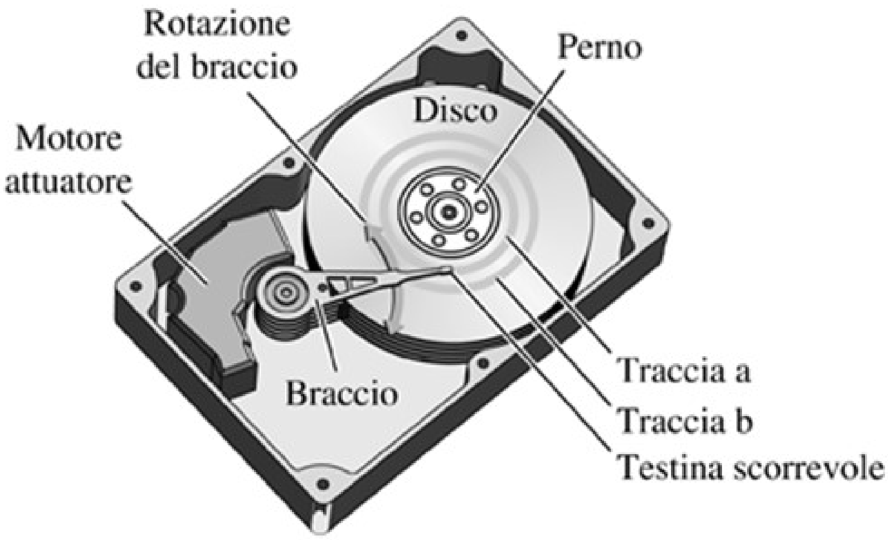
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (6 crediti) / “CONTROLLI AUTOMATICI”

Prova scritta – 21 febbraio 2020

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si consideri il meccanismo di posizionamento della testina di lettura di un hard-disk, la costruzione è mostrata nella seguente figura:



(fonte: "Controlli automatici" – R.C.Dorf, R.H. Bishop, Ed. Pearson)

Considerando solamente le equazioni dinamiche del motore (normalmente di tipo *Voice-Coil*) per la rotazione del braccio di supporto della testina e la meccanica flessibile dello stesso braccio, si ottiene un modello matematico semplificato descritto dalle seguenti equazioni differenziali:

$$L_a \dot{I}_a + R_a I_a + K_m \dot{\theta} = V_m$$

$$J_t \ddot{\theta} + B_t \dot{\theta} + K_t \theta = K_m I_a$$

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, <u>di ordine 3</u> e del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Fissando le seguenti scelte per le variabili di stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = I_a;\ x_2 = \theta;\ x_3 = \dot{\theta};\ u = V_m;\ y = x_2;$$

RISPOSTA:

Eseguendo i seguenti passaggi

- sostituire la notazione delle variabili di stato, ingresso e uscita
- notare che la derivata della seconda variabile di stato corrisponde alla terza variabile di stato, quindi $\dot{x}_2 = x_3$:

e rielaborando le equazioni, si ottengono le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{R_a}{L_a}x_1 - \frac{K_m}{L_a}x_3 + \frac{1}{L_a}u \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= \frac{K_m}{J_t}x_1 - \frac{K_t}{J_t}x_2 - \frac{B_t}{J_t}x_3
\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & -\frac{K_m}{L_a} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_m}{J_t} & -\frac{K_t}{J_t} & -\frac{B_t}{J_t} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y = x_2$, poiché tale uscita non dipende dall'ingresso D = 0 (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la seconda variabile dal vettore di stato è:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

L_a = 0,1 ; R_a = 1; K_m = 8; K_t = 4; B_t = 0,8 ; J_t = 0,2

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente osservabile, calcolando la matrice di osservabilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema, di interesse per l'analisi di osservabilità (i.e. B non è di interesse), diventano:

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -80 \\ 0 & 0 & 1 \\ 40 & -20 & -4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

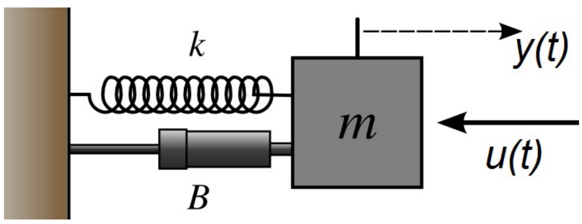
$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T \; A^T C^T \; (A^T)^2 C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 40 \\ 1 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

rango(Q^T) = 3

Perciò il sistema **E'** ~~/ NON E'~~ completamente osservabile.

ESERCIZIO 3.

Si consideri il seguente sistema massa-molla-smorzatore (ingresso = forza applicata, uscita = spostamento della massa):



per il quale il modello matematico nello spazio degli stati risulta essere:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \; y(t) = Cx(t)$$ con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si determini la corrispondente funzione di trasferimento G(s).

RISPOSTA:

La funzione di trasferimento del sistema è:

$$G(s) = C\,(s\,I - A)^{-1}\,B$$

Poiché la matrice centrale nella formula risulta:

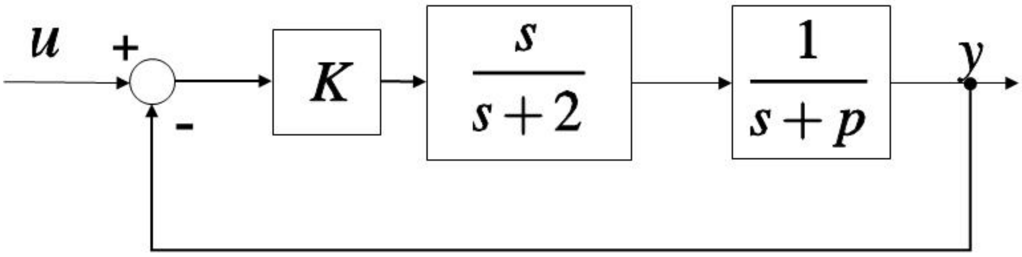
$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^2+3s+2} \\ -\frac{2}{s^2+3s+2} & \frac{s}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}$$

la funzione di trasferimento è:

$$G(s) = \frac{2s}{s^2+3s+2}$$

ESERCIZIO 4.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determinino i valori di K e p tali che il sistema ad anello chiuso risulti avere pulsazione naturale $\omega_n = 12$ e tempo di assestamento $T_a = 0.6$ secondi.

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta $= s^2 + (K + p + 2)\,s + 2\,p$.

Confrontando tale polinomio con il denominatore tipico dei sistemi del secondo ordine $s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2$, si può notare che il coefficiente del terzo termine corrisponde a $\omega_n^2 = 2\,p = 144$, da cui si ricava immediatamente $p = 72$.

Poiché le specifiche richieste dal testo sono compatibili con un coefficiente di smorzamento $\delta = 3 / (0{,}6 * 12) = 0{,}4167$ (**NOTA**: *il sistema di secondo ordine di riferimento si considera sempre con poli complessi e coniugati, cioè con* $0 \le \delta \le 1$), il tempo di assestamento si può considerare approssimato dalla formula:

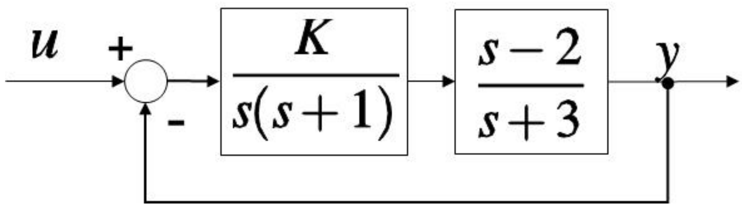
$$T_a = 3 / (\delta\,\omega_n)$$

Dati quindi i valori di p e δ, è necessario che il termine di primo grado nel denominatore ad anello chiuso, dipendente da K e p, sia pari a 10. Pertanto il risultato finale è

$$K = -64 \qquad p = 72$$

ESERCIZIO 5.

Dato il seguente sistema in retroazione:



si calcoli il valore di $K \neq 0$ tale per cui il sistema considerato risulti <u>SEMPLICEMENTE STABILE</u>. Una volta determinato il valore di K, si calcolino i corrispondenti poli puramente immaginari.

RISPOSTA:

Per ottenere il valore di K corrispondente alla stabilità semplice, o *marginale*, è necessario applicare il criterio di Routh cercando gli estremi dell'intervallo di stabilità per l'incognita K. Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta:

$$D_{cl}(s) = s^3 + 4s^2 + (K+3)s - 2K$$

e dal criterio di Routh il sistema risulterebbe asintoticamente stabile per $-2 < K < 0$. Poiché il valore 0 è escluso dalle ipotesi del testo, la prima parte della soluzione è:

$$K = -2$$

Con questo valore di K, il denominatore risulta:

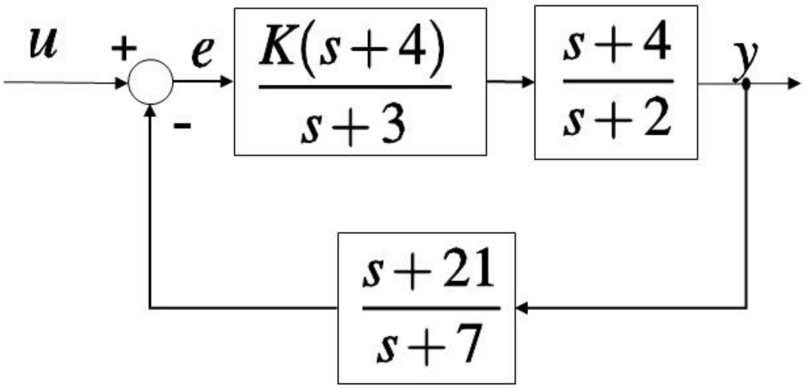
$$D_{cl}(s) = s^3 + 4s^2 + s + 4 = (s^2 + 1)(s + 4)$$

Pertanto, la coppia di poli puramente immaginari (escludendo il fattore corrispondente al polo reale in -4) è:

$$p_{1,2} = \pm j$$

ESERCIZIO 6.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determini il valore di K tale per cui il sistema risulti avere errore a regime pari a:
$e(\infty) = 0,2$ con ingresso a gradino unitario ($U(s) = 1/s$)

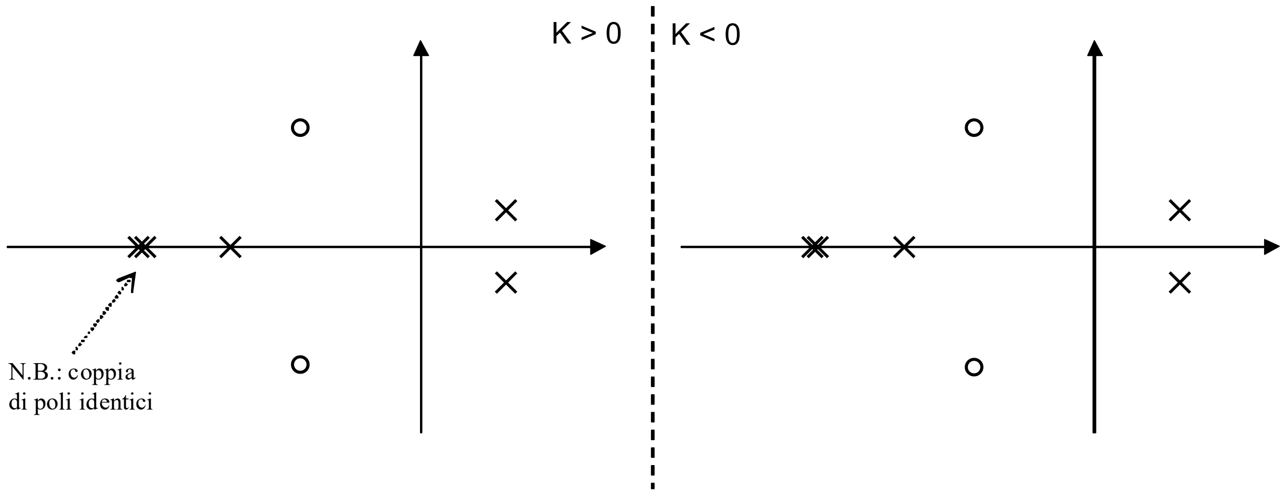
RISPOSTA:

Applicando il metodo descritto nella slide 48-49 della dispensa "FdA-2.4-StabilitaFdT-LuogoRadici_2019.pdf", si ottiene:

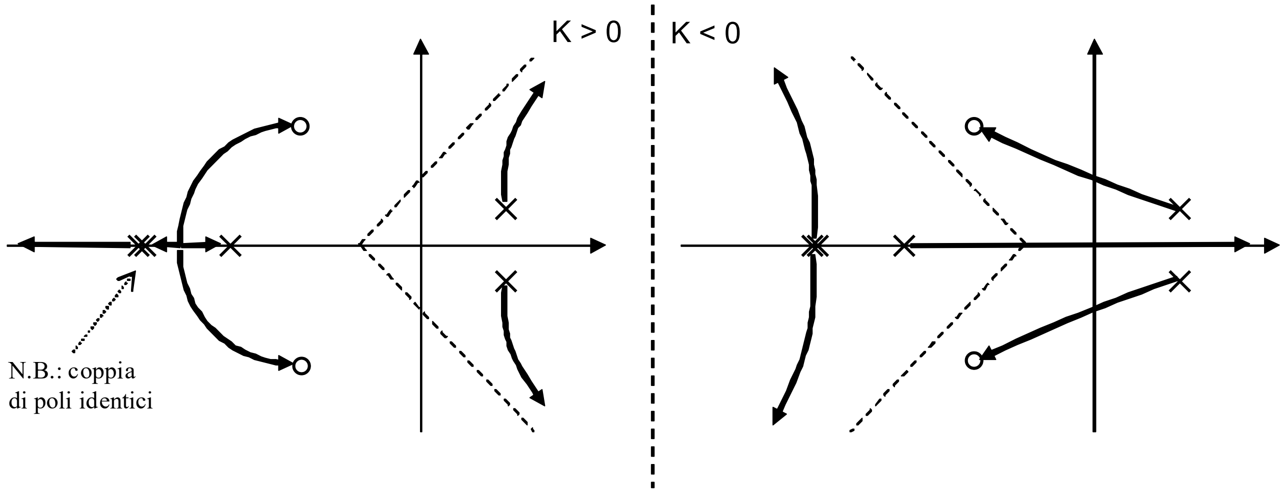
$$K = 0,5 = 1/2$$

ESERCIZIO 7.

Si tracci l'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema con poli (x) e zeri (o) della funzione di trasferimento d'anello come indicato in figura:

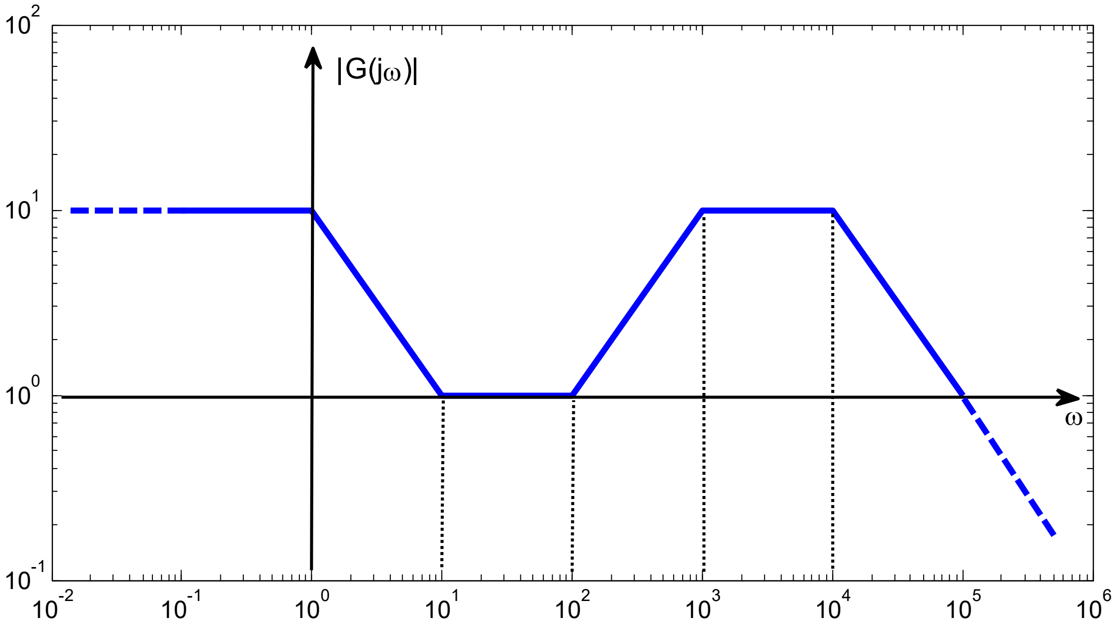


RISPOSTA:



ESERCIZIO 8.

Dato il seguente diagramma di Bode delle ampiezze:



si determini la funzione di trasferimento $G(s)$, supposta a fase minima.

RISPOSTA:

$$G(s) = \frac{10\left(1+\frac{s}{10}\right)\left(1+\frac{s}{100}\right)}{(1+s)\left(1+\frac{s}{1000}\right)\left(1+\frac{s}{10000}\right)}$$

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

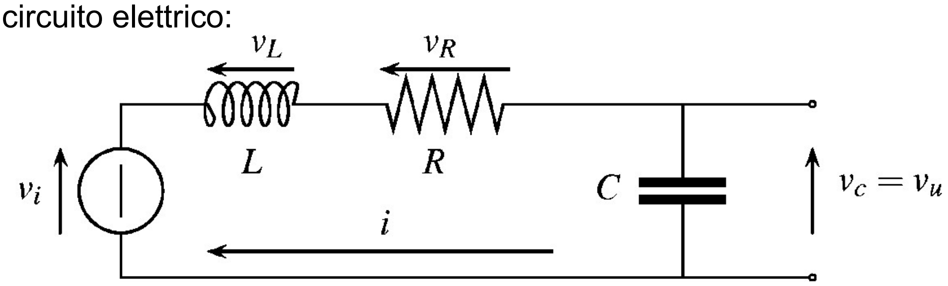
DOMANDA 1.
Un sistema singolo ingresso / singola uscita, descritto dal modello matematico

$$\dot{x}(t) = u(t); \quad y(t) = x(t)$$

O è asintoticamente stabile
X ha una funzione di trasferimento con un polo nullo
O ha una funzione di trasferimento con un polo a modulo unitario
X è puramente dinamico

DOMANDA 2.
Gli elementi dell'esponenziale e^{At} di una matrice A (ad elementi reali) NON tendono a zero quanto *t* tende all'infinito. Ne consegue che la matrice A:
O è singolare
O ha tutti gli autovalori a parte reale positiva
O ha tutti gli autovalori a parte reale negativa
X ha almeno un autovalore con parte reale nulla o positiva

DOMANDA 3.
Il seguente circuito elettrico:



costituisce un sistema che, per qualunque valore di L > 0, R > 0 e C > 0:
O è instabile
X è asintoticamente stabile
O è semplicemente stabile
O è caratterizzato da una funzione di trasferimento del primo ordine

DOMANDA 4.
Il tempo di assestamento (al +/- 5%) del sistema avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s+3}$$

risulta essere
X $T_a = 1$
O $T_a = 2$
O $T_a = 3$
O $T_a = 3/2$

DOMANDA 5.
L'errore a regime del sistema :

$$G(\mathsf{s}) = \frac{1}{\mathsf{s}^2(\mathsf{s}+2)}$$

chiuso in retroazione unitaria negativa, quando in ingresso è presente una rampa unitaria:

$$u(\mathsf{s}) = \frac{1}{\mathsf{s}^2}$$

è pari a:

X $\mathsf{e}(\infty) = 0$

o $\mathsf{e}(\infty) = 1$

o $\mathsf{e}(\infty) = 2$

o $\mathsf{e}(\infty) = 3$