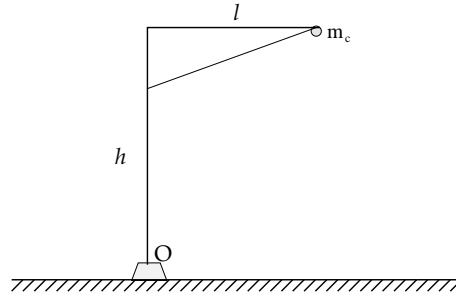


PROBLEMA 2

Una gru di altezza $h = 50$ m ha un braccio orizzontale di lunghezza $l = 15$ m e massa $m_b = 20$ quintali. Tale braccio è sorretto da un sostegno obliquo di massa trascurabile. All'estremità del braccio si trova un carico di massa $m_c = 4$ q. Il tutto è fermo in equilibrio statico.

1. Detto O il punto a terra su cui poggia il piedistallo della gru e detto τ il momento delle forze (rispetto al polo O) esercitato dal piedistallo sulla gru, si calcoli il valore di quest'ultimo.
2. Supponendo che la gru ruoti in modo uniforme attorno al proprio braccio verticale compiendo un giro ogni 3 minuti, si calcoli il valore dell'energia cinetica K totale del sistema gru+carico. Se, durante il moto di rotazione, il carico si sposta lungo il braccio orizzontale fino a raggiungere una distanza pari a $l/3$ dall'asse verticale, dire se si conserva l'energia cinetica del sistema.

Si tratti il braccio orizzontale come una sbarra omogenea, il carico come un punto materiale e si trascuri ogni attrito.



Soluzione.

1. Applichiamo la seconda equazione cardinale della dinamica al sistema gru+carico, prendendo come polo il punto O. Poichè il tutto si trova in equilibrio, il momento risultante delle forze esterne al sistema deve essere nullo. Proiettando i momenti nella direzione perpendicolare al foglio e prendendo come verso positivo quello uscente, si ha:

$$-\frac{l}{2} m_b g - l m_c g + \tau = 0, \quad (1)$$

dove il primo termine è il momento della forza peso del braccio orizzontale, applicata nel suo centro di massa, mentre il secondo termine è il momento della forza peso del carico.

$$\tau = \left(\frac{m_b}{2} + m_c \right) g l = 2.06 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}. \quad (2)$$

2. Detto $I_b = (1/3) m_b l^2$ il momento d'inerzia del braccio orizzontale rispetto a un estremo, detta ω_0 la velocità angolare iniziale, l'energia cinetica totale del sistema vale:

$$K = \frac{1}{2} (I_b + m_c l^2) \omega_0^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{m_b}{3} + m_c \right) (\omega_0 l)^2 = 146.2 \text{ J}, \quad (3)$$

dove abbiamo usato $\omega_0 = 2\pi/T_0$, con $T_0 = 180$ s.

Quando il carico si sposta lungo il braccio, esercita forze interne al sistema. Quindi durante lo spostamento non subentrano forze esterne, quindi a conservarsi è il momento angolare totale. Poichè cambia il momento d'inerzia totale, cambia conseguentemente anche la velocità angolare del sistema, la quale aumenta, dato che il momento d'inerzia diminuisce. Poichè l'energia cinetica può anche essere espressa in termini di momento angolare totale L e momento d'inerzia totale I come

$$K = \frac{L^2}{2I}, \quad (4)$$

al diminuire di I e mantenendosi L costante, segue che K aumenta e quindi non si conserva. L'aumento di energia cinetica riflette il fatto che la gru deve compiere un lavoro per avvicinare il carico all'asse verticale.

C.V.D.