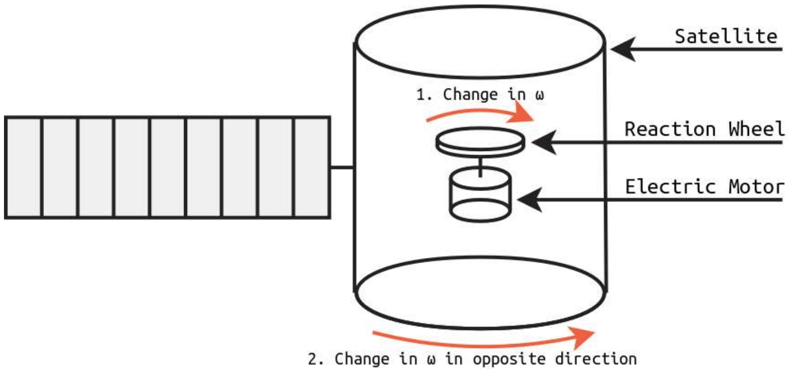
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (9 CFU)

Prova scritta – 23 giugno 2022 – Testo A

SOLUZIONE (traccia)

ESERCIZIO 1.

Nei satelliti artificiali, l’orientamento nello spazio può essere regolato tramite un dispositivo detto ruota di reazione, che è costituito da un volano accoppiato ad un motore elettrico e la cui rotazione determina una rotazione del satellite attorno allo stesso asse del volano, ma in direzione opposta, come schematizzato dalla seguente figura:



Applicando i principi della meccanica di Newton, il modello matematico del sistema può essere descritto tramite le seguenti equazioni differenziali:

$$J_1\ddot{\theta} = b\Omega - \tau_m$$
$$J_2\dot{\Omega} = -b\Omega + \tau_m$$

nelle quali J_1 è l’inerzia del satellite, esclusa la ruota di reazione, J_2 è l’inerzia equivalente dell’assieme di satellite e ruota di reazione, b è il coefficiente di attrito tra il satellite e la ruota di reazione, Θ è l’angolo di orientamento nello spazio del satellite, Ω la velocità angolare relativa della ruota di reazione rispetto al satellite e τ_m la coppia erogata dal motore elettrico.
Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, <u>di ordine 3</u> e del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per le variabili di stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = \theta;\ x_2 = \dot{\theta}\ x_3 = \Omega;\ u = \tau_m;\ y = \dot{\theta} = x_2;$$

RISPOSTA:

Ricordando che $\dot{x}_1 = x_2$:

```
A = [ 0, 1,      0]
    [ 0, 0,   b/J1]
    [ 0, 0,  -b/J2]

B =  [0     ]
     [-1/J1]
     [1/J2]
C =  [0   1    0]
D =  0
```

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$J_1 = 12; \quad J_2 = 8; \quad b = 2;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno <u>completamente osservabile</u>, calcolando la matrice di osservabilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

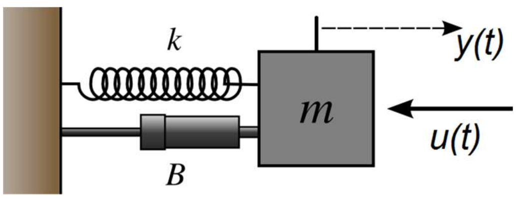
```
A =  [ 0, 1,     0]
     [ 0, 0,   1/6]
     [ 0, 0,  -1/4]

QT = [ 0,   0,      0]
     [ 1,   0,      0]
     [ 0, 1/6, -1/24]
```

rango(Q^T) = 2 ➔ Perciò il sistema NON E' completamente osservabile.

ESERCIZIO 3.

Si consideri il sistema massa-molla-smorzatore rappresentato qui a fianco (ingresso = forza applicata, uscita = spostamento della massa):



per il quale il modello matematico nel dominio del tempo risulta essere:

$$\ddot{y}(t) + m_1\dot{y}(t) + 42y(t) = u(t)$$

NOTA: ***m_1*** è la penultima cifra a destra del proprio numero di matricola, <u>se tale cifra è 0 la si sostituisca con 6</u>.

Si determinino la corrispondente <u>funzione di trasferimento</u> G(s) con la trasformata di Laplace ed il <u>tempo di assestamento</u> T_a della risposta al gradino per tale funzione di trasferimento.

RISPOSTA: CON *m_1* = 6 (esempio indicativo)
Ricordando che:

- dal Teorema della derivata nelle trasformate di Laplace, se $y(t)$ → Y(s), allora $\dot{y}(t)$➔ s Y(s) e $\ddot{y}(t)$➔ s^2 Y(s)
- G(s) = Y(s)/U(S)

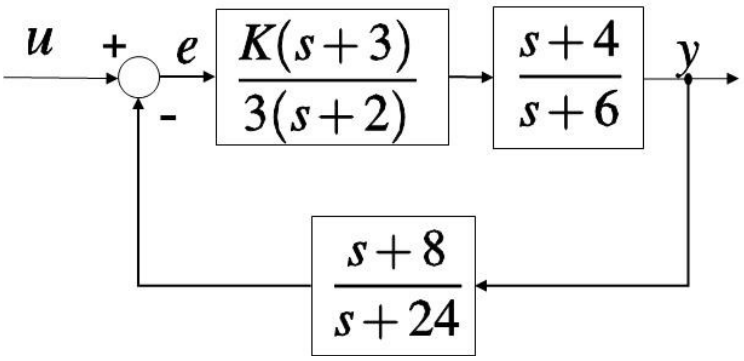
si ottiene FACILISSIMAMENTE che:

$$G(s) = 1 / (s^2 + 6\ s + 42)$$

che risulta avere ω_n = 6,48 (radice di 42) e δ = 0,463, perciò $T_a = 3 / (\delta\ \omega_n) = 1$

ESERCIZIO 4.

Dato il sistema descritto dal seguente schema a blocchi:



e considerando un ingresso a gradino unitario ($U(s) = 1/s$) si determini il valore di K tale che l'errore a regime risulti pari a $e(\infty) = 0{,}0m_0$ (o equivalentemente = ***m_0***/100).

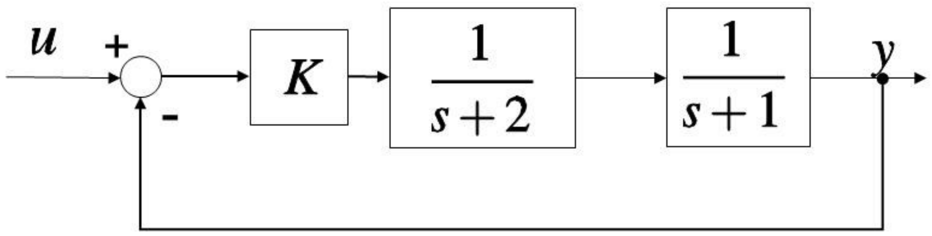
NOTA: ***m_0*** è l'ultima cifra più a destra del proprio numero di matricola, <u>se tale cifra è 0 la si sostituisca con 8</u>.

RISPOSTA: CON *m_0* = 8 (esempio indicativo)

K = 207/2

ESERCIZIO 5.

Dato il sistema costituito dal diagramma a blocchi della seguente figura:



si progetti il valore di K in modo che il sistema in retroazione abbia un coefficiente di smorzamento $\delta = 0{,}m_1$ (o equivalentemente $m_1/10$)

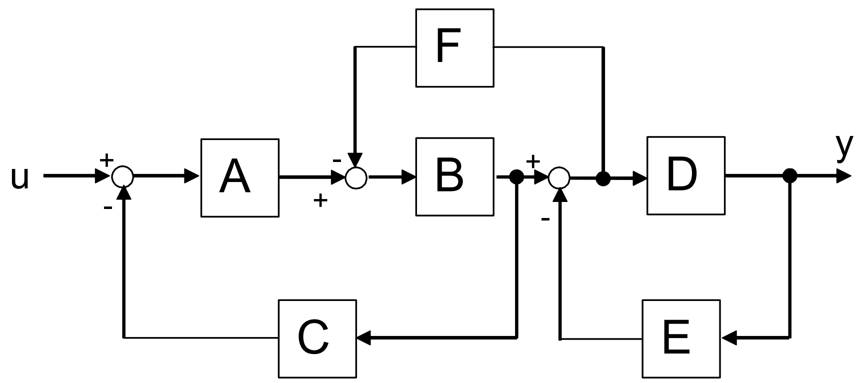
NOTA: m_1 è la penultima cifra a destra del proprio numero di matricola, se tale cifra è 0 la si sostituisca con 3.

RISPOSTA: CON m_1 = 3 (esempio indicativo)

K = 23

ESERCIZIO 6.

Dato il sistema costituito dal seguente diagramma a blocchi:



Si determini la funzione di trasferimento tra Y e U:

RISPOSTA:

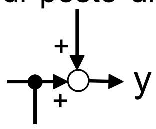
Il diagramma può essere rielaborato in UNO dei seguenti modi, ciascuno dei quali richiede due passaggi con spostamento di diramazioni o nodi sommatori:

1. PRIMO PASSO: spostare la diramazione che entra nel blocco F a valle del blocco D, operazione che "libera" l'anello tra D ed E; dopo aver risolto l'anello tra D ed E, il SECONDO PASSO è spostare la diramazione che entra in C a valle del blocco ottenuto dall'anello citato (i.e. D/(1+DE)), in modo da "liberare" l'altro anello con ramo di retroazione F/D (ottenuto dal PRIMO PASSO) e poter quindi risolvere i due anelli rimanenti in sequenza (prima quello passante per F/D, poi quello passante per C).
2. PRIMO PASSO: spostare il nodo sommatore nel quale entra l'uscita di F a monte di A, operazione che "libera" l'anello tra A, B e C; dopo aver risolto l'anello A-B-C, il SECONDO PASSO è spostare il nodo sommatore nel quale entra l'uscita di E a valle

del blocco ottenuto dall'anello citato (i.e. AB/(1+ABC)), in modo da "liberare" l'altro anello con ramo di retroazione F/A (ottenuto dal PRIMO PASSO) e poter quindi risolvere i due anelli rimanenti in sequenza (prima quello passante per F/A, poi quello passante per E).

Sono inoltre possibili altri modi, ottenuti combinando PRIMO e SECONDO passo dei due modi descritti.

NOTA: non esiste NESSUNA regola immediata che permetta di scambiare di posto una diramazione e un nodo sommatore, come nella parte finale del diagramma:



Scambiando di posto tali elementi grafici si ottiene un diagramma che NON equivale a quello di partenza!!

Soluzione corretta (una volta effettuate tutte le semplificazioni):

$$G = Y/U = ABD / (1 + ABC + ED + BF + ABCED)$$

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.
Il moto libero di un sistema dinamico, lineare, stazionario, continuo e di ordine due, è del tipo:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^t x_1(0) \\ x_2(t) &= e^{-2t} x_2(0) \end{aligned}$$

Il sistema considerato:
- O è completamente controllabile
- **X** può essere completamente controllabile
- O è asintoticamente stabile
- O è semplicemente stabile.

DOMANDA 2.
Il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2x(t) + u(t) \\ y(t) &= 2x(t) \end{aligned}$$

ha funzione di risposta impulsiva pari a:

- o $W(t) = e^{-2t}$
- **x** $W(t) = 2e^{-2t}$
- o $W(t) = e^{2t}$
- o $W(t) = 2e^{2t}$

DOMANDA 3.
L'errore a regime del sistema:

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

chiuso in retroazione unitaria negativa, quando in ingresso è presente un gradino unitario:

$$u(s) = \frac{1}{s}$$

è pari a:
- **x** $e(\infty) = 0$
- o $e(\infty) = 0{,}1$
- o $e(\infty) = 1$
- o $e(\infty) = 10$

DOMANDA 4.
Una rete correttrice ad ritardo e anticipo

$$G(s) = \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\alpha\tau_1 s)(1+\frac{\tau_2}{\alpha} s)}$$

caratterizzata dalla pulsazione centrale $\omega_n = 1/\sqrt{\tau_1\tau_2}$

X Attenua l'ampiezza per $\omega \in]0, \infty[$

O Amplifica l'ampiezza per $\omega \in]0, \infty[$

X Attenua e introduce un ritardo di fase per $\omega \in]0, \omega_n[$

O Amplifica e introduce un anticipo di fase per $\omega \in]0, \omega_n[$