

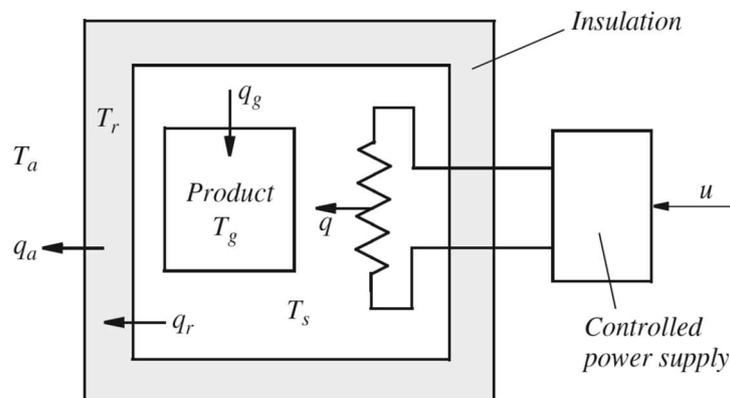
**Esame di “CONTROLLI AUTOMATICI” /
“FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (6 CFU)**

Prova scritta – 18 luglio 2022

SOLUZIONE (Traccia)

ESERCIZIO 1.

Si consideri un sistema costituito da un forno industriale riscaldato tramite una resistenza elettrica, il cui obiettivo è portare un prodotto inserito nel forno ad una determinata temperatura, come schematizzato dalla seguente figura:



Applicando i principi della termodinamica, il modello matematico del sistema può essere descritto tramite le seguenti equazioni algebriche:

$$\begin{aligned}q &= K_c u \\q_g &= K_g (T_s - T_g) \\q_r &= K_r (T_s - T_r) \\q_a &= K_a (T_r - T_a)\end{aligned}$$

nelle quali K_g , K_r e K_a sono i coefficienti di convezione del calore delle superfici rispettivamente del prodotto, della parete interna del forno e della relativa parete esterna, T_s , T_g e T_a sono le temperature rispettivamente della camera del forno, del prodotto e dell'ambiente esterno, mentre K_c è il coefficiente di trasformazione della tensione elettrica in calore. **NOTA BENE:** si consideri per semplicità $T_a = 0$ (°C).

Il modello è poi completato dalle seguenti equazioni differenziali relative alle temperature descritte in relazione alle capacità termiche dei tre elementi del sistema e ai relativi scambi di calore:

$$C_s \dot{T}_s = q - q_g - q_r$$

$$C_g \dot{T}_g = q_g$$

$$C_r \dot{T}_r = q_r - q_a$$

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, di ordine 3 e del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per le variabili di stato e uscita (la variabile di ingresso ha già la notazione convenzionale u):

$$x_1 = T_s; x_2 = T_g; x_3 = T_r; y = T_s = x_1;$$

RISPOSTA:

$$A = \begin{bmatrix} -(K_g + K_r)/C_s, & K_g/C_s, & K_r/C_s \\ & K_g/C_g, & -K_g/C_g, & 0 \\ & K_r/C_r, & 0, & -(K_a + K_r)/C_r \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} K_c/C_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$K_c = 240; \quad K_a = 200; \quad K_g = K_r = 160;$$

$$C_g = 20; \quad C_r = 40; \quad C_s = 80;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente osservabile, calcolando la matrice di osservabilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

$$A = \begin{bmatrix} -4, & 2, & 2 \\ & 8, & -8, & 0 \\ & 4, & 0, & -9 \end{bmatrix}$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} 1, & -4, & 40 \\ & 0, & 2, & -24 \\ & 0, & 2, & -26 \end{bmatrix}$$

$\text{rango}(Q^T) = 3 \rightarrow$ Perciò il sistema E' completamente osservabile.

ESERCIZIO 3.

Per il sistema: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t)$
con

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1]$$

si determini la funzione di risposta impulsiva.

RISPOSTA:

Poiché l'esponenziale della matrice A risulta:

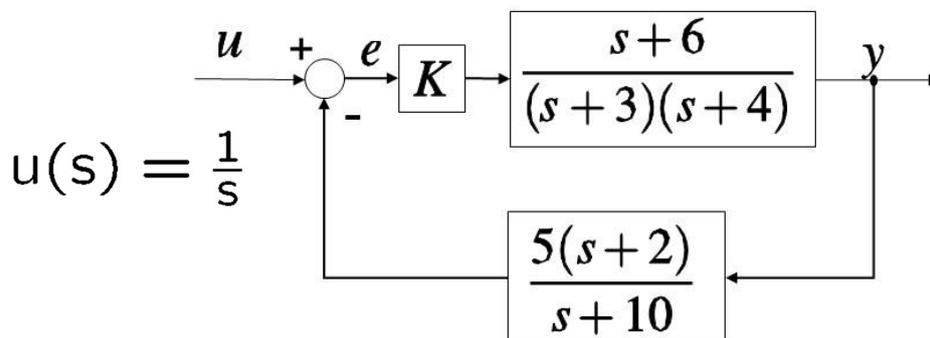
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-4t} & -4te^{-4t} \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}$$

la risposta impulsiva è:

$$W(t) = Ce^{At}B = e^{-4t}$$

ESERCIZIO 4.

Dato lo schema a blocchi della seguente figura:



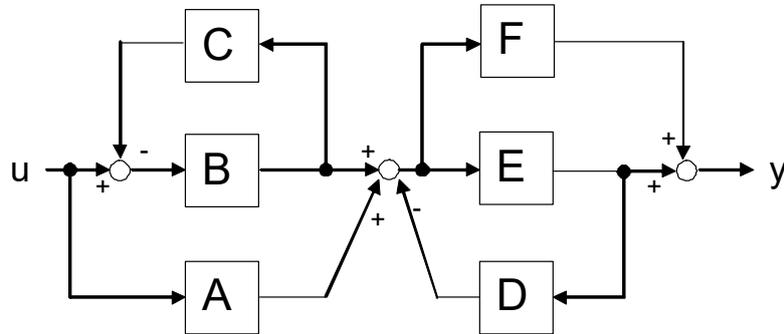
si calcoli il valore del guadagno K per il quale risulta $e(\infty) = 0, 1$

RISPOSTA:

$$K = 18$$

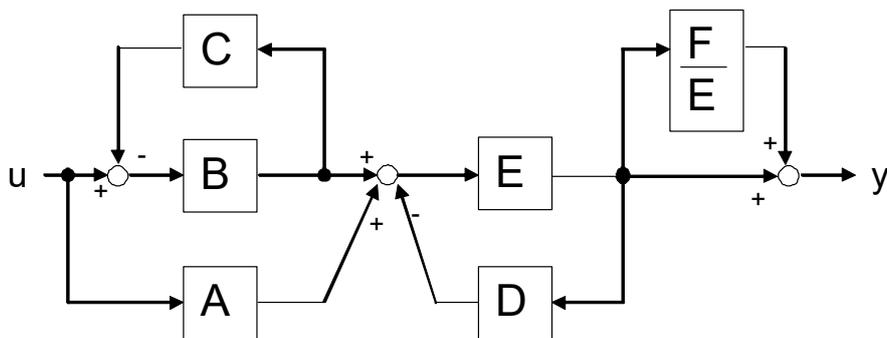
ESERCIZIO 5.

Si determini la funzione di trasferimento del seguente schema a blocchi:



RISPOSTA:

Lo schema è equivalente a:



nel quale si può osservare che:

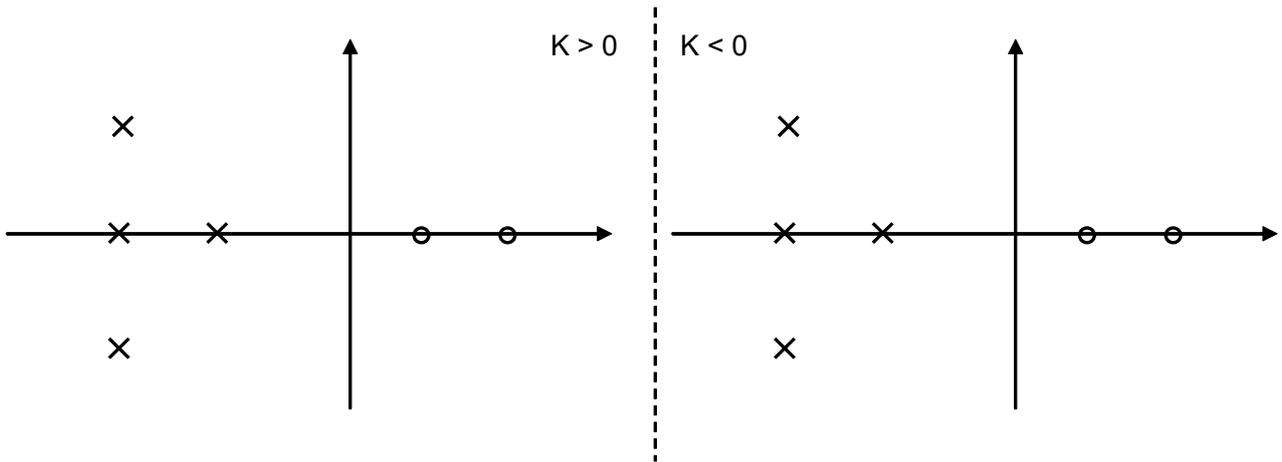
- l'anello che include B e C può essere direttamente ridotto alla relativa funzione di trasferimento
- tale funzione d'anello è in parallelo con il blocco A
- L'anello che include E e D può essere direttamente ridotto
- L'ultima parte del diagramma contiene un parallelo tra F/E ed un ramo con guadagno unitario

per cui il risultato finale si può scrivere come:

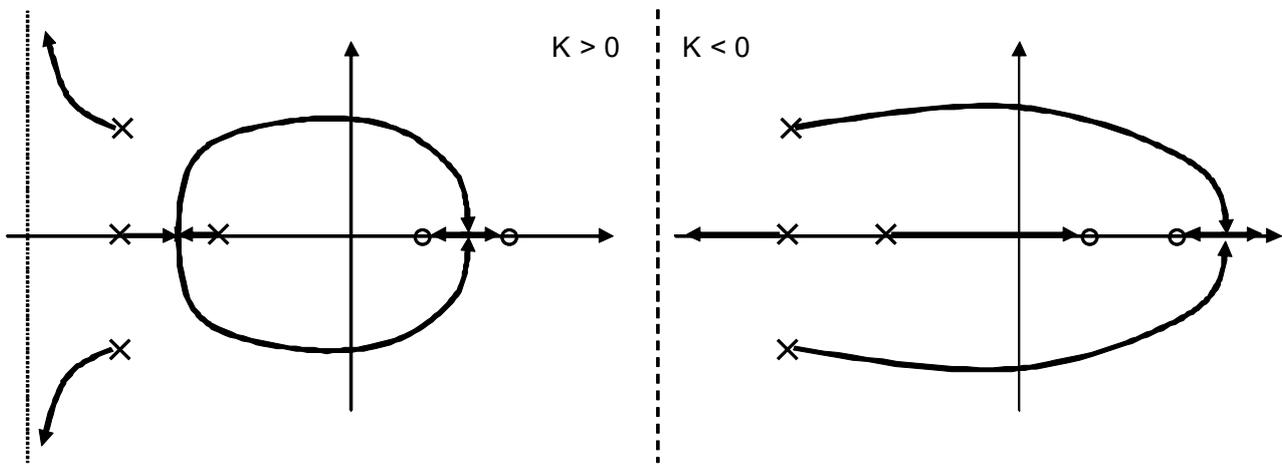
$$G = Y / U = (B / (1 + B C) + A) * (E / (1 + E D)) * (1 + F / E)$$

ESERCIZIO 6.

Si tracci l'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema con poli (x) e zeri (o) della funzione di trasferimento d'anello come indicato in figura:

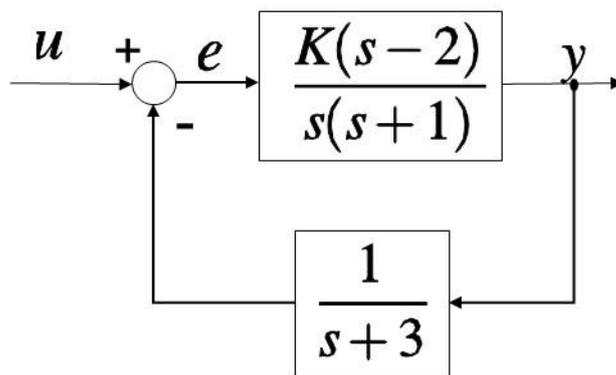


RISPOSTA:



ESERCIZIO 7.

Dato il seguente sistema in retroazione:



si determinino i valori di K tali per cui il sistema ad anello chiuso risulti essere ASINTOTICAMENTE STABILE.

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta:

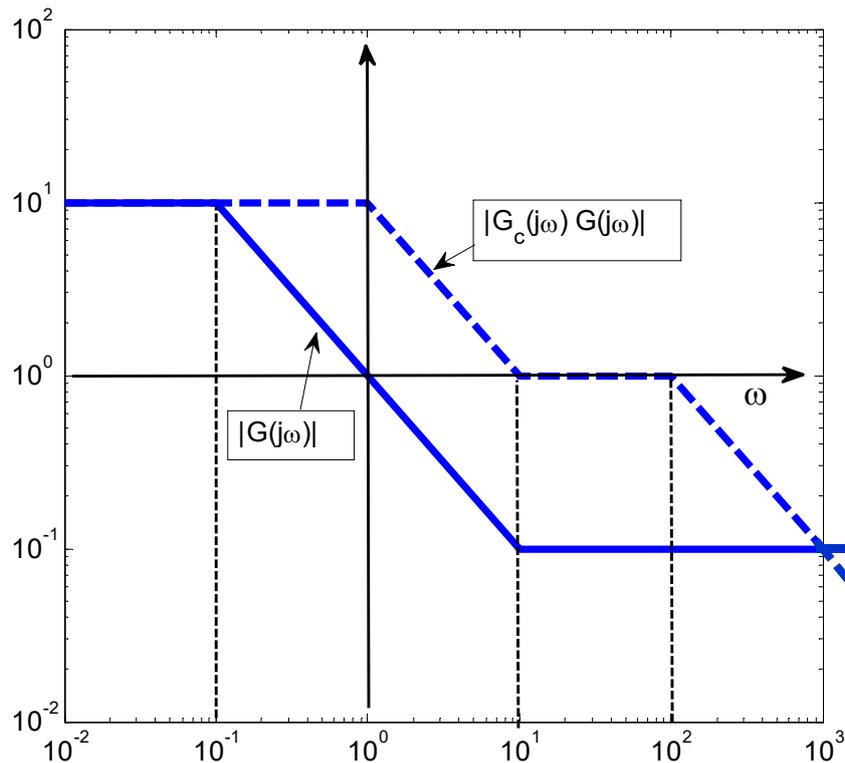
$$s^3 + 4s^2 + (3 + K)s - 2K$$

Applicando a questo polinomio il criterio di Routh, si ottiene l'intervallo di stabilità:

$$-2 < K < 0$$

ESERCIZIO 8.

Dati i seguenti diagrammi di Bode delle ampiezze:



si determinino le funzioni di trasferimento $G(s)$ e $G_c(s)$, supposte entrambe a fase minima.

NOTA: si osservi che il grafico NON riporta direttamente il diagramma di Bode di $G_c(s)$, ma quello di $G_c(s) \cdot G(s)$, come riportato nelle etichette di testo.

RISPOSTA:

$$G(s) = \frac{10(1 + \frac{s}{10})}{1 + \frac{s}{10^{-1}}} \quad G_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{10^{-1}}}{(1+s)(1 + \frac{s}{100})}$$

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.

Due sistemi dinamici, lineari e stazionari, asintoticamente stabili, collegati in cascata danno luogo ad un sistema:

- asintoticamente stabile
- semplicemente stabile
- instabile
- completamente controllabile e completamente osservabile

DOMANDA 2.

Il polinomio caratteristico di un sistema dinamico lineare, stazionario e tempo continuo, è:

$$\lambda^3(\lambda + 2)$$

Il sistema:

- presenta modi semplicemente stabili
- presenta modi asintoticamente stabili
- presenta modi instabili
- può presentare modi instabili

DOMANDA 3.

L'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$ di un sistema sono legati dalla relazione $\dot{y}(t) = u(t)$

Tale sistema è:

- puramente algebrico
- puramente dinamico
- dinamico, non puramente
- non fisicamente realizzabile

DOMANDA 4.

Il sistema lineare e stazionario la cui funzione di trasferimento $G(s)$ ha tutti i poli posizionati sull'asse immaginario e con molteplicità singola:

- è a fase minima
- è instabile
- è asintoticamente stabile
- è semplicemente stabile

DOMANDA 5.

La funzione di trasferimento di un sistema dinamico a tempo continuo è:

$$G(s) = \frac{(s+2)(s+1)}{s(s+3)}$$

Tale sistema:

- è puramente dinamico
- è asintoticamente stabile
- è semplicemente stabile
- è instabile