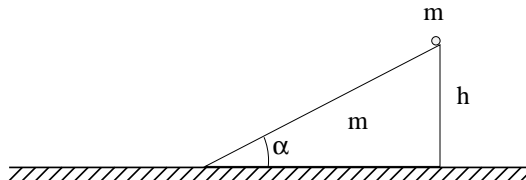


**PROBLEMA 2**

Un piano inclinato di angolo  $\alpha = 30^\circ$ , altezza  $h = 4$  m e massa incognita  $m$  poggia su un piano orizzontale privo di attrito. Sopra il piano inclinato si trova un punto materiale di massa  $m$  inizialmente fermo e ad altezza  $h$ . Il piano inclinato è privo di attrito.

1. Si trovi la velocità  $v$  del punto materiale quando giunge sul piano orizzontale.
2. Si trovi il coefficiente di attrito statico  $f_s$  minimo che il piano orizzontale dovrebbe avere affinché il piano inclinato resti fermo durante il moto di discesa del punto materiale.

Si usi  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ .



**Soluzione.**

1. Poichè sul sistema piano inclinato e punto materiale non agiscono forze esterne orizzontali, la quantità di moto totale lungo tale direzione è conservata. Essendo questa inizialmente nulla, tale rimane per tutto il moto. Quando il punto materiale giunge al livello del piano orizzontale, detta  $v'$  la velocità del piano inclinato vale quindi:

$$0 = m(-v) + m v' \Rightarrow v' = v \quad (1)$$

Quindi il piano inclinato acquista una velocità uguale in modulo e lungo il verso opposto rispetto a quella del punto materiale. A questo punto sfruttiamo la conservazione dell'energia meccanica totale, dato che non agiscono forze dissipative:

$$m g h = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \sqrt{g h} = 6.26 \text{ m/s} = 22.55 \text{ Km/h} \quad (2)$$

2. Supponiamo che a causa dell'attrito statico del piano orizzontale il piano inclinato rimanga fermo durante la discesa del punto materiale. Detta  $N$  la reazione normale esercitata dal piano inclinato sul punto materiale, vale

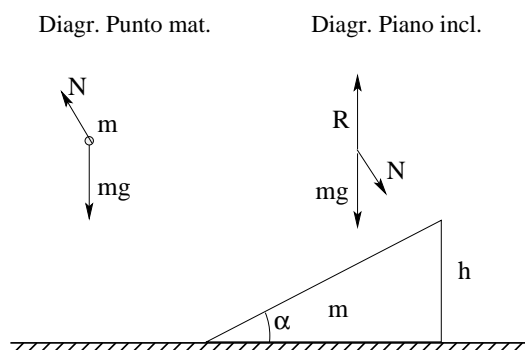
$$N = m g \cos \alpha \quad (3)$$

Per il principio di azione e reazione, il punto materiale esercita una forza uguale e contraria sul piano inclinato, la cui componente orizzontale vale:

$$N \sin \alpha = m g \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} m g \sin 2\alpha \quad (4)$$

La componente verticale della risultante delle forze agenti sul piano inclinato deve essere nulla, essendo che il piano inclinato non si può muovere verticalmente (vedi diagramma di corpo libero del piano inclinato in figura). Detta  $R$  la componente normale della reazione del piano orizzontale sul piano inclinato, si ha

$$R - m g - N \cos \alpha = 0 \Rightarrow R = m g (1 + \cos^2 \alpha) = m g \frac{3 + \cos 2\alpha}{2} \quad (5)$$



La forza massima che l'attrito statico può opporre vale:

$$F_{s,\max} = f_s R = f_s m g \frac{3 + \cos 2\alpha}{2} \quad (6)$$

Affinchè il piano inclinato non si muova,  $F_{s,\max}$  deve essere maggiore o uguale della componente orizzontale della forza agente sul piano inclinato ottenuta nella (4), per cui

$$F_{s,\max} \geq \frac{1}{2} m g \sin 2\alpha \quad (7)$$

ovvero

$$f_s m g \frac{3 + \cos 2\alpha}{2} \geq \frac{1}{2} m g \sin 2\alpha \quad (8)$$

$$f_s \geq f_{s,\min} = \frac{\sin 2\alpha}{3 + \cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{7} = 0.247 \quad (9)$$

C.V.D.