Filo a tronco di cono

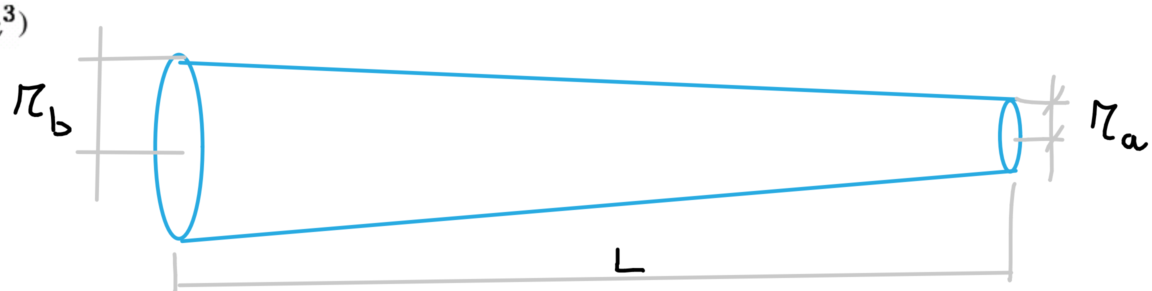
Un filo conduttore di rame di lunghezza l, (ad esempio a causa della corrosione) è ben descritto da un tronco di cono che inizia con una sezione di raggio a e finisce con un raggio b in maniera lineare. Se il filo è percorso da una corrente I. Determinare:

1. Il campo elettrico massimo e minimo nel filo.
2. la resistenza del filo.
3. La massima corrente che può scorrere se la potenza massima dissipabile per unità di volume vale

P_{max}.

(dati del problema $\rho_{Cu} = 1.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot m$, $a = 2\ mm$, $b = 4\ mm$, $I = 10\ A$, $l = 100\ m$, $P_{max} = 1\ W/cm^3$)

Soluzioni



1)

La densità di corrente è massima sulla sezione minore:

$$J_{max} = \frac{I}{\pi a^2} = 8 \cdot 10^5\ A/m^2$$

minima in quella maggiore:

$$J_{min} = \frac{I}{\pi b^2} = 2 \cdot 10^5\ A/m^2$$

Applicando la legge di Ohm in forma locale, di conseguenza il campo elettrico vale:

$$E_{max} = \rho_{Cu} J_{max} = 1.35 \cdot 10^{-2}\ V/m$$

$$E_{min} = \rho_{Cu} J_{min} = 3.5 \cdot 10^{-3}\ V/m$$

2)

Il raggio del filo segue la legge:

$$r = a + (b-a)\frac{x}{l} \qquad 0 < x < l$$

La resistenza vale:

$$R = \int_0^l \rho_{Cu} \frac{dx}{\pi r^2} = \frac{\rho_{Cu}}{\pi} \int_0^l \frac{dx}{\left[a + (b-a)\frac{x}{l}\right]^2}$$

Facendo il cambiamento di variabile:

$$y = a + (b-a)\frac{x}{l}$$

segue che:

$R = \rho \frac{L}{S}$

$$R = \frac{\rho_{Cu} l}{\pi(b-a)} \int_a^b \frac{dy}{y^2} = \frac{\rho_{Cu} l}{\pi ab} = 0.068\Omega$$

3)

Imponendo che:

$$\rho |J_{max}|^2 \leq P_{max}$$

$$|J_{max}| = \sqrt{\frac{P_{max}}{\rho}}$$

Quindi essendo la massima densità di corrente sulla sezione più piccola:

$$I_{max} = |J_{max}|\pi a^2 = \sqrt{\frac{P_{max}}{\rho}}\pi a^2 = 99\ A$$ }}