

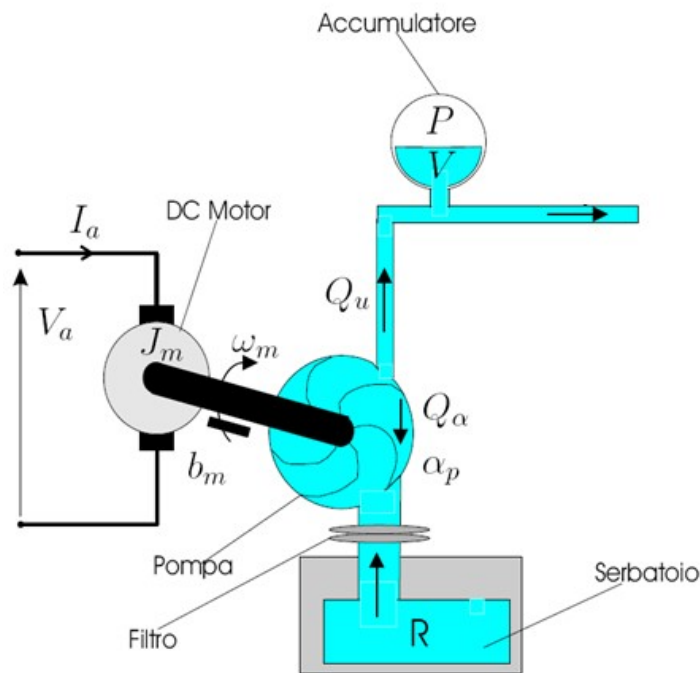
**Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (6 crediti) /
 “CONTROLLI AUTOMATICI”
 (A.A. fino al 2017/2018)**

Prova scritta – 19 novembre 2019

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si consideri il sistema per la regolazione della pressione in un circuito idraulico, costituito da un motore elettrico a corrente continua, una pompa la cui girante è azionata dal motore stesso, da un serbatoio di fluido e da un accumulatore di volume fissato. Lo schema del circuito è mostrato nella seguente figura:



Applicando le opportune leggi fisiche per il circuito di tipo RL del motore e per la dinamica del fluido attraverso la pompa e l'accumulatore, il modello matematico del sistema può essere descritto tramite le seguenti equazioni differenziali:

$$V_a = RI_a + L\dot{I}_a + K_m\omega_m$$

$$J_m\dot{\omega}_m + b_m\omega_m = K_m I_a - K_p P$$

$$\dot{P} = K_o(K_p\omega_m - \alpha_p P)$$

nelle quali R e L sono rispettivamente la resistenza e l'induttanza dell'avvolgimento del motore elettrico, J_m e b_m il momento di inerzia e il coefficiente di attrito viscoso del motore, K_m è la costante di coppia/BEMF del motore, K_p è la cilindrata della pompa, α_m è la resistenza fluidica del circuito idraulico e K_o è il coefficiente di comprimibilità.

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, di ordine 3 e del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per le variabili di stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = I_a; x_2 = \omega_m; x_3 = P; u = V_a; y = P = x_3;$$

RISPOSTA:

Rielaborando le equazioni, si ottiene le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{R}{L}x_1 - \frac{K_m}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 &= \frac{K_m}{J_m}x_1 - \frac{b_m}{J_m}x_2 - \frac{K_p}{J_m}x_3 \\ \dot{x}_3 &= K_o K_p x_2 - K_o \alpha_p x_3 \end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_m}{L} & 0 \\ \frac{K_m}{J_m} & -\frac{b_m}{J_m} & -\frac{K_p}{J_m} \\ 0 & K_o K_p & -K_o \alpha_p \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y = x_3$, poiché tale uscita non dipende dall'ingresso $D = 0$ (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1×3 che estrae la terza variabile dal vettore di stato è:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$R = 0,4; \quad L = 0,2; \quad K_m = 1; \quad J_m = 0,1; \quad b_m = 0,2; \\ K_p = 0,5; \quad K_o = 4; \quad \alpha_p = 1;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente controllabile, calcolando la matrice di raggiungibilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema, di interesse per l'analisi di controllabilità (i.e. C non è di interesse), diventano:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 0 \\ 10 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$P = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 5 & -10 & -230 \\ 0 & 50 & -200 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\text{rango}(P) = 3$$

Perciò il sistema ~~E'~~ ~~NON E'~~ completamente controllabile.

ESERCIZIO 3.

Per il sistema con i valori numerici indicati nell'Esercizio 2, si progetti una retroazione stato-ingresso (i.e. $u = Hx + v$), in modo tale che:

- gli autovalori assegnabili del sistema chiuso in retroazione siano tutti reali e distinti;
- il più lento di tali autovalori abbia tempo di assestamento (al 5%) di 1 secondo e gli altri assegnabili abbiano valori assoluti progressivi di una unità (es. -3, -4, ecc.).

RISPOSTA:

Poiché la matrice di raggiungibilità ha rango 3, (v. Esercizio 2) è possibile assegnare tutti gli autovalori del sistema chiuso in retroazione con una retroazione stato-ingresso. Gli

autovalori desiderati sono determinati dalle specifiche dell'esercizio ricordando che il tempo di assestamento al 5% del modo corrispondente ad un autovalore reale è:

$$T_a = -\frac{3}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{T_a}$$

Pertanto, per avere $T_a = 1$, l'autovalore più lento deve essere pari a $\lambda_1 = -3$, mentre gli altri devono essere: $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = -5$.

Con tale scelta, il polinomio caratteristico desiderato per il sistema chiuso in retroazione deve essere:

$$\begin{aligned} p_{des}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = \\ &= (\lambda + 3)(\lambda + 4)(\lambda + 5) = \lambda^3 + 12\lambda^2 + 47\lambda + 60 \end{aligned}$$

La matrice H del controllore deve essere di dimensione 1×3 , cioè $H = [h_1 \ h_2 \ h_3]$, pertanto la matrice del sistema chiuso in retroazione con i coefficienti incogniti di H risulta:

$$A + BH = \begin{bmatrix} 5h_1 - 2 & 5h_2 - 5 & 5h_3 \\ 10 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza, il polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione risulta:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A - BH) = \\ &= \lambda^3 + (8 - 5h_1)\lambda^2 + (80 - 30h_1 - 50h_2)\lambda + 236 - 90h_1 - 200h_2 - 100h_3 \end{aligned}$$

Uguagliando quindi i coefficienti dei termini di pari grado nel polinomio caratteristico desiderato e nella parte di polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione dipendente da H si ottengono i vincoli di progetto:

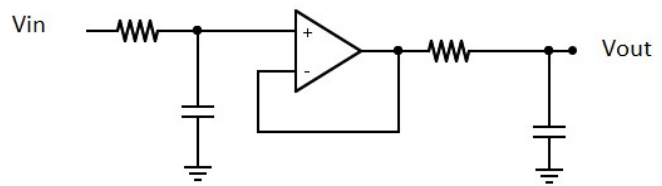
$$\begin{aligned} 8 - 5h_1 &= 12 \\ 80 - 30h_1 - 50h_2 &= 47 \\ 236 - 90h_1 - 200h_2 - 100h_3 &= 60 \end{aligned}$$

Risolvendo i quali, rispetto agli elementi di H , risulta

$$H = [\ -4/5 \quad 57/50 \quad 1/5]$$

ESERCIZIO 4.

Un sistema costituito dal circuito elettronico del tipo mostrato a fianco risulta avere il seguente modello nello spazio degli stati:



$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t)$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si determini il valore dell'uscita $y(t)$ (i.e. tensione V_{out}) all'istante $t = 1$ secondo, ponendo l'ingresso $u(t) = 0$ e considerando lo stato all'istante iniziale $t = 0$ pari a:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

RISPOSTA:

Nelle condizioni specificate dal testo, cioè con ingresso nullo e stato iniziale non nullo, l'uscita del sistema è determinata dalla seguente formula:

$$y(t_1) = C e^{A(t_1 - t_0)} x(t_0)$$

con $t_1 = 1$ e $t_0 = 0$. Notando che gli autovalori della matrice A sono -1 e -3 ed applicando il metodo del polinomio interpolante per il calcolo dell'esponenziale della matrice A , si ottiene anzitutto:

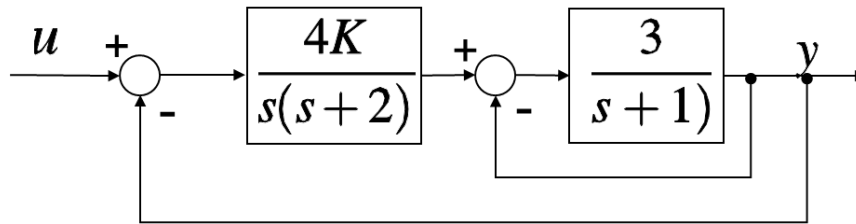
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{1}{2} (e^{-t} - e^{-3t}) & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Pertanto, applicando i valori di tempo e di stato iniziale specificati dal testo si ottiene:

$$y(1) = \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e^{-3}}{2} = 0,159$$

ESERCIZIO 5.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si calcolino i valori di K per i quali il sistema chiuso in retroazione risulti asintoticamente stabile:

RISPOSTA:

Una volta ridotti entrambi gli anelli di retroazione, il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso risulta:

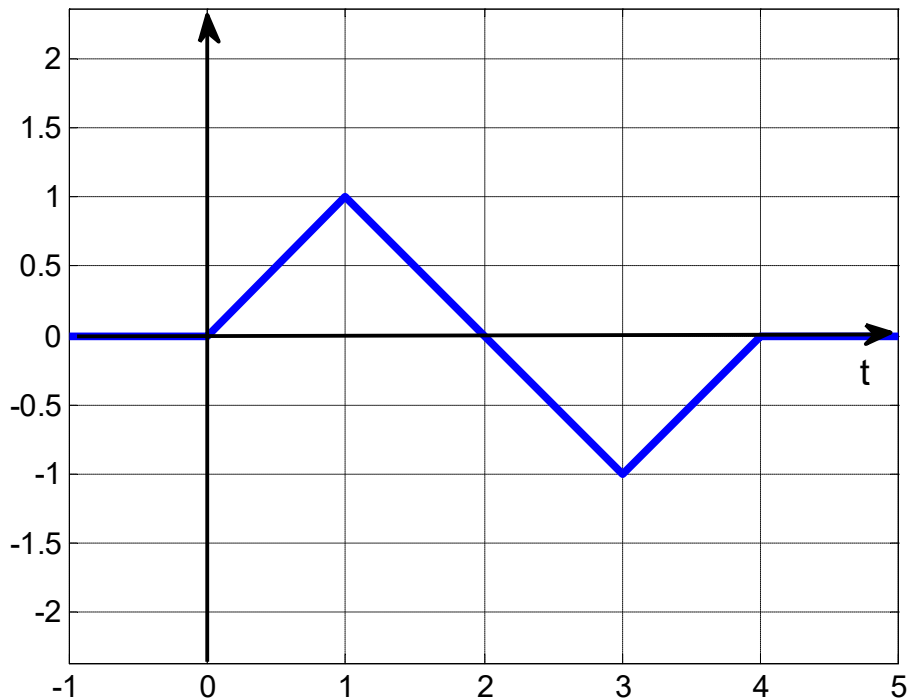
$$D_{cl}(s) = s^3 + 6s^2 + 8s + 12K$$

Applicando il criterio di Routh a tale polinomio, risulta che per avere poli a parte reale negativa (asintotica stabilità) è necessario che sia:

$$0 < K < 4$$

ESERCIZIO 6.

Si determini la trasformata di Laplace del seguente segnale nel dominio del tempo $f(t)$:

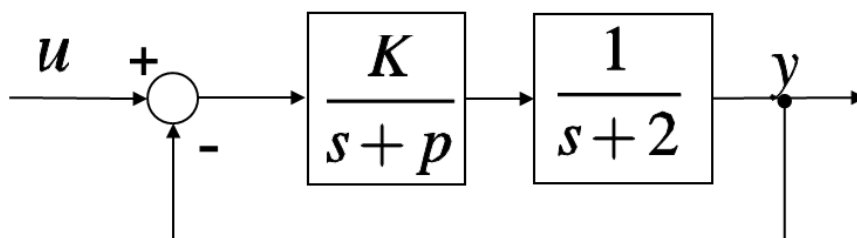


RISPOSTA:

$$F(s) = 1/s^2 + e^{-s} (-2/s^2) + e^{-3s} (3/s^2) + e^{-4s} (1/s^2)$$

ESERCIZIO 7.

Dato il seguente sistema in retroazione:



si progettino i valori di K e p tali per cui il sistema ad anello chiuso risulti avere tempo di assestamento $T_a = 2$ secondi e coefficiente di smorzamento $\delta = 0,5$.

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta:

$$D_{cl}(s) = s^2 + (p + 2)s + 2p + K$$

Confrontandolo con il denominatore tipico di un generico sistema del secondo ordine e ricordando che per i sistemi del secondo ordine:

$$T_a = \frac{3}{\delta \omega_n}$$

risulta che per rispettare le specifiche richieste dal testo è necessario imporre $\delta \omega_n = 3/2$, pertanto

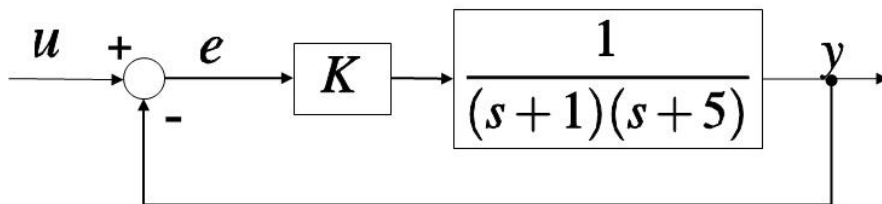
$$(p + 2) = 2\delta \omega_n = 3 \quad \rightarrow \quad p = 1$$

Fissato il valore desiderato di δ si ottiene poi $\omega_n = 3$ e quindi:

$$(2p + K) = \omega_n^2 = 9 \quad \rightarrow \quad K = 7$$

ESERCIZIO 8.

Dato il seguente sistema in retroazione:



al quale viene applicato un ingresso a gradino unitario ($U(s) = 1/s$) si calcoli il valore di K tale per cui il sistema considerato risulti avere errore a regime $e(\infty) = 0,2$.

RISPOSTA:

Poiché il sistema ha retroazione unitaria negativa, l'errore a regime corrisponde al limite:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)} \quad \text{con} \quad G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+5)}$$

Pertanto, risulta:

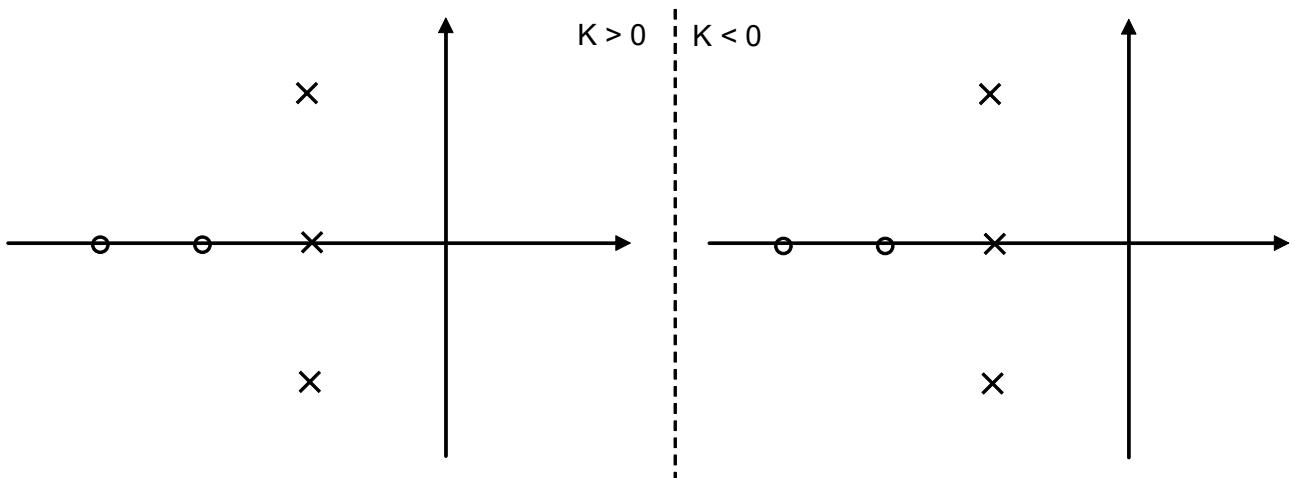
$$\frac{1}{1 + \frac{K}{5}} = \frac{1}{5}$$

da cui si ottiene:

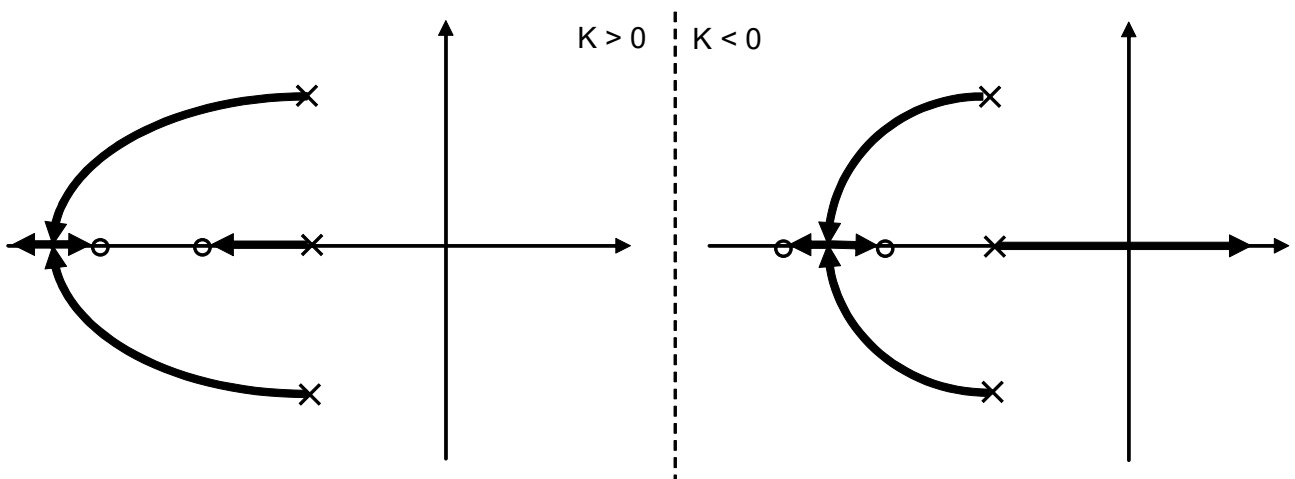
$$K = 20$$

ESERCIZIO 9.

Si tracci l'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema con poli (x) e zeri (o) della funzione di trasferimento d'anello come indicato in figura:

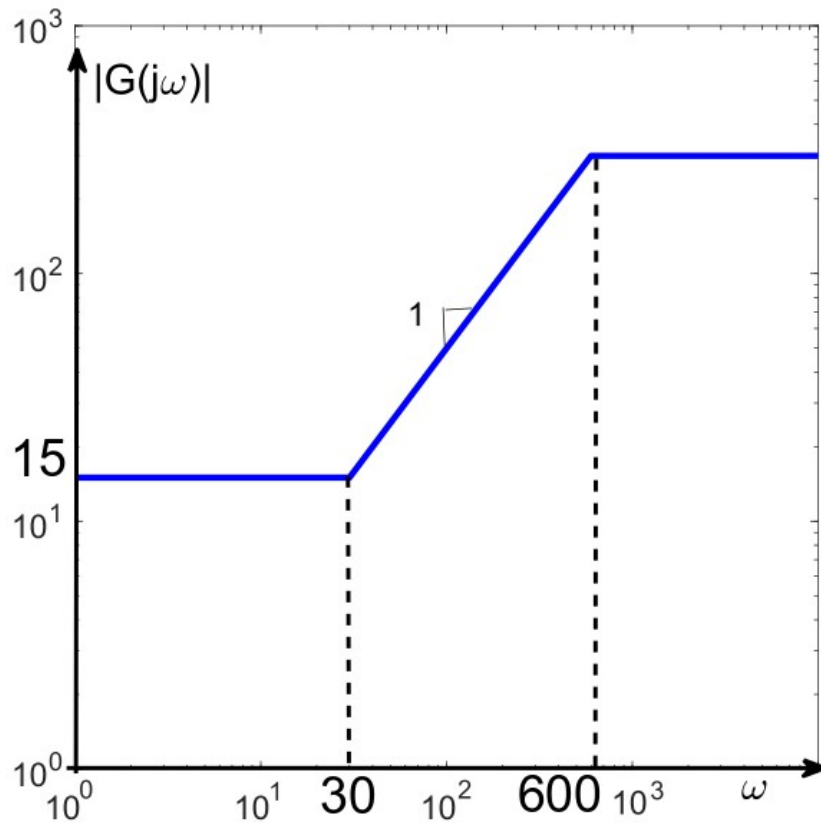


RISPOSTA:



ESERCIZIO 10.

Dato il seguente diagramma di Bode delle ampiezze:



si determinino i parametri della funzione di trasferimento $G(s)$, supposta a fase minima ed espressa nella forma:

$$G(s) = \frac{K(1+\tau s)}{1+\alpha\tau s}$$

RISPOSTA:

$$K = 15 \quad \tau = 1/30 \quad \alpha = 1/20$$
