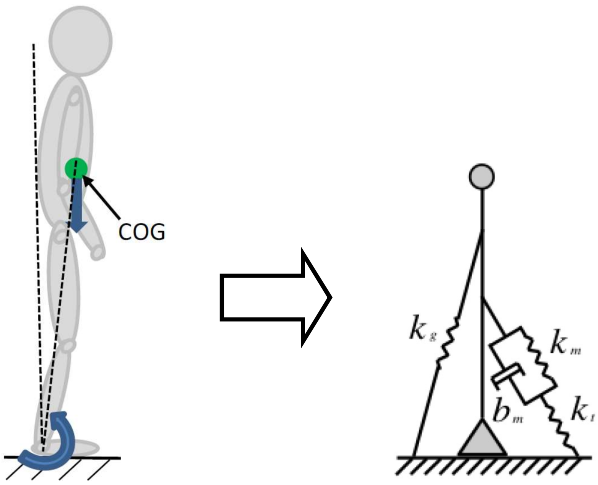
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (9 CFU)

Prova scritta – 23 giugno 2022 – Testo B

SOLUZIONE (traccia)

ESERCIZIO 1.

Il mantenimento dell’equilibrio nella postura eretta negli umani, in condizioni statiche, può essere descritto come una struttura meccanica simile ad un pendolo con il baricentro (*Center Of Gravity, COG*) al di sopra del punto di ancoraggio, sul quale agiscono le forze esercitate dalla gravità e dalla struttura muscolo-tendinea come schematizzato nelle seguenti figure:



Applicando considerazioni sulle proprietà viscoelastiche di muscoli e tendini definite dal cosiddetto modello di Poynting-Thomson e ipotizzando che le variazioni di angolo rispetto alla verticale siano di piccola entità, si possono ottenere le seguenti equazioni differenziali:

$$J\ddot{\theta} + k_t\varphi = mgl\theta$$

$$k_m(\theta - \varphi) + b_m(\dot{\theta} - \dot{\varphi}) = F_m$$

nelle quali J è l’inerzia del corpo umano, m la relativa massa, g l’accelerazione di gravità, l la distanza tra il baricentro e il piano orizzontale, k_t è la rigidezza del tendine nella caviglia, k_m e b_m sono rispettivamente la rigidezza e il coefficiente di smorzamento del muscolo, F_m è una ipotetica forza di attuazione muscolare, Θ è l’angolo del pendolo equivalente rispetto alla verticale e φ è l’angolo tra la struttura muscolo-tendinea e l’asta del pendolo equivalente.

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, <u>di ordine 3</u> e del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per le variabili di stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = \theta;\ x_2 = \dot{\theta}\ x_3 = \varphi;\ u = F_m;\ y = \theta = x_1;$$

RISPOSTA:

Ricordando che $\dot{x}_1 = x_2$:

```
A = [      0, 1,       0]
    [ mgl/J, 0,   -kt/J]
    [ km/bm, 1, -km/bm]

B =  [0     ]
     [0     ]
     [-1/bm]

C =  [1    0     0]
D =  0
```

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$J = 20;\quad k_t = 800;\quad k_m = 400;\quad b_m = 100;\quad mgl = 500;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno <u>completamente controllabile</u>, calcolando la matrice di raggiungibilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

```
A =  [  0, 1,   0]
     [ 25, 0, -40]
     [  4, 1,  -4]

P =  [      0,    0,  2/5]
     [      0,  2/5, -8/5]
     [ -1/100, 1/25, 6/25]
```

rango(P) = 3 ➔ Perciò il sistema E' completamente controllabile.

ESERCIZIO 3.

Si calcoli la risposta impulsiva del sistema avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{7s+12}{s^2+11s+28}$$

RISPOSTA:

Il problema si risolve anzitutto determinando la scomposizione in fratti semplici della funzione di trasferimento data. Poichè le radici del denominatore (poli della FdT) sono -4 e -7, applicando le formule per il calcolo dei residui si ottiene:

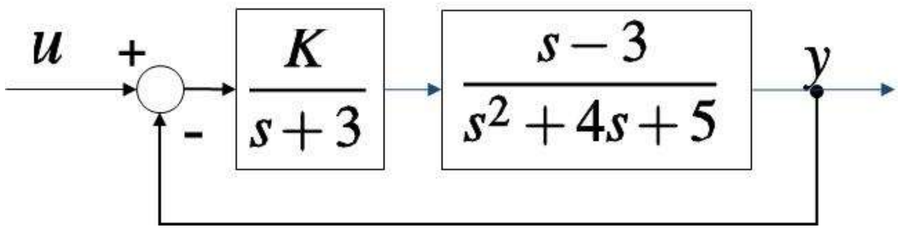
$$G(s) = \frac{7s+12}{s^2+11s+28} = \frac{37}{3}\frac{1}{s+7} - \frac{16}{3}\frac{1}{s+4}$$

da cui si ottiene immediatamente che:

$$W(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \frac{37}{3}e^{-7t} - \frac{16}{3}e^{-4t}$$

ESERCIZIO 4.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determini il valore di $K > 0$ per cui il sistema risulti semplicemente stabile. Si specifichi inoltre se per tale valore di K il sistema risulti avere un polo nullo oppure una coppia di poli puramente immaginari (senza necessariamente calcolarli).

RISPOSTA:

Il valore limite di K che corrisponde alla condizione in cui il sistema è semplicemente stabile (o marginalmente stabile) si determina applicando il criterio di Routh al polinomio a denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso:

$$D_{cl}(s) = s^3 + 7s^2 + (17+K)s + 15 - 3K$$

si verifica che i due estremi dell'intervallo di valori di K per cui il sistema in retroazione risulta stabile sono -10,4 e 5. Quest'ultimo valore, essendo il primo escluso dal vincolo del testo, determina la prima parte della risposta, cioè:

$$K = 5$$

Sostituendo tale valore, si può facilmente verificare che:

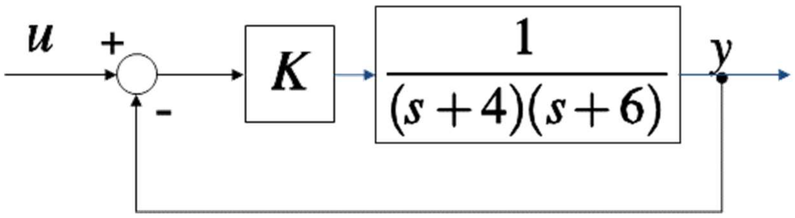
$$D_{cl}(s) = s(s^2 + 8s + 23)$$

cioè che il sistema in retroazione ha un polo nullo.

[X] POLO NULLO [ ] POLI PURAMENTE IMMAGINARI

ESERCIZIO 5.

Dato lo schema a blocchi della seguente figura



si progetti il valore di K (>0) in modo che il sistema ad anello chiuso abbia due poli entrambi pari a $-p$, calcolando anche il valore di p(>0).

RISPOSTA:
Il denominatore ad anello chiuso del sistema è:

$$D_{c.l.}(s) = s^2 + 10s + 24 + K$$

Affinchè tale denominatore abbia due poli in $-p$ è necessario che esso sia uguagliato al seguente denominatore desiderato:

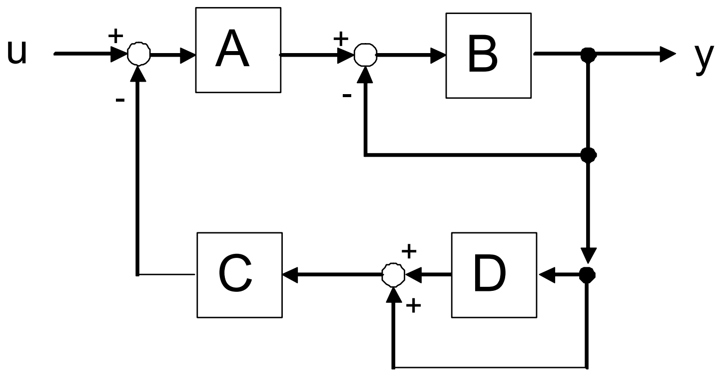
$$D_{des}(s) = (s+p)(s+p) = s^2 + 2ps + p^2$$

Uguagliando i coefficienti dei termini di primo grado e i termini costanti si ottengono due equazioni di vincolo che permettono di determinare prima p e poi K, con il seguente risultato:

$K = 1$ $p = 5$

ESERCIZIO 6.

Si determini la funzione di trasferimento del seguente diagramma a blocchi:



RISPOSTA:

Si noti che il blocco B è in retroazione con un ramo unitario, mentre il blocco D è in parallelo con un ramo unitario nella stessa direzione di segnale. Quest'ultimo parallelo è in serie con il blocco C e tali elementi sono a loro volta sul ramo di retroazione dell'anello il cui percorso diretto comprende A e il sotto-anello che include B.
Pertanto, la soluzione finale è la seguente FdT:

$$Y/U = \frac{\frac{AB}{1+B}}{1+\frac{ABC(D+1)}{1+B}} = \frac{AB}{1+B+ABC(D+1)}$$

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.

La matrice di transizione del sistema dinamico: $\dot{x}(t) = ax(t) \quad (x(t) \in \mathbb{R})$
risulta essere:

o e^{0t}

o e^{-at}

X e^{at}

o 0

DOMANDA 2.
Il polinomio minimo di un sistema dinamico lineare, stazionario e tempo continuo, è:

$$\lambda(\lambda + 3)^2$$

Il sistema:
O presenta modi instabili
O può presentare modi instabili
X presenta modi semplicemente stabili
X presenta modi asintoticamente stabili

DOMANDA 3.
Il valore a regime $y(\infty)$ della risposta al gradino unitario ($U(s) = 1 / s$) della seguente f.d.t:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{s+3}$$

O è infinito
O è finito e vale 2
X è finito e vale 2/3
O è nullo

DOMANDA 4.

Nel diagramma di Bode di una rete anticipatrice, all'aumentare di ω da zero all'infinito:
O si riscontra prima l'effetto del polo e poi quello dello zero
X si riscontra prima l'effetto dello zero e poi quello del polo
X la fase è sempre positiva
O la fase è sempre negativa