

# Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (9 CFU)

**Prova MATLAB (1) – 19 settembre 2019**

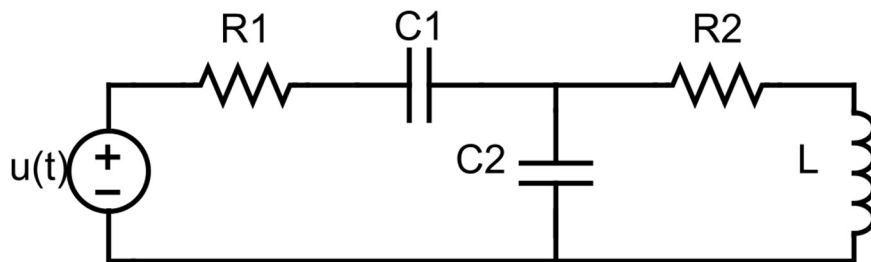
## Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (9 CFU)

**Istruzioni per lo svolgimento:** lo studente deve consegnare al termine della prova una cartella nominata `Cognome_Nome`, contenente:

- Un Matlab script file (i.e. file di testo con estensione .m) riportante i comandi eseguiti (**NOTA:** per copiare i comandi dalla Command History, visualizzarla tramite menu “Layout → Command History → Docked”, selezionare in tale finestra le righe di interesse tramite *Ctrl+mouse left-click* e dal menu visualizzato tramite *mouse right-click* selezionare “create script”) e la risposta alle eventuali richieste teoriche sotto forma di commento (i.e. riga di testo preceduta dal simbolo %)
- Un file workspace.mat contenente le variabili definite nel corso dello svolgimento della prova (creato con il comando `save workspace`)
- Un file MS Word nel quale siano copiate le figure rilevanti per la dimostrazione dei risultati ottenuti (NOTA: per copiare una figura Matlab come bitmap, usare il menu “Edit → Copy Figure” dalla finestra della figura di interesse ed incollare con Ctrl+V nel file Word), avendo cura che le figure siano copiate quando queste mostrano le caratteristiche di interesse per la verifica del progetto (i.e. Settling Time, Stability Margins, ecc.).

## INTRODUZIONE

Si consideri il circuito elettrico passivo mostrato nella seguente figura:



Indicando con  $x_1, x_2, x_3$  rispettivamente la tensione ai capi del condensatore C1, la tensione ai capi del condensatore C2 e la corrente nell'induttore L, il modello matematico del circuito si può ottenere applicando le leggi di Kirchhoff e le relazioni di base di elementi elettrici passivi, dalle quali derivano le seguenti equazioni differenziali:

$$C_1 \dot{x}_1 = \frac{u - x_1 - x_2}{R_1}$$

$$C_2 \dot{x}_2 = \frac{u - x_1 - x_2}{R_1} - x_3$$

$$L \dot{x}_3 = x_2 - R_2 x_3$$

fissando le ovvie (data la notazione usata nel circuito) scelte per le variabili di stato e ingresso e considerando come uscita  $y = X_3$ .

Si ottiene un corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Con:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

## ESERCIZIO 1.

- a) Dato il modello ottenuto nell'introduzione, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$R_1 = 5; \quad R_2 = 1; \quad C_1 = 0,1; \quad C_2 = 0,2; \quad L = 2;$$

e si ricavi la funzione di trasferimento  $G(s)$  del sistema in esame.

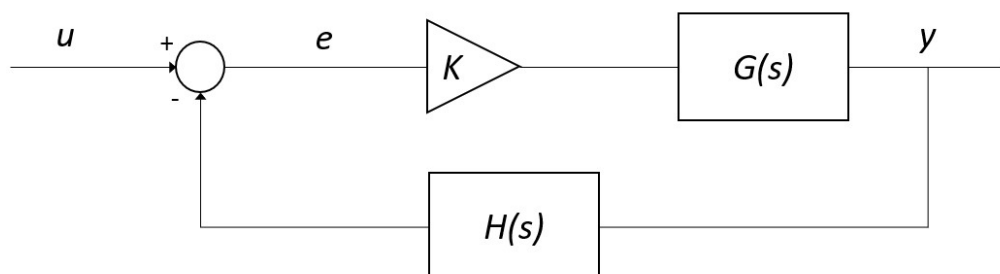
**NOTA:** i test erano proposti allo studente in tre versioni: la presente (1) con  $L = 2$ , una versione (2) con  $L = 0,5$  e una versione (3) con  $L = 10$ .

La soluzione presentata in questo documento farà riferimento solo alla versione (1). Si lascia la verifica delle differenze numeriche nelle versioni (2) e (3) come esercizio per lo studente interessato.

- a) Si determinino i poli della funzione di trasferimento e si verifichi se coincidono con gli autovalori di A. Descrivere il motivo di eventuali discrepanze tramite righe di commento (i.e. precedute dal simbolo %) sul file .m

## ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema in retroazione unitaria rappresentato in figura:



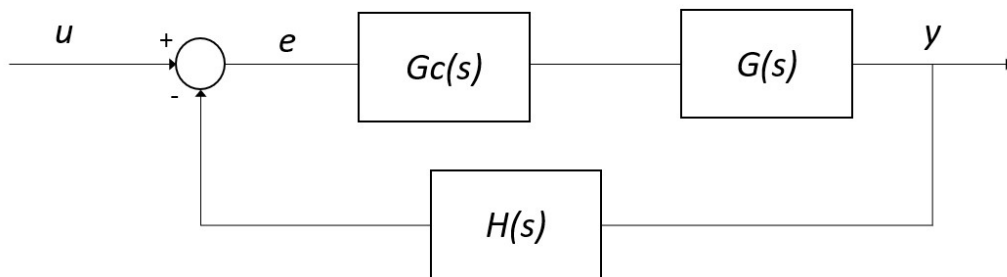
Con  $G(s)$  ricavata al punto a) dell'Esercizio 1 e  $H(s) = \frac{1}{1+\frac{s}{50}}$  funzione di trasferimento associata al sensore per la misura dell'uscita.

- a) Si verifichi se il sistema ad anello chiuso, con guadagno  $K = 1$ , risulti o meno stabile tramite l'analisi della risposta  $y(t)$  al gradino unitario.
- b) Si determini, se esiste, il valore del guadagno  $K_{lim}$  per il quale il sistema risulta semplicemente stabile, utilizzando il grafico del luogo delle radici della funzione  $G(s)$ .

- c) Si ponga  $K_1 = 0.8 K_{lim}$ , si visualizzi l'andamento della risposta al gradino  $y(t)$  del sistema chiuso in retroazione con tale guadagno e si determini il tempo d'assestamento al 5%.

### ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema rappresentato in figura



Con  $G(s)$  e  $H(s)$  come al punto a) dell'Esercizio 2.

- a) Si determinino come possibili funzioni di trasferimento alternative per il controllore  $G_c(s)$  quelle di un regolatore di tipo PD e di uno di tipo PID, considerati entrambi nella formulazione classica e con i parametri  $K_p, T_i, T_d$  tarati secondo il metodo di Ziegler-Nichols basato sull'oscillazione critica ad anello chiuso (vedi tabella allegata).
- b) Si verifichi tramite l'analisi della risposta al gradino del sistema compensato e chiuso in retroazione quale tra i regolatori proposti sia il più efficace in termini di errore a regime, massima sovraelongazione e tempo d'assestamento.

| TIPO | $K_p$     | $T_i$     | $T_d$       |
|------|-----------|-----------|-------------|
| PD   | $0.5 K_0$ | -         | $0.2 T_0$   |
| PID  | $0.6 K_0$ | $0.5 T_0$ | $0.125 T_0$ |

#### NOTA:

$K_0$  = guadagno critico, di fatto corrispondente al guadagno determinato al punto b) dell'Esercizio 2, cioè tale per cui il sistema chiuso in retroazione risulti semplicemente stabile (i.e. con oscillazione persistente della risposta).

$T_0$  = periodo delle oscillazioni della risposta in condizione di stabilità semplice ad anello chiuso.

## SOLUZIONE

```
%% Matrici A,B,C,D
```

```
R1 = 5;
```

```
R2 = 1;
```

```
C1 = 0.1;
```

```
C2 = 0.2;
```

```
L = 2;
```

```
A = [-1/(R1*C1) -1/(R1*C1) 0; -1/(R2*C2) -1/(R2*C2) -  
1/C2; 0 1/L -R2/L]
```

```
B = [1/(R1*C1); 1/(R2*C2); 0]
```

```
C = [0 0 1]
```

```
D = 0
```

```
A =
```

```
   -2.0000   -2.0000         0  
   -5.0000   -5.0000   -5.0000  
         0     0.5000   -0.5000
```

```
B =
```

```
     2  
     5  
     0
```

```
C =
```

```
     0     0     1
```

```
D =
```

```
     0
```

```
%% Esercizio 1 - A funzione di trasferimento
```

```
G = tf(ss(A,B,C,D))
```

```
G =
```

$$\frac{2.5 s + 2.776e-16}{s^3 + 7.5 s^2 + 6 s + 5}$$

Continuous-time transfer function.

`%% Esercizio 1 - B poli e autovalori`

`eg = eig(A)`

`p = pole(G)`

`r = rank((obsv(A,C))')`

`% poli e autovalori coincidono, infatti il sistema è completamente`

`% osservabile (r = 3)`

`eg =`

```
-6.7176 + 0.0000i
-0.3912 + 0.7689i
-0.3912 - 0.7689i
```

`p =`

```
-6.7176 + 0.0000i
-0.3912 + 0.7689i
-0.3912 - 0.7689i
```

`r =`

3

`%% Esercizio 2 - A risposta ad anello chiuso`

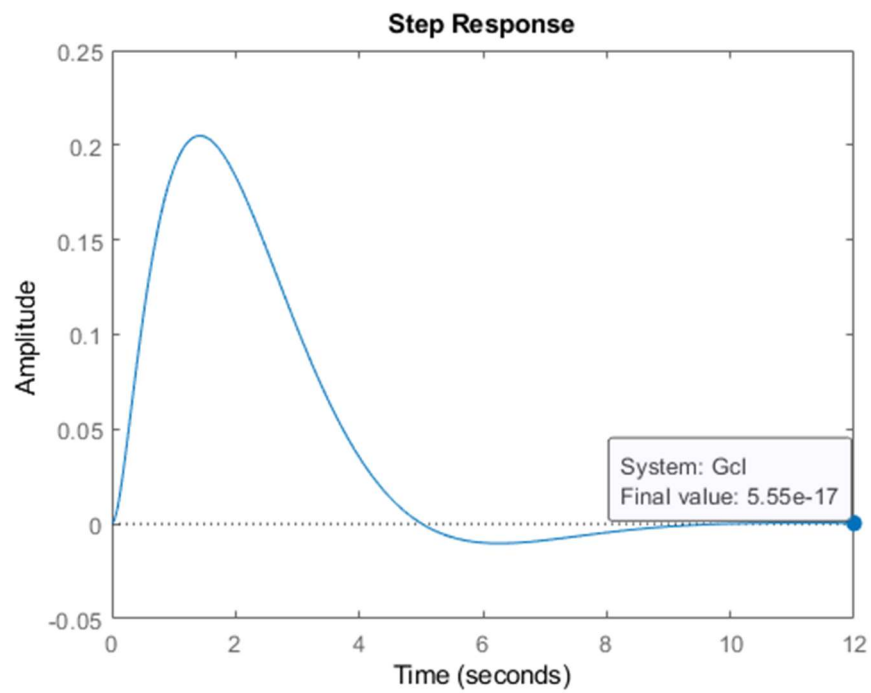
`K = 1;`

`s = tf('s');`

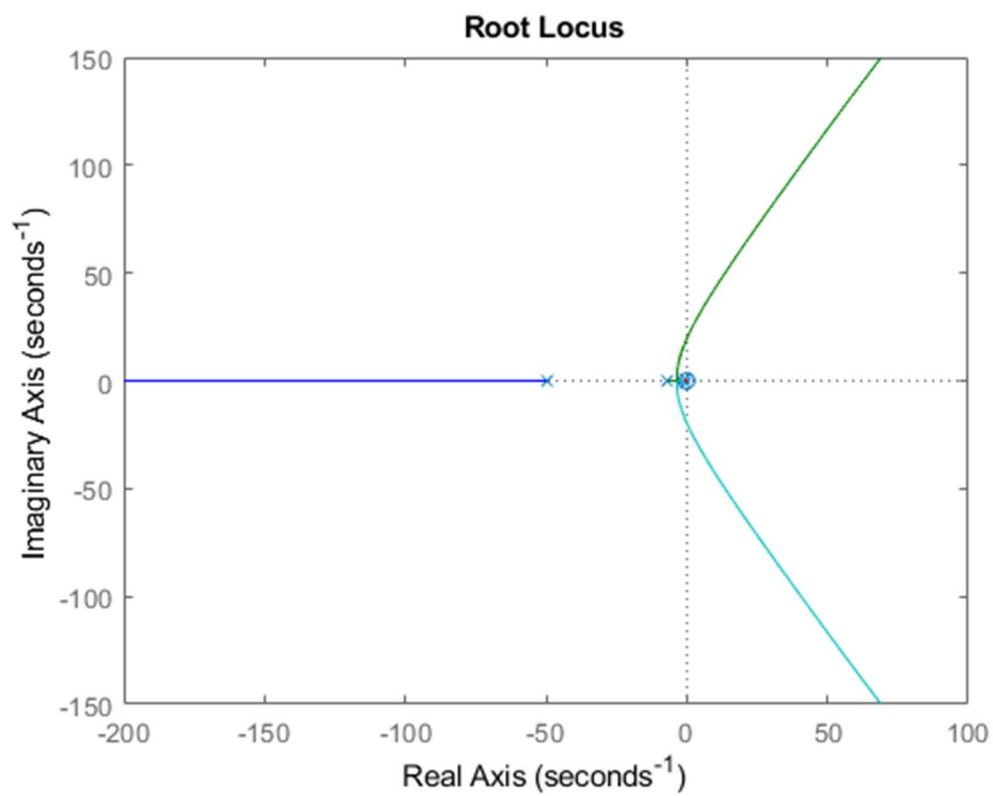
`H = 1/(1+s/50);`

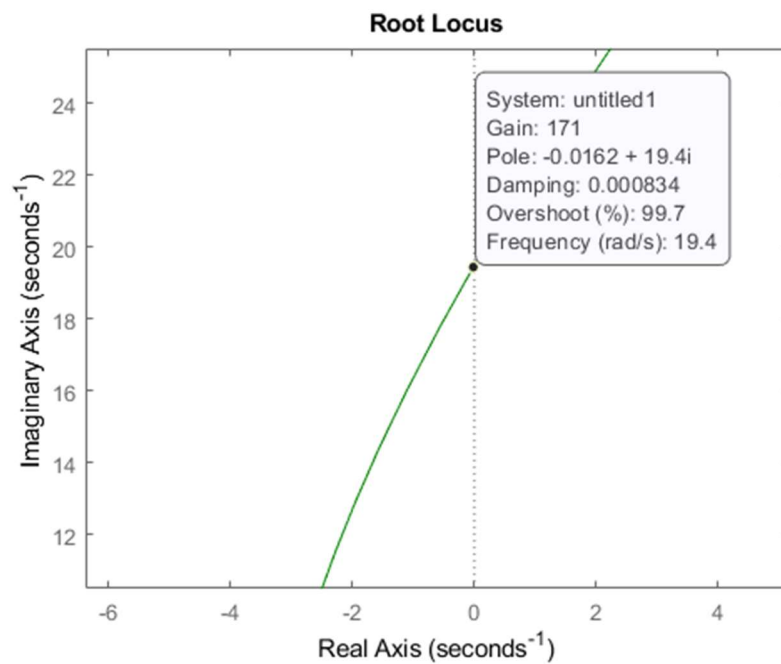
`Gcl = feedback(K*G,H);`

`figure,step(Gcl) % sistema stabile`



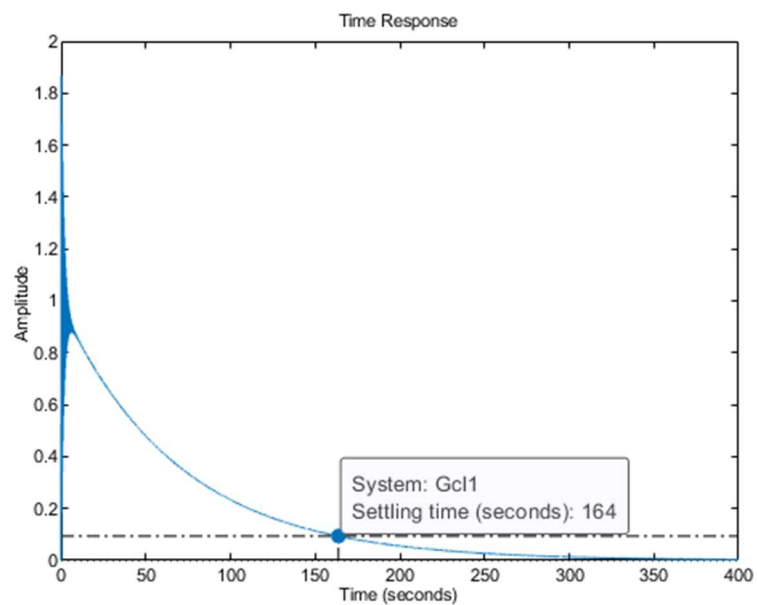
```
%% Esercizio 2 - B guadagno limite
figure,rlocus(G*H)
Klim = 171;
```





`%% Esercizio 2 - C tempo di assestamento`

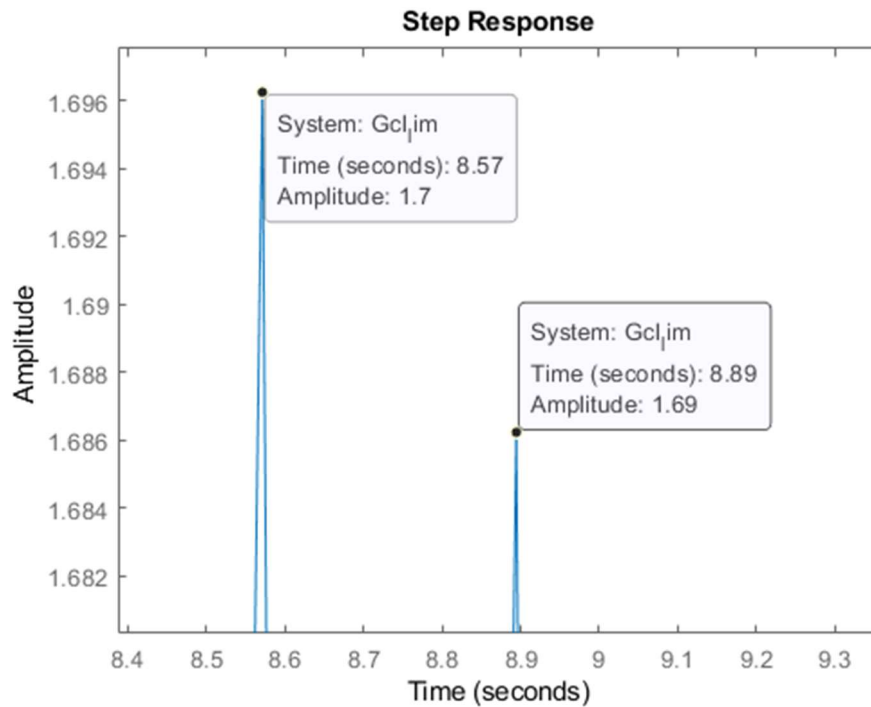
```
Gcl1 = feedback(0.8*Klim*G,H);
popt = timeoptions;
popt.SettleTimeThreshold = 0.05;
figure,step(Gcl1,popt)
```





```
%% ESERCIZIO 3
```

```
Gcl_lim = feedback(Klim*G,H);  
figure,step(Gcl_lim);
```



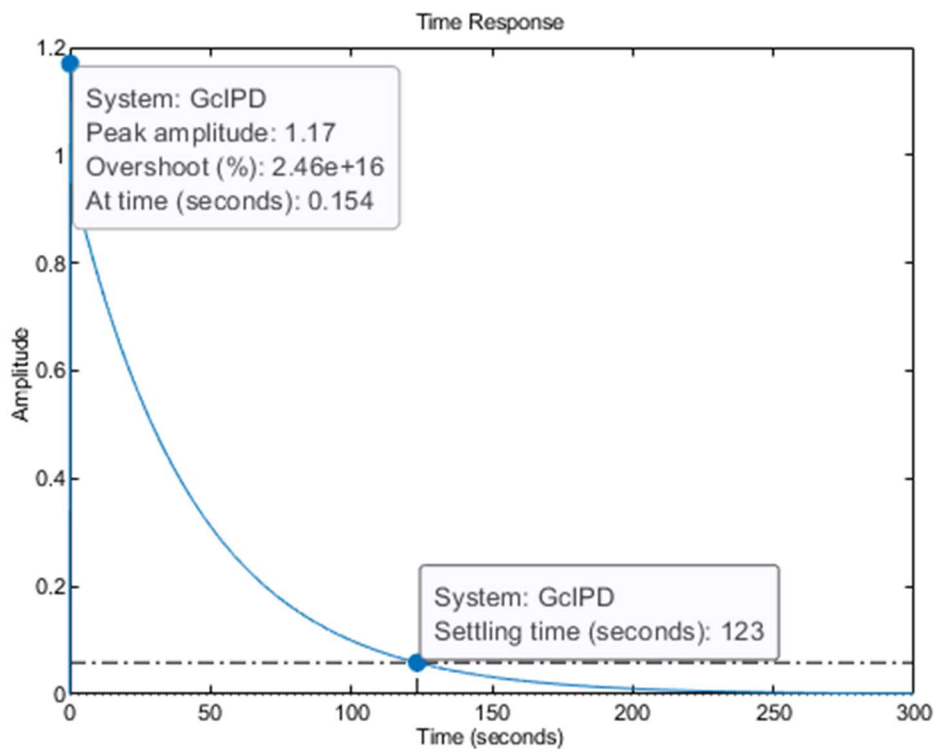
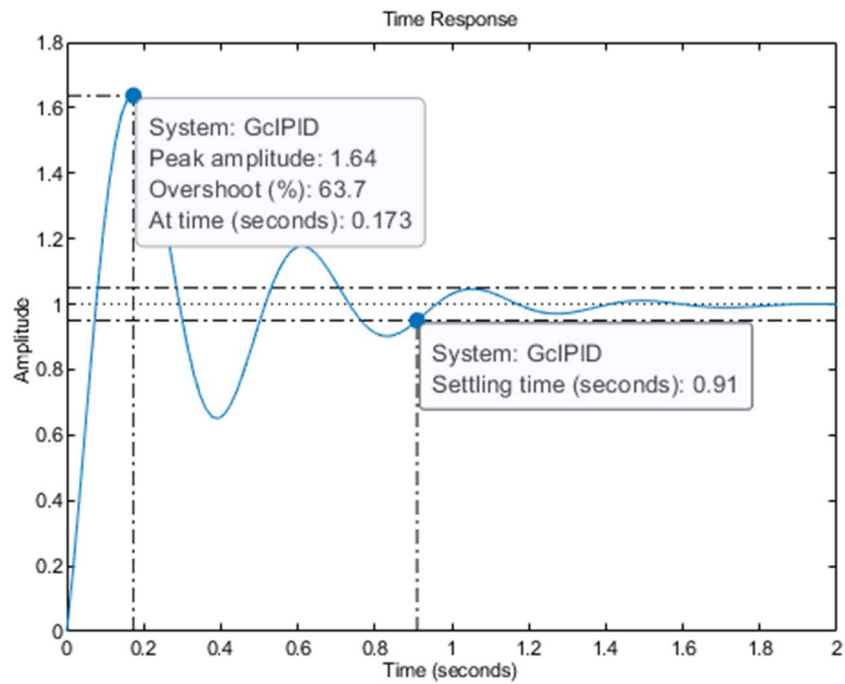
```
T0 = 8.89 - 8.57;
```

```
%% Regolatore PID
```

```
Kp = 0.6*Klim;  
Ti = 0.5*T0;  
Td = 0.125*T0;  
GcPID = Kp*(1+Td*s+1/(Ti*s));  
GclPID = feedback(GcPID*G,H);  
figure,step(GclPID,popt);
```

```
%% Regolatore PD
```

```
Kp = 0.5*Klim;  
Td = 0.2*T0;  
GcPD = Kp*(1+Td*s);  
GclPD = feedback(GcPD*G,H);  
figure,step(GclPD,popt);
```



% il sistema compensato tramite regolatore PD, pur avendo una minor sovraelongazione rispetto al sistema compensato tramite regolatore PID, presenta un errore a regime e un tempo d'assestamento non trascurabili