

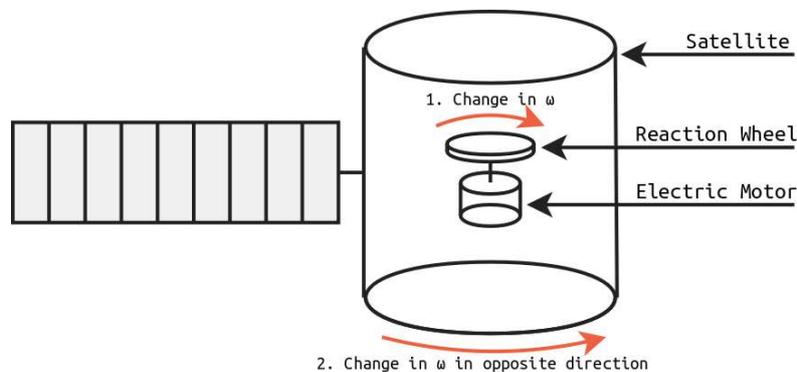
**Esame di “CONTROLLI AUTOMATICI” /
“FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (6 CFU)**

Prova scritta – 23 giugno 2022

SOLUZIONE (traccia)

ESERCIZIO 1.

Nei satelliti artificiali, l'orientamento nello spazio può essere regolato tramite un dispositivo detto ruota di reazione, che è costituito da un volano accoppiato ad un motore elettrico e la cui rotazione determina una rotazione del satellite attorno allo stesso asse del volano, ma in direzione opposta, come schematizzato dalla seguente figura:



Applicando i principi della meccanica di Newton, il modello matematico del sistema può essere descritto tramite le seguenti equazioni differenziali:

$$J_1 \ddot{\theta} = b\Omega - \tau_m$$

$$J_2 \dot{\Omega} = -b\Omega + \tau_m$$

nelle quali J_1 è l'inerzia del satellite, esclusa la ruota di reazione, J_2 è l'inerzia equivalente dell'insieme di satellite e ruota di reazione, b è il coefficiente di attrito tra il satellite e la ruota di reazione, θ è l'angolo di orientamento nello spazio del satellite, Ω la velocità angolare relativa della ruota di reazione rispetto al satellite e τ_m la coppia erogata dal motore elettrico.

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, di ordine 3 e del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per le variabili di stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = \theta; x_2 = \dot{\theta}; x_3 = \Omega; u = \tau_m; y = \dot{\theta} = x_2;$$

RISPOSTA:

$$A = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & b/J1 \\ 0, & 0, & -b/J2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/J1 \\ 1/J2 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 1 \quad 0]$$

$$D = 0$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$J_1 = 12; \quad J_2 = 8; \quad b = 2;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente osservabile, calcolando la matrice di osservabilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

$$A = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1/6 \\ 0, & 0, & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1/6, & -1/24 \end{bmatrix}$$

rango(Q^T) = 2 → Perciò il sistema NON E' completamente osservabile.

ESERCIZIO 3.

Per il sistema: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t)$
con

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

si determini la funzione di risposta impulsiva.

RISPOSTA:

L'esponenziale della matrice A risulta:

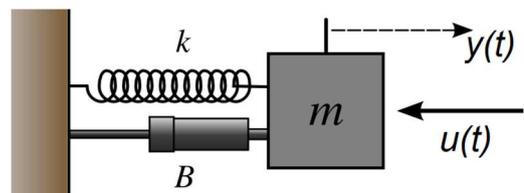
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & \frac{3}{2} (e^{0t} - e^{-2t}) \\ 0 & e^{0t} \end{bmatrix}$$

Pertanto la risposta impulsiva risulta:

$$W(t) = Ce^{At}B = \frac{3}{2} (e^{0t} - e^{-2t})$$

ESERCIZIO 4.

Si consideri il sistema massa-molla-smorzatore rappresentato qui a fianco (ingresso = forza applicata, uscita = spostamento della massa):



per il quale il modello matematico nel dominio del tempo risulta essere:

$$\ddot{y}(t) + m_1 \dot{y}(t) + 42y(t) = u(t)$$

NOTA: m_1 è la penultima cifra a destra del proprio numero di matricola, se tale cifra è 0 la si sostituisca con 6.

Si determinino la corrispondente funzione di trasferimento $G(s)$ con la trasformata di Laplace ed il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino per tale funzione di trasferimento.

RISPOSTA: CON $m_1 = 6$ (esempio indicativo)

Ricordando che:

- dal Teorema della derivata nelle trasformate di Laplace, se $y(t) \rightarrow Y(s)$, allora $\dot{y}(t) \rightarrow s Y(s)$ e $\ddot{y}(t) \rightarrow s^2 Y(s)$
- $G(s) = Y(s)/U(s)$

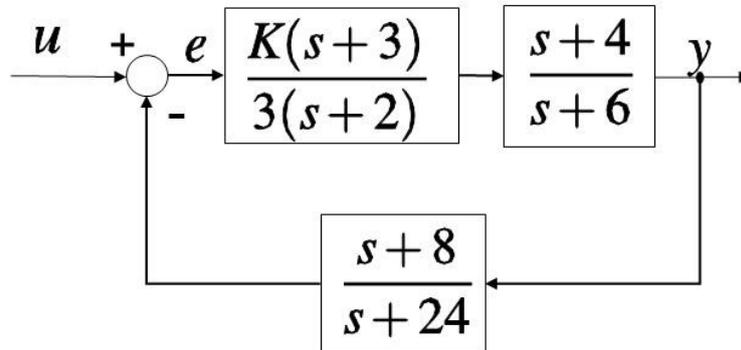
si ottiene FACILISSIMAMENTE che:

$$G(s) = 1 / (s^2 + 6s + 42)$$

che risulta avere $\omega_n = 6,48$ e $\delta = 0,463$, perciò $T_a = 3 / (\delta \omega_n) = 1$

ESERCIZIO 5.

Dato il sistema descritto dal seguente schema a blocchi:



e considerando un ingresso a gradino unitario ($U(s) = 1/s$) si determini il valore di K tale che l'errore a regime risulti pari a $e(\infty) = 0,0m_0$ (o equivalentemente $= m_0/100$).

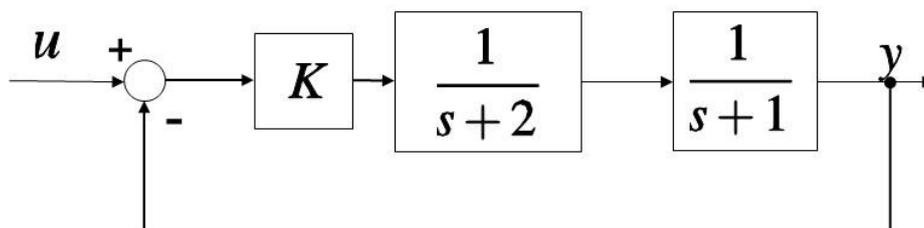
NOTA: m_0 è l'ultima cifra più a destra del proprio numero di matricola, se tale cifra è 0 la si sostituisca con 8.

RISPOSTA: CON $m_0 = 8$ (esempio indicativo)

$$K = 207/2$$

ESERCIZIO 6.

Dato il sistema costituito dal diagramma a blocchi della seguente figura:



si progetti il valore di K in modo che il sistema in retroazione abbia un coefficiente di smorzamento $\delta = 0,m_1$ (o equivalentemente $m_1/10$)

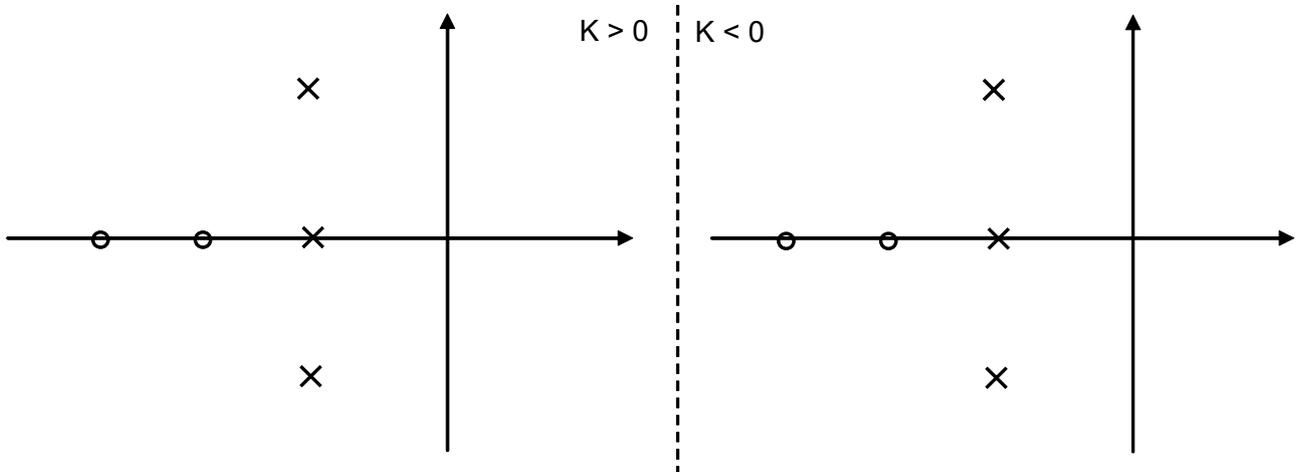
NOTA: m_1 è la penultima cifra a destra del proprio numero di matricola, se tale cifra è 0 la si sostituisca con 3.

RISPOSTA: CON $m_1 = 3$ (esempio indicativo)

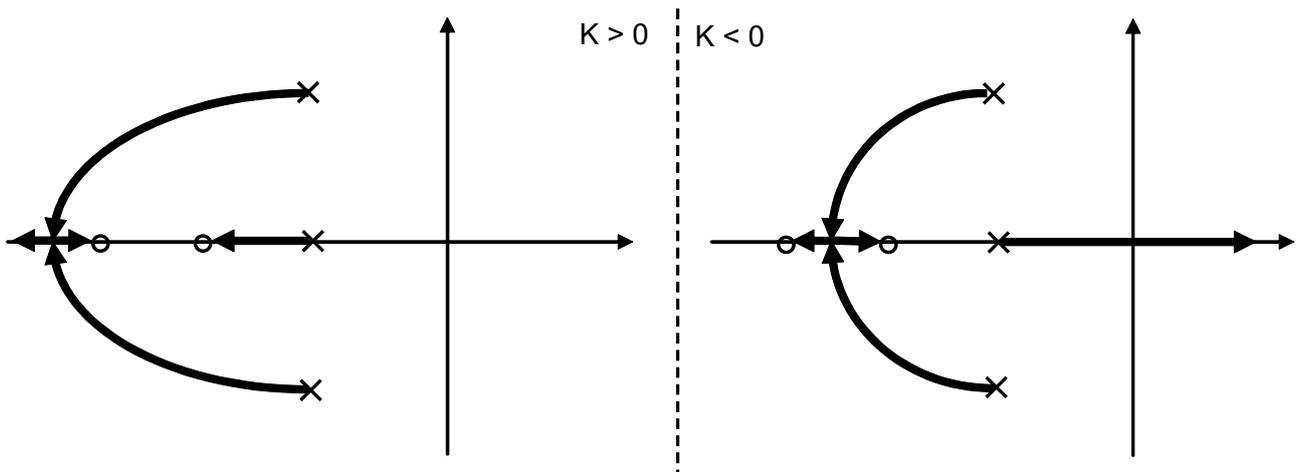
$$K = 23$$

ESERCIZIO 7.

Si tracci l'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema con poli (x) e zeri (o) della funzione di trasferimento d'anello come indicato in figura:

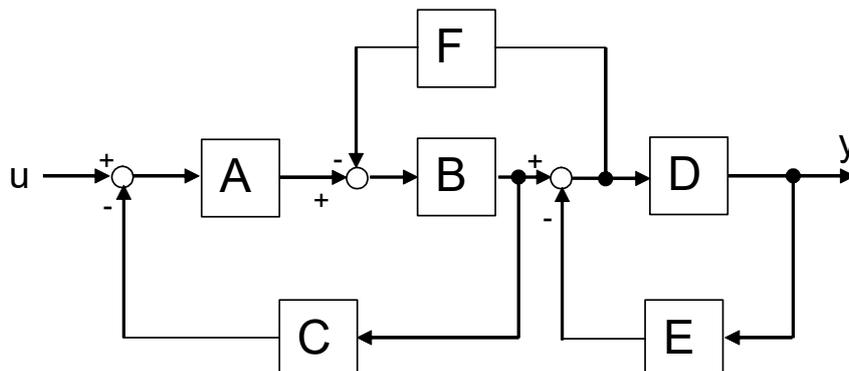


RISPOSTA:



ESERCIZIO 8.

Dato il sistema costituito dal seguente diagramma a blocchi:



Si determini la funzione di trasferimento tra Y e U :

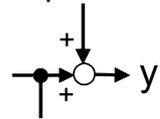
RISPOSTA:

Il diagramma può essere rielaborato in UNO dei seguenti modi, ciascuno dei quali richiede due passaggi con spostamento di diramazioni o nodi sommatori:

1. PRIMO PASSO: spostare la diramazione che entra nel blocco F a valle del blocco D , operazione che “libera” l’anello tra D ed E ; dopo aver risolto l’anello tra D ed E , il SECONDO PASSO è spostare la diramazione che entra in C a valle del blocco ottenuto dall’anello citato (i.e. $D/(1+DE)$), in modo da “liberare” l’altro anello con ramo di retroazione F/D (ottenuto dal PRIMO PASSO) e poter quindi risolvere i due anelli rimanenti in sequenza (prima quello passante per F/D , poi quello passante per C).
2. PRIMO PASSO: spostare il nodo sommatore nel quale entra l’uscita di F a monte di A , operazione che “libera” l’anello tra A , B e C ; dopo aver risolto l’anello A - B - C , il SECONDO PASSO è spostare il nodo sommatore nel quale entra l’uscita di E a valle del blocco ottenuto dall’anello citato (i.e. $AB/(1+ABC)$), in modo da “liberare” l’altro anello con ramo di retroazione F/A (ottenuto dal PRIMO PASSO) e poter quindi risolvere i due anelli rimanenti in sequenza (prima quello passante per F/A , poi quello passante per E).

Sono inoltre possibili altri modi, ottenuti combinando PRIMO e SECONDO passo dei due modi descritti.

NOTA: non esiste NESSUNA regola immediata che permetta di scambiare di posto una diramazione e un nodo sommatore, come nella parte finale del diagramma:



Scambiando di posto tali elementi grafici si ottiene un diagramma che NON equivale a quello di partenza!!

Soluzione corretta (una volta effettuate tutte le semplificazioni):

$$G = Y/U = ABD / (1 + ABC + ED + BF + ABCED)$$

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.

Il moto libero di un sistema dinamico, lineare, stazionario, continuo e di ordine due, è del tipo:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^t x_1(0) \\x_2(t) &= e^{-2t} x_2(0)\end{aligned}$$

Il sistema considerato:

- è completamente controllabile
- può essere completamente controllabile
- è asintoticamente stabile
- è semplicemente stabile.

DOMANDA 2.

Il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -2x(t) + u(t) \\y(t) &= 2x(t)\end{aligned}$$

ha funzione di risposta impulsiva pari a:

- $W(t) = e^{-2t}$
- $W(t) = 2e^{-2t}$
- $W(t) = e^{2t}$
- $W(t) = 2e^{2t}$

DOMANDA 3.

La funzione di trasferimento di un sistema, con un solo ingresso e una sola uscita, è il rapporto di due polinomi dello stesso ordine. Il sistema:

- è puramente dinamico
- è dinamico, non puramente
- non è fisicamente realizzabile
- è fisicamente realizzabile

DOMANDA 4.

L'errore a regime del sistema:

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

chiuso in retroazione unitaria negativa, quando in ingresso è presente un gradino unitario:

$$u(s) = \frac{1}{s}$$

è pari a:

- $e(\infty) = 0$
- $e(\infty) = 0,1$
- $e(\infty) = 1$
- $e(\infty) = 10$

DOMANDA 5.

Due sistemi di tipo 0, entrambi asintoticamente stabili, aventi la stessa costante di posizione K_p , se vengono posti in retroazione negativa unitaria:

- Generano sistemi stabili ad anello chiuso
- Presentano errore a regime nullo per ingresso a gradino
- Presentano lo stesso errore a regime per lo stesso ingresso a gradino
- Presentano errore a regime nullo per ingresso a rampa