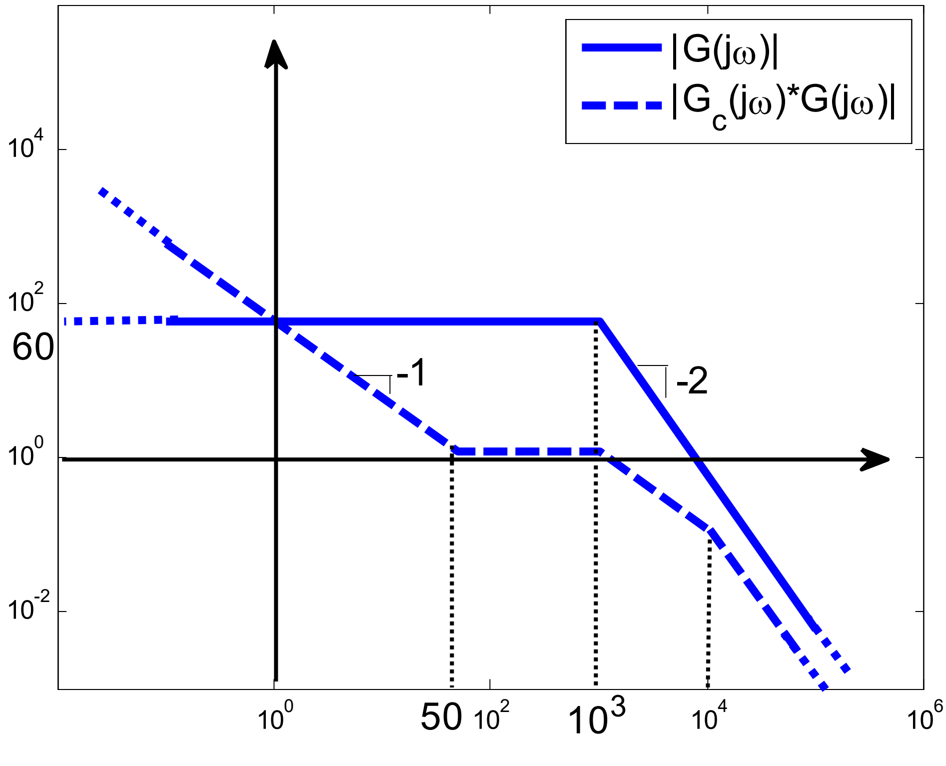
$$T_a = 3 / (\delta \omega_n) = 0{,}5 \Rightarrow \delta \omega_n = 6$$
$$\Rightarrow 3 + K_2 = 12$$
$$\Rightarrow K_2 = 9$$

Imponendo inoltre il vincolo sul coefficiente di smorzamento si ottiene che la pulsazione naturale:

$$\omega_n = 10 \Rightarrow \omega_n^2 = 100 = 2 + K_2 + K_2 K_2$$
$$\Rightarrow K_1 = 89 / 9$$

ESERCIZIO 8.

Dato il seguente diagramma di Bode delle ampiezze:



si determinino le due funzioni di trasferimento $G(s)$ e $G_c(s)$, supposte a fase minima.

RISPOSTA:

NOTA: il grafico tratteggiato è il diagramma di $G_c(s)*G(s)$, pertanto per ottenere la funzione di trasferimento di $G_c(s)$ è necessario determinare la funzione di trasferimento di $G(s)$ dal grafico non tratteggiato, la funzione di trasferimento corrispondente al diagramma tratteggiato e poi moltiplicare quest'ultima per l'inversa di $G(s)$, effettuando le opportune semplificazioni per ottenere $G_c(s) = [G_c(s)*G(s)]*G^{-1}(s)$:

$$G(s) = \frac{60}{\left(1+\frac{s}{10^3}\right)^2}$$

$$G_c(s) = \frac{(1+\frac{s}{50})\left(1+\frac{s}{10^3}\right)}{s\left(1+\frac{s}{10^4}\right)}$$

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.

L'ingresso u(t) e l'uscita y(t) di un sistema sono legati dalla relazione $\dot{y}(t) = u(t)$
Tale sistema è:

O puramente algebrico
X puramente dinamico
O dinamico, non puramente
O non fisicamente realizzabile

NOTA: *Il modello del sistema in questione equivale ad un modello nello spazio degli stati con:* $\dot{x}(t) = u(t);\ y(t) = x(t)$*. Riconducendo questo modello a quello di un generico modello nello spazio degli stati, si può notare come le "matrici" (di dimensione 1x1) del sistema siano A=0, B=1, C=1 e D=0. Pertanto, il sistema è puramente dinamico ed è fisicamente realizzabile.*

DOMANDA 2.

La risposta impulsiva di un sistema dinamico lineare e stazionario, completamente osservabile e completamente controllabile, con un solo ingresso e una sola uscita, tende al valore -1 quando il tempo tende all'infinito. Tale sistema

O è puramente dinamico
O è instabile
O è asintoticamente stabile
X è semplicemente stabile

NOTA: *poiché il sistema è completamente controllabile e completamente osservabile, tutti i modi corrispondenti ai propri autovalori compaiono nella risposta impulsiva (i.e.* $W(t) = Ce^{At}B$*). Se quest'ultima tende ad un (qualunque) valore costante diverso da zero, significa che l'esponenziale della matrice* A *include (almeno) un modo corrispondente ad un autovalore reale nullo (i.e.* e^{0t}*), pertanto il sistema è semplicemente stabile. Non può essere asintoticamente stabile perché in tal caso TUTTI i modi tenderebbero a zero e quindi anche la risposta impulsiva, che invece tenderebbe all'infinito se il sistema fosse instabile. Dalle informazioni sul limite della risposta impulsiva non si può affermare nulla sul fatto che sia o meno puramente dinamico.*

DOMANDA 3.

Un sistema completamente controllabile e completamente osservabile con funzione di trasferimento G(s) pari a:

$$G(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{s(s+2)}$$

risulta essere:

X semplicemente stabile
O asintoticamente stabile
O a fase minima
O puramente dinamico

NOTA: *poiché la funzione include un polo nell'origine, il corrispondente sistema ha un autovalore nullo ed è quindi semplicemente stabile. Non è a fase minima (per la definizione collegata alla formula di Bode dell'analisi armonica) in quanto ha uno zero positivo (in* +1*) e non è puramente dinamico in quanto ha grado relativo = 0.*

DOMANDA 4.
Un sistema dinamico lineare e stazionario caratterizzato dalla seguente matrice di transizione:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-2t} \\ 0 & 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

X è semplicemente stabile
O è asintoticamente stabile
O è instabile
O è completamente controllabile
NOTA: *Il termine unitario nella prima riga e prima colonna corrisponde all'esponenziale* e^{0t}*, cioè ad un autovalore nullo, mentre negli altri termini compare l'esponenziale corrispondente ad un autovalore =* -2*. Non essendo possibile che ci siano altri modi (matrice* A *e corrispondente* e^{At} *di dimensione* $2x2$*) si può affermare con certezza che il sistema è semplicemente stabile. Dalla sola informazione sull'esponenziale di matrice non si può affermare nulla in merito alla controllabilità e/o osservabilità del sistema.*

DOMANDA 5.
Il tempo di assestamento (al +/- 5%) del sistema avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s+3}$$

risulta essere
X $T_a = 1$
O $T_a = 2$
O $T_a = 3$
O $T_a = 3/2$
NOTA: *La funzione di trasferimento considerata ha un polo reale con costante di tempo* $\tau=1/3$*, pertanto* $T_a = 3\tau = 1$