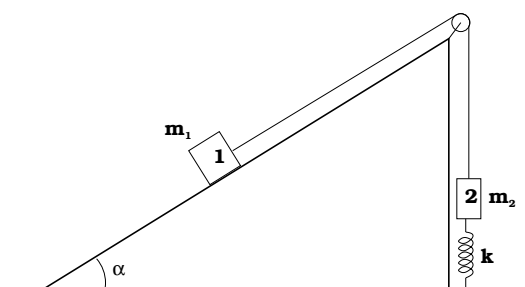


Problema 2

È dato un piano inclinato di un angolo $\alpha = 60^\circ$ senza attrito con due corpi di massa $m_1 = 7 \text{ Kg}$ e $m_2 = 3 \text{ Kg}$ e legati tramite una fune inestensibile e di massa trascurabile (v. figura). Inoltre, il corpo 2 è vincolato verticalmente al suolo da una molla elastica di costante $k = 8 \text{ N/m}$. Indicando con z l'altezza dal suolo del corpo 2, si calcolino i seguenti:

1. l'altezza z_0 del corpo 2 tale che il sistema è in equilibrio statico;
2. l'accelerazione istantanea a che i due corpi hanno quando vale $z = z_1 = 1 \text{ m}$;
3. supponendo che all'inizio sia $z = 0 \text{ m}$ (ovvero il corpo 2 sia inizialmente appoggiato al terreno) e che i due corpi abbiano velocità iniziale nulla, se ne calcoli la velocità quando $z = z_f = 2 \text{ m}$. (Sugg.: si usi la conservazione dell'energia meccanica totale).

Si usi $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.



Soluzione.

1. Applichiamo la seconda legge della dinamica ad entrambi i corpi, imponendo che la risultante su ciascun corpo sia nulla:

$$\begin{cases} m_1 g \sin \alpha - T = 0 \\ T - m_2 g - k z_0 = 0 \end{cases}$$

da cui, sommando membro a membro, si ricava z_0 :

$$z_0 = \frac{(m_1 \sin \alpha - m_2) g}{k} \simeq 3.755 \text{ m}$$

2. Riscriviamo la seconda legge della dinamica per i due corpi nel caso generale di accelerazione a non nulla, per una data altezza z_1 :

$$\begin{cases} m_1 g \sin \alpha - T = m_1 a \\ T - m_2 g - k z_1 = m_2 a \end{cases}$$

Ancora una volta sommiamo membro a membro ed esprimiamo l'accelerazione a :

$$a = \frac{(m_1 \sin \alpha - m_2) g - k z_1}{m_1 + m_2} \simeq 2.204 \text{ m/s}^2$$

3. Indichiamo con h_i e h_f l'altezza iniziale e finale del corpo 1, rispettivamente. Sia v_f la velocità finale posseduta dai due corpi quando $z = z_f$. Poichè siamo in presenza

di sole forze conservative, applichiamo la conservazione dell'energia meccanica totale all'inizio e alla fine. Si noti che, oltre all'energia potenziale gravitazionale dei due corpi, c'è anche quella elastica della molla. All'inizio l'energia è tutta potenziale (i corpi sono fermi):

$$m_1 g h_i = m_1 g h_f + m_2 g z_f + \frac{1}{2} k z_f^2 + \frac{1}{2} m_1 v_f^2 + \frac{1}{2} m_2 v_f^2$$

$$m_1 g (h_i - h_f) = m_2 g z_f + \frac{1}{2} k z_f^2 + \frac{1}{2} m_1 v_f^2 + \frac{1}{2} m_2 v_f^2$$

Il termine $(h_i - h_f)$ è la variazione di altezza del corpo 1: per l'inestensibilità della fune, questa è legata alla variazione di altezza del corpo 2, z_f , tramite la seguente:

$$h_i - h_f = z_f \sin \alpha$$

Sostituendo questa nell'espressione di sopra, risolviamo in funzione della quantità cercata v_f :

$$v_f = \sqrt{\frac{2(m_1 \sin \alpha - m_2) g z_f - k z_f^2}{m_1 + m_2}} \simeq 2.97 \text{ m/s}$$

N.B.

Si faccia attenzione: il moto non è uniformemente accelerato a causa della presenza della forza elastica, la quale aumenta proporzionalmente all'altezza del corpo 2, così che l'accelerazione non è costante. Quindi è sbagliato applicare la cinematica del moto uniformemente accelerato in questo caso.

C.V.D.