

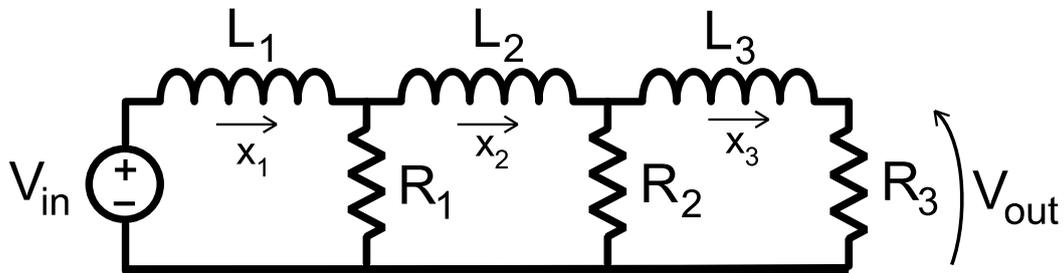
**Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (6 crediti) /
“CONTROLLI AUTOMATICI”
(A.A. fino al 2017/2018)**

Prova scritta – 21 gennaio 2020

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si consideri il circuito elettrico passivo mostrato dalla seguente figura:



Applicando le opportune leggi di Kirchhoff e di Ohm, il modello matematico del sistema può essere descritto tramite le seguenti equazioni differenziali:

$$L_1 \dot{x}_1 = V_{in} - (x_1 - x_2)R_1$$

$$L_2 \dot{x}_2 = (x_1 - x_2)R_1 - (x_2 - x_3)R_2$$

$$L_3 \dot{x}_3 = (x_2 - x_3)R_2 - x_3 R_3$$

Si noti che la tensione V_{out} , corrispondente all'uscita del sistema, risulta essere pari alla quantità $R_3 x_3$.

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, di ordine 3 e del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Fissando le ovvie scelte per le variabili di stato e le seguenti per quelle di ingresso e uscita:

$$u = V_{in}; y = V_{out} = R_3 x_3;$$

RISPOSTA:

Rielaborando le equazioni, si ottengono le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{R_1}{L_1}x_1 + \frac{R_1}{L_1}x_2 + \frac{1}{L_1}u \\ \dot{x}_2 &= \frac{R_1}{L_2}x_1 - \frac{R_1+R_2}{L_2}x_2 + \frac{R_2}{L_2}x_3 \\ \dot{x}_3 &= \frac{R_2}{L_3}x_2 - \frac{R_2+R_3}{L_3}x_3\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici **A** e **B**:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & \frac{R_1}{L_1} & 0 \\ \frac{R_1}{L_2} & -\frac{R_1+R_2}{L_2} & \frac{R_2}{L_2} \\ 0 & \frac{R_2}{L_3} & -\frac{R_2+R_3}{L_3} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici **C** e **D** si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y = R_3x_3$, poiché tale uscita non dipende dall'ingresso $D = 0$ (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1×3 che determina come uscita la terza variabile dal vettore di stato moltiplicata per R_3 è:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$R_1 = 1; \quad R_2 = 3; \quad R_3 = 5; \quad L_1 = 0,1; \quad L_2 = 0,5; \quad L_3 = 0,2;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente osservabile, calcolando la matrice di osservabilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema, di interesse per l'analisi di osservabilità (i.e. B non è di interesse), diventano:

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 2 & -8 & 6 \\ 0 & 15 & -40 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

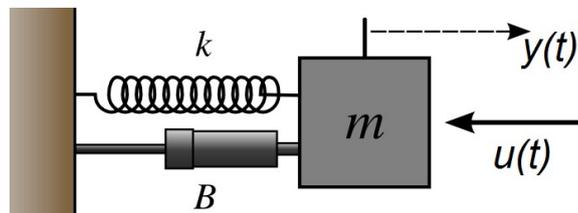
$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 150 \\ 0 & 75 & -3600 \\ 5 & -200 & 8450 \end{bmatrix}$$

$$\text{rango}(Q^T) = 3$$

Perciò il sistema ~~E'~~ ~~NON E'~~ completamente osservabile.

ESERCIZIO 3.

Si consideri il seguente sistema massa-molla-smorzatore (ingresso = forza applicata, uscita = spostamento della massa):



per il quale il modello matematico nello spazio degli stati risulta essere:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad y(t) = Cx(t) \quad \text{con}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si determini la corrispondente funzione di risposta impulsiva $W(t)$.

RISPOSTA:

La risposta impulsiva del sistema è:

$$W(t) = Ce^{At}B$$

Poiché la matrice A risulta avere autovalori pari a $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$, la relativa matrice esponenziale è:

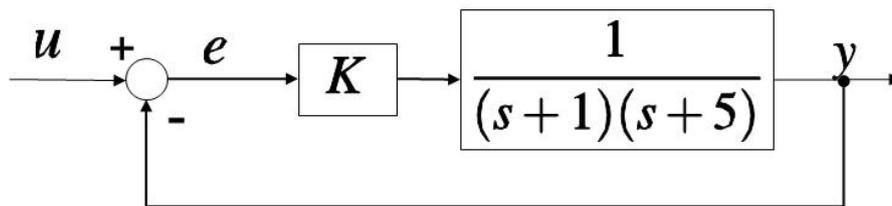
$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$W(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

ESERCIZIO 4.

Dato il seguente sistema in retroazione:



al quale viene applicato un ingresso a gradino unitario ($U(s) = 1/s$) si calcoli il valore di K tale per cui il sistema considerato risulti avere errore a regime $e(\infty) = 0,2$.

Una volta determinato il valore di K , si calcoli il coefficiente di smorzamento δ che il sistema chiuso in retroazione risulta avere per tale valore di progetto.

RISPOSTA:

Poiché il sistema ha retroazione unitaria negativa, l'errore a regime corrisponde al limite:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)} \quad \text{con} \quad G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+5)}$$

Pertanto, risulta:

$$\frac{1}{1 + \frac{K}{5}} = \frac{1}{5}$$

da cui si ottiene che:

$$K = 20$$

permette di ottenere l'errore a regime voluto. Con questo valore di K , il denominatore ad anello chiuso risulta:

$$s^2 + 6s + 5 + K = s^2 + 6s + 25$$

Confrontando tale denominatore con quello tipico dei sistemi del secondo ordine:

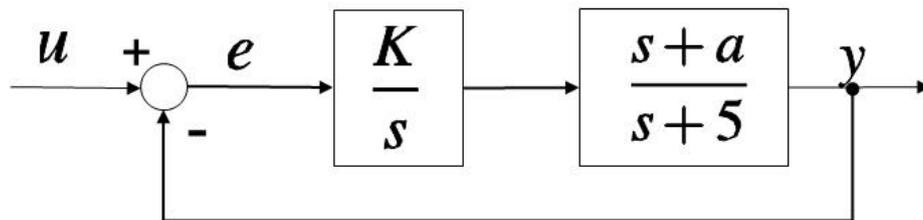
$$s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2$$

si può osservare che $\omega_n = 5$ e, pertanto, il coefficiente di smorzamento è:

$$\delta = 0,6$$

ESERCIZIO 5.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determinino i valori di K e a tali che il sistema ad anello chiuso risulti avere una coppia di poli complessi e coniugati in $p_{1,2} = -3 \pm j 2$

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta $= s^2 + (K + 5) s + K a$.

Imporre che il sistema ad anello chiuso abbia i poli $p_{1,2} = -3 \pm j 2$ significa imporre che:

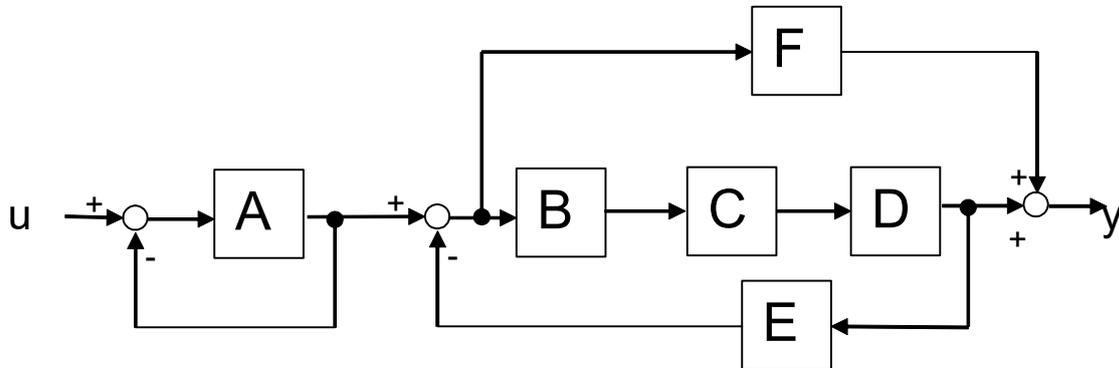
$$s^2 + (K + 5) s + K a = s^2 + 6 s + 13$$

Risolviendo il sistema di due equazioni in due incognite (K e a) ottenuto uguagliando uguagliando due termini costanti e i due coefficienti dei termini di primo grado, si ottiene il risultato finale:

$$K = 1 \qquad a = 13$$

ESERCIZIO 6.

Si determini la funzione di trasferimento del seguente diagramma a blocchi:



RISPOSTA:

Si noti che il ramo passante per F e l'anello che include B, C, D ed E interagiscono tra loro e devono quindi essere separati. L'operazione può essere fatta spostando in due modi:

- Spostando la diramazione entrante in E a monte di BCD
- OPPURE spostando la diramazione entrante in F a valle di BCD .

Applicando le opportune regole per tali spostamenti si ottiene poi:

$$Y / U = [A / (1 + A)] * [(BCD + F) / (1 + BCDE)]$$

ESERCIZIO 7.

Determinare l'espressione sinusoidale (a regime) dell'uscita $y(t)$ del sistema avente funzione di trasferimento pari a:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s(s+1)}$$

al cui ingresso è applicato il segnale $u(t) = \sin(t)$

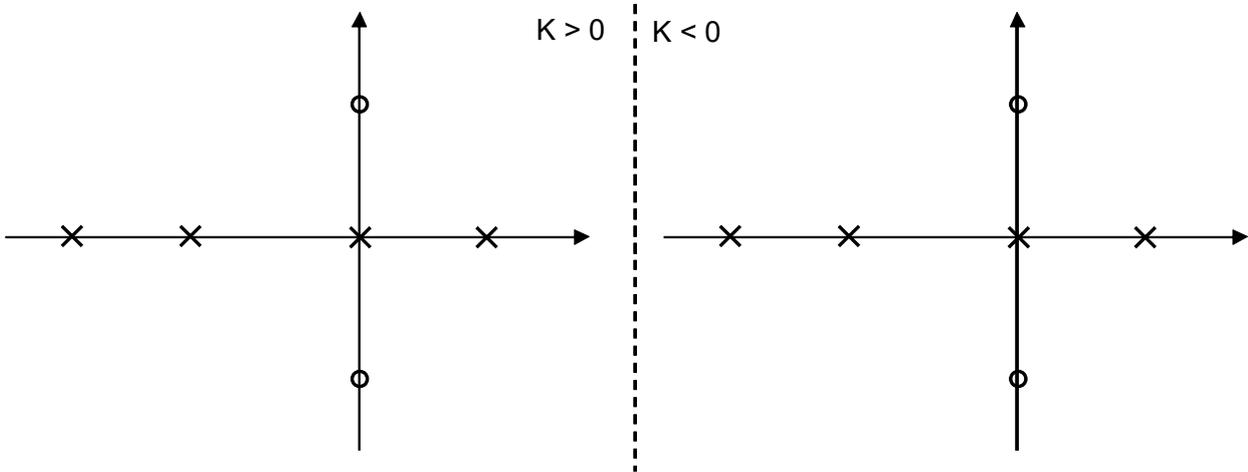
RISPOSTA:

La sinusoide in ingresso ha ampiezza e pulsazione unitaria (i.e. $\omega = 1$), pertanto l'uscita a regime è determinata dalla risposta armonica (i.e. $y(t) = |G(j\omega)|\sin(\omega t + \arg[G(j\omega)])$):

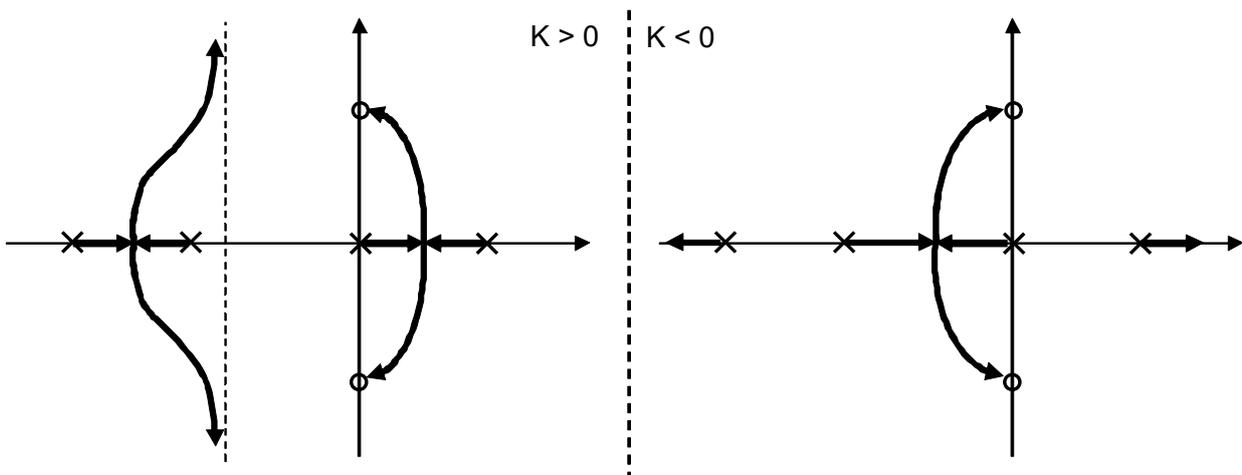
$$y(t) = \sqrt{2} \sin\left(t - \frac{3}{4}\pi\right)$$

ESERCIZIO 8.

Si tracci l'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema con poli (x) e zeri (o) della funzione di trasferimento d'anello come indicato in figura:

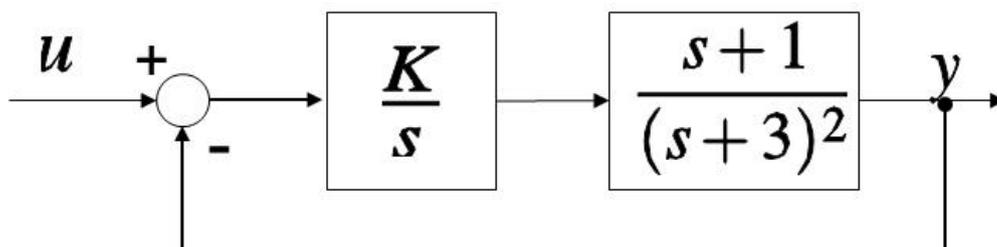


RISPOSTA:



ESERCIZIO 9.

Dato il sistema descritto dallo schema a blocchi mostrato nel seguito:



Si determinino i valori di K tali per cui il sistema chiuso in retroazione risulti asintoticamente stabile.

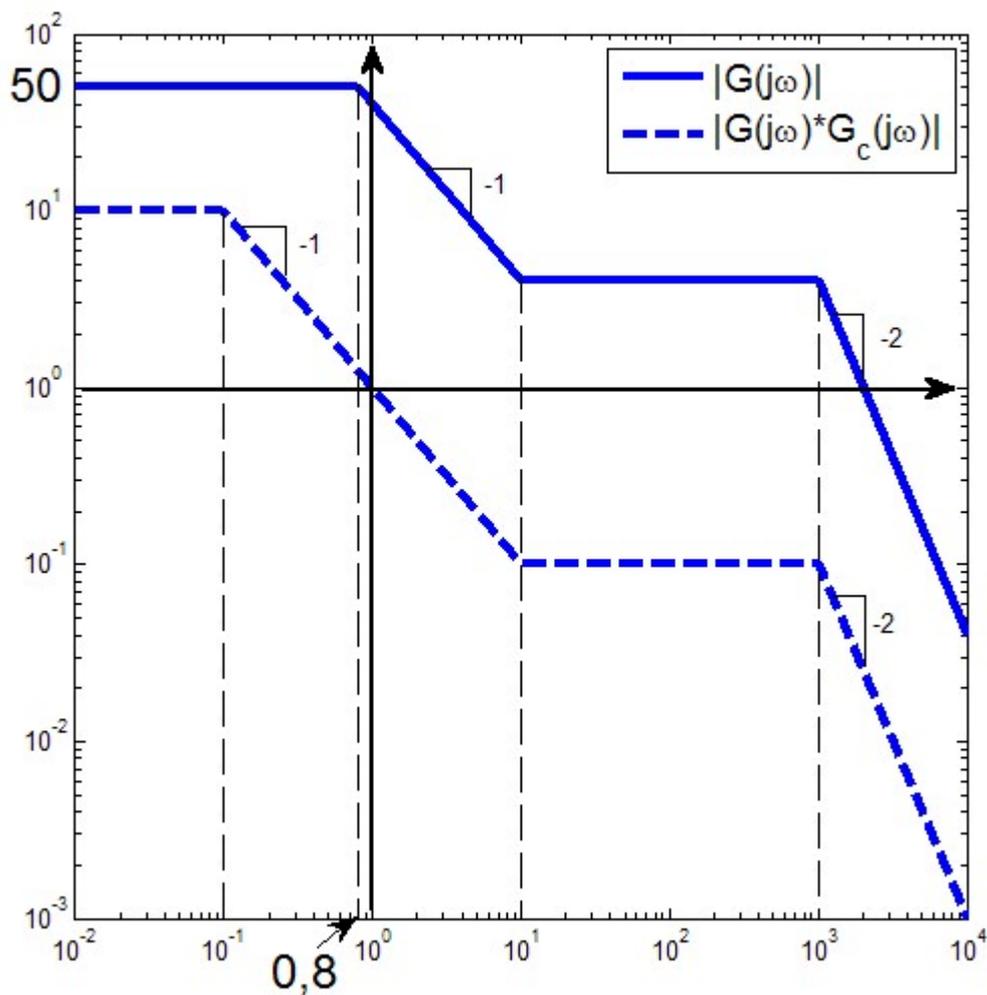
RISPOSTA:

Applicando il criterio di Routh al denominatore del sistema ad anello chiuso si ottiene:

$$K > 0$$

ESERCIZIO 10.

Dati i seguenti diagrammi di Bode delle ampiezze:



si determinino le funzioni di trasferimento $G(s)$ e $G_c(s)$, supposte entrambe a fase minima.

RISPOSTA:

$$G(s) = \frac{50(1 + \frac{s}{10})}{(1 + \frac{s}{0,8})(1 + \frac{s}{1000})^2}$$

$$G_c(s) = \frac{(1 + \frac{s}{0,8})}{5(1 + \frac{s}{10^{-1}})}$$
