Calcolo Vettoriale

Fisica I - Lezione 01

Cristiano Guidorzi
Dipartimento di Fisica
Universitá di Ferrara

guidorzi@fe.infn.it

http://www.fe.infn.it/∼guidorzi/

21 Novembre 2002

Definizioni e Notazioni

Vettore unitario (versore): $\hat{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, $\quad |\hat{u}| = 1$.

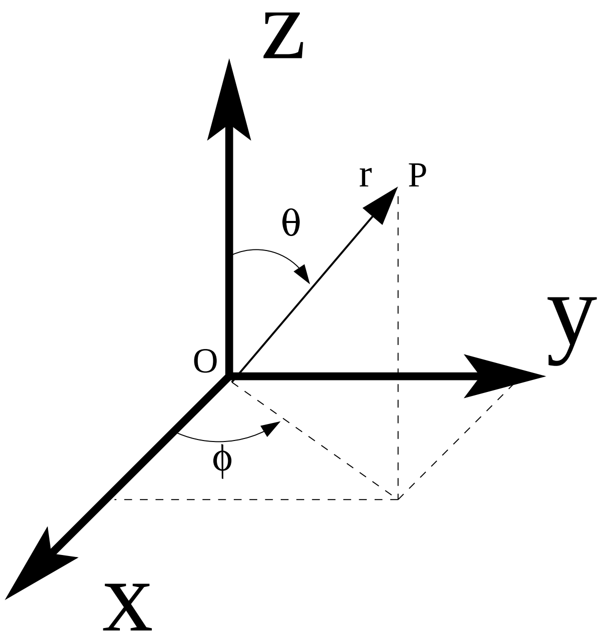
Versori associati ad assi cartesiani: $(X, Y, Z) \longrightarrow (\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$.

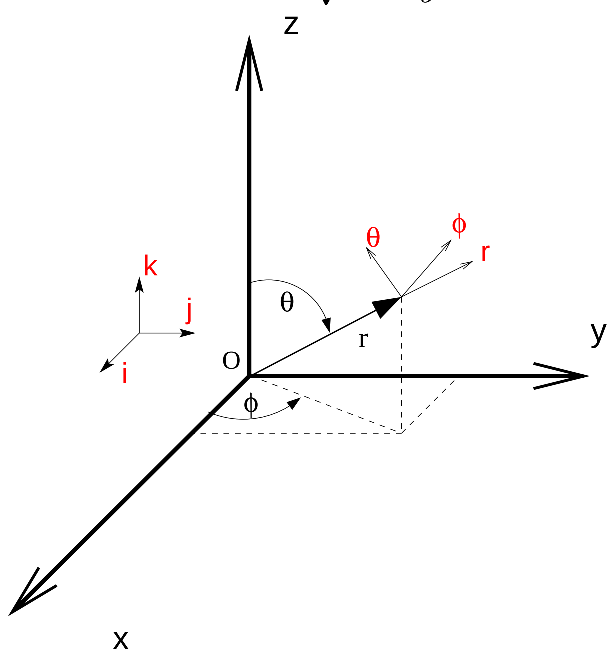
Componenti cartesiane: $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$

$r = |\vec{r}|$

Componenti sferiche (polari): $\vec{r} = r\hat{r}$

$$\begin{cases} x = & r\sin\theta\ \cos\phi \\ y = & r\sin\theta\ \sin\phi \\ z = & r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = & \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = & \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\ \phi = & \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \phi = & \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{cases}$$





Relazioni tra versori cartesiani e polari $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}) \leftrightarrow (\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$:

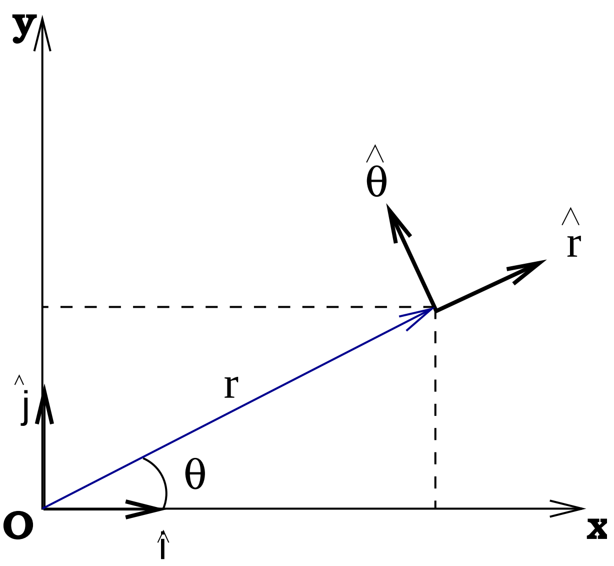
$$\begin{cases} \hat{r} = & \sin\theta\cos\phi\,\hat{\imath} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k} \\ \hat{\phi} = & -\sin\phi\,\hat{\imath} + \cos\phi\,\hat{\jmath} \\ \hat{\theta} = & -\cos\theta\cos\phi\,\hat{\imath} - \cos\theta\sin\phi\,\hat{\jmath} + \sin\theta\,\hat{k} \end{cases}$$

Altra notazione: $\vec{r} = P - O = \overrightarrow{OP}$ $(P = O + \vec{r})$.

Spazio a 2 dimensioni

Versori associati ad assi cartesiani: $(X, Y) \longrightarrow (\hat{i}, \hat{j})$.
Versori associati ad assi polari: $(r, \theta) \longrightarrow (\hat{r}, \hat{\theta})$.
Componenti cartesiane: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$
$r = |\vec{r}|$
Componenti polari: $\vec{r} = r\hat{r}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = & r\cos\theta \\ y = & r\sin\theta \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} r = & \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = & \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \theta = & \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{array} \right.$$

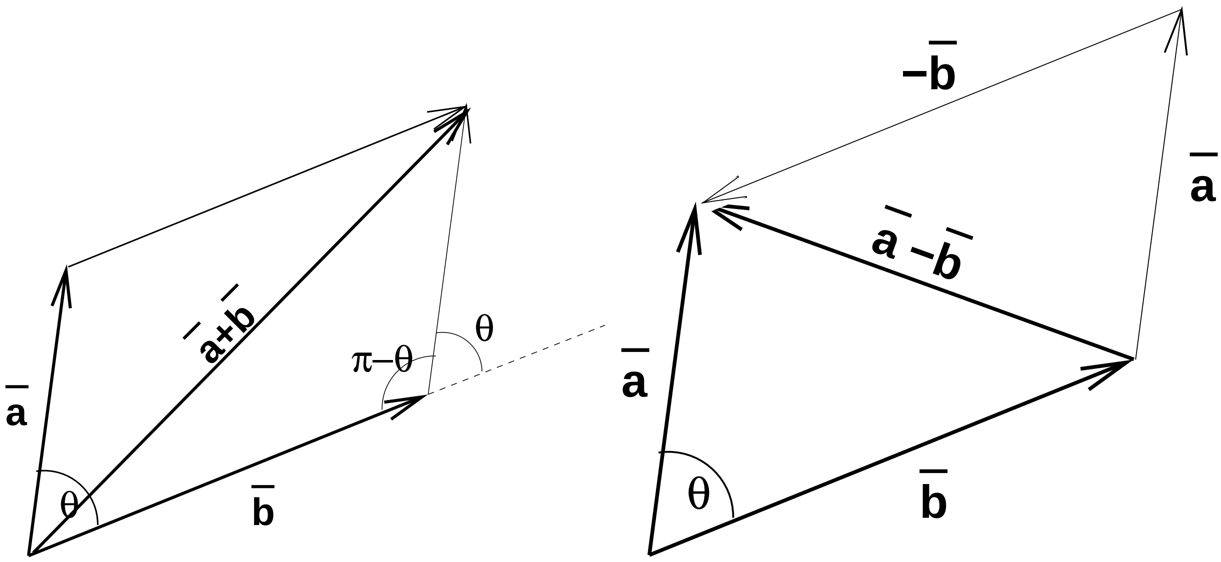


Relazioni tra versori cartesiani e polari $(\hat{i}, \hat{j}) \leftrightarrow (\hat{r}, \hat{\theta})$:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \hat{r} = & \cos\theta\,\hat{i} & +\sin\theta\,\hat{j} \\ \hat{\theta} = & -\sin\theta\,\hat{i} & +\cos\theta\,\hat{j} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{lll} \hat{i} = & \cos\theta\,\hat{r} & -\sin\theta\,\hat{\theta} \\ \hat{j} = & \sin\theta\,\hat{r} & +\cos\theta\,\hat{\theta} \end{array} \right.$$

Operazioni tra Vettori

- Trasporto parallelo per confrontare 2 vettori.
- Somma: regola del parallelogramma.
  - $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (prop. commutativa)
  - $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (prop. associativa)
  - $k(\vec{a}+\vec{b})=k\,\vec{a}+k\,\vec{b}$ (prop. distributiva)
  - $|\vec{a}\pm\vec{b}|^2=a^2+b^2\pm 2\,a\,b\,\cos\theta$ (teor. Carnot)



Attraverso le coordinate cartesiane:

$$\vec{a}=a_x\,\hat{i}+a_y\,\hat{j}+a_z\,\hat{k}$$
$$\vec{b}=b_x\,\hat{i}+b_y\,\hat{j}+b_z\,\hat{k}$$

$$k\,\vec{a}=(k\,a_x)\,\hat{i}+(k\,a_y)\,\hat{j}+(k\,a_z)\,\hat{k}$$
$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x)\,\hat{i}+(a_y\pm b_y)\,\hat{j}+(a_z\pm b_z)\,\hat{k}$$

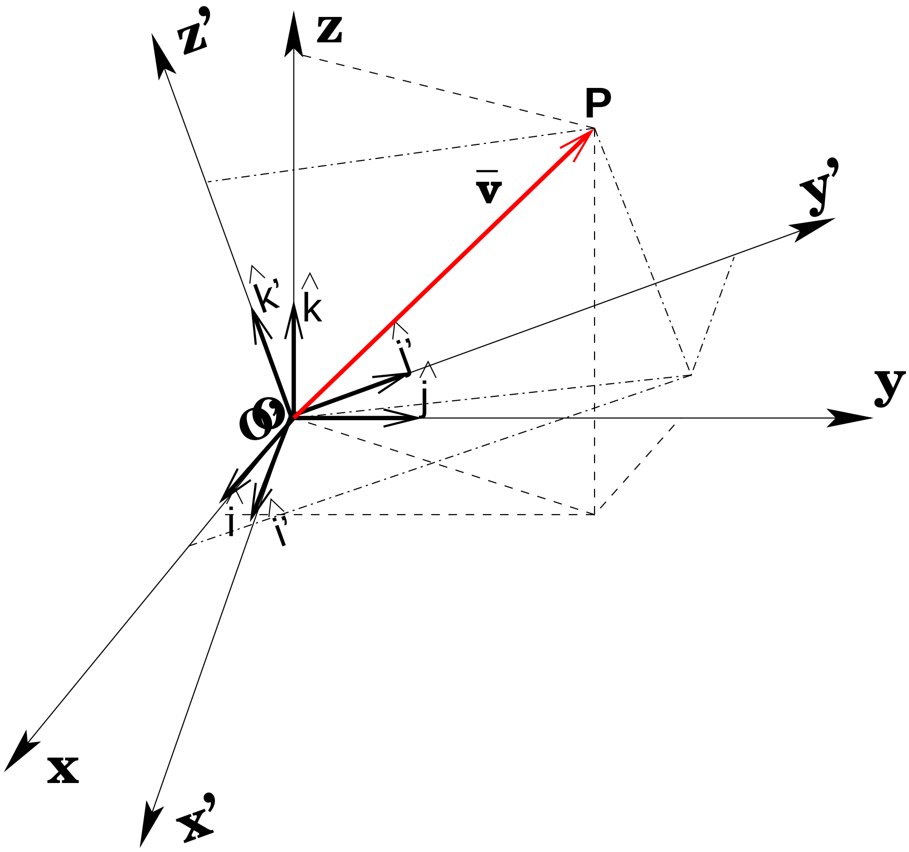
Sistemi di riferimento

Il vettore, come entitá geometrica, non cambia rispetto a diversi sistemi di riferimento. Ció che cambia sono i versori e, conseguentemente, le componenti del vettore su di essi:

$$\vec{v} = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j} + v_z\,\hat{k} = v'_x\,\hat{i}' + v'_y\,\hat{j}' + v'_z\,\hat{k}'$$

Un invariante notevole é dato dal modulo del vettore $|\vec{v}|$:

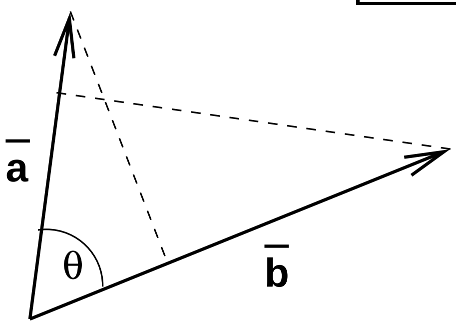
$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2}$$



Prodotto scalare

Prodotto scalare (o prodotto interno) é uno **scalare**:

$$\boxed{c = \vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b\, \cos\theta}$$



dove θ é l'angolo compreso fra i 2 vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Il prodotto scalare corrisponde anche al prodotto del modulo di un vettore per la proiezione dell'altro vettore sul primo.

Alcune proprietá notevoli e casi particolari:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (prop. commutativa)
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = a\, a\, \cos 0 = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$
- 2 vettori le cui direzioni formano un angolo retto si dicono normali. Il prodotto di 2 vettori normali é nullo: $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b\, \cos\pi/2 = 0$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (prop. distributiva)
- I versori di una terna cartesiana sono a due a due normali:

$$\begin{cases} \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0 \end{cases}$$

- In funzione delle componenti dei due vettori:

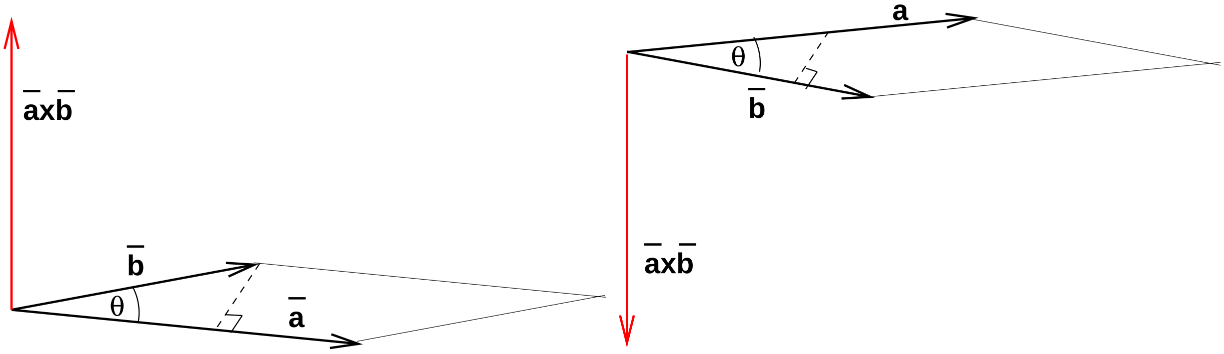
$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x\, \hat{i} + a_y\, \hat{j} + a_z\, \hat{k}) \cdot (b_x\, \hat{i} + b_y\, \hat{j} + b_z\, \hat{k}) \\ &= a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z \end{aligned}$$

Prodotto vettoriale

Prodotto scalare (o prodotto esterno) é un **vettore**:

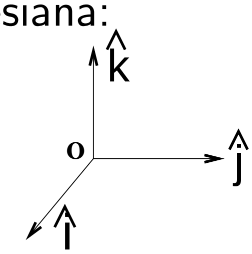
$$\boxed{\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \hat{c}\; a\, b\, \sin\theta}$$

dove $\hat{c}$, versore del vettore $\vec{c}$, ha direzione normale al piano individuato dai due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e verso dato dalla regola della mano destra. [1]
Altra notazione usata: $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.



dove θ é l'angolo compreso fra i 2 vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Il prodotto vettoriale é un vettore il cui modulo é uguale all'area del parallelogramma individuato dai 2 vettori.
Alcune proprietá notevoli e casi particolari:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (prop. anticommutativa)
- $|\vec{a} \times \vec{a}| = a\, a\, \sin 0 = 0$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (prop. distributiva)
- Prodotti vettoriali tra versori di una terna cartesiana:



$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \hat{\imath} \times \hat{\jmath} & = & \hat{k} & = & -\hat{\jmath} \times \hat{\imath} \\ \hat{\imath} \times \hat{k} & = & -\hat{\jmath} & = & -\hat{k} \times \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \times \hat{k} & = & \hat{\imath} & = & -\hat{k} \times \hat{\jmath} \end{array} \right.$$

[1] Se il pollice corrisponde al vettore $\vec{a}$ e l'indice al vettore $\vec{b}$, allora $\vec{c}$ punta secondo il verso positivo del dito medio.

- In funzione delle componenti dei due vettori:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y\, b_z - a_z\, b_y)\, \hat{i} +$$

$$+(a_z\, b_x - a_x\, b_z)\, \hat{j} + (a_x\, b_y - a_y\, b_x)\, \hat{k}$$

- Prodotto misto (Triplo prodotto scalare) (univocamente definito anche senza parentesi):

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \times \vec{a} \cdot \vec{b}$$

  Il suo significato geometrico é dato dal volume del parallelepipedo individuato dai tre vettori $\Rightarrow$ se tutti e tre giacciono sullo stesso piano, il prodotto misto é nullo.

- Triplo prodotto vettoriale:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\, \vec{c}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\, \vec{a}$$

$$\Rightarrow \; (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \qquad !!$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} \quad = 0$$

Coseni direttori

Data una terna cartesiana di versori $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ e un vettore $\vec{v}$ con il suo versore $\hat{u} = \vec{v}/|\vec{v}|$, si definiscono i seguenti coseni direttori del vettore dato:

$$\begin{cases} \cos(\hat{u}, \hat{\imath}) = (\hat{u} \cdot \hat{\imath}) = u_x \\ \cos(\hat{u}, \hat{\jmath}) = (\hat{u} \cdot \hat{\jmath}) = u_y \\ \cos(\hat{u}, \hat{k}) = (\hat{u} \cdot \hat{k}) = u_z \end{cases}$$

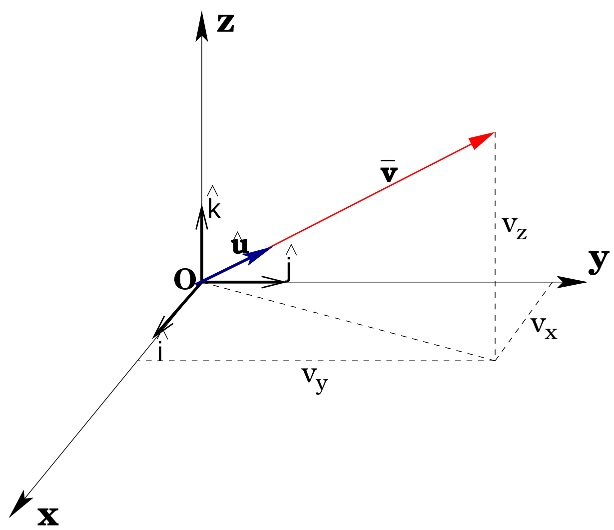
I tre coseni direttori soddisfano la seguente relazione: $\cos^2(\hat{u}, \hat{\imath}) + \cos^2(\hat{u}, \hat{\jmath}) + \cos^2(\hat{u}, \hat{k}) = u^2 = 1.$
Poiché, in generale, ogni vettore $\vec{v}$ si puó scrivere come:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k} \\ &= (\vec{v} \cdot \hat{\imath})\,\hat{\imath} + (\vec{v} \cdot \hat{\jmath})\,\hat{\jmath} + (\vec{v} \cdot \hat{k})\,\hat{k} \end{aligned}$$

seguono, in particolare, le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \hat{u} &= (\hat{u} \cdot \hat{\imath})\,\hat{\imath} + (\hat{u} \cdot \hat{\jmath})\,\hat{\jmath} + (\hat{u} \cdot \hat{k})\,\hat{k} \\ &= \cos(\hat{u}, \hat{\imath})\,\hat{\imath} + \cos(\hat{u}, \hat{\jmath})\,\hat{\jmath} + \cos(\hat{u}, \hat{k})\,\hat{k} \end{aligned}$$

$$\vec{v} = v\big[\cos(\hat{u}, \hat{\imath})\,\hat{\imath} + \cos(\hat{u}, \hat{\jmath})\,\hat{\jmath} + \cos(\hat{u}, \hat{k})\,\hat{k}\big]$$



Vettori variabili nel tempo

Sia $\vec{v} = \vec{v}(t)$ una funzione della variabile tempo t. Allora si definisce la derivata temporale del vettore come segue:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Dalla definizione, segue:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v_x\,\hat{i})}{dt} + \frac{d(v_y\,\hat{j})}{dt} + \frac{d(v_z\,\hat{k})}{dt}$$

Se la terna cartesiana é fissa nel tempo ($\frac{d\hat{i}}{dt} = \frac{d\hat{j}}{dt} = \frac{d\hat{k}}{dt} = 0$), segue:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\,\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\,\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\,\hat{k}$$

Valgono le usuali regole di derivazione:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\vec{v_1} + \vec{v_2}) &= \frac{d\vec{v_1}}{dt} + \frac{d\vec{v_2}}{dt} \\
\frac{d}{dt}(v\,\hat{u}) &= \frac{dv}{dt}\,\hat{u} + v\,\frac{d\hat{u}}{dt} \\
\frac{d}{dt}(\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}) &= \frac{d\vec{v_1}}{dt} \cdot \vec{v_2} + \vec{v_1} \cdot \frac{d\vec{v_2}}{dt} \\
\frac{d}{dt}(\vec{v_1} \times \vec{v_2}) &= \frac{d\vec{v_1}}{dt} \times \vec{v_2} + \vec{v_1} \times \frac{d\vec{v_2}}{dt}
\end{aligned}$$

Caso notevole: vettore di <u>modulo costante</u>:

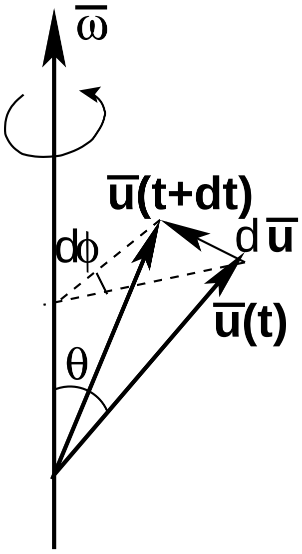
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = v\,\frac{d\hat{u}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\,\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v^2)}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Poiché un versore ha modulo costante per definizione, segue che ogni versore variabile nel tempo é normale alla propria derivata.

Derivata di un versore

Sia dato un asse di rotazione istantaneo al tempo t, individuato dal vettore velocitá angolare $\vec{\omega}$ cosí definito:
modulo $= \omega = d\phi/dt$ (velocitá angolare istantanea);
direzione = asse di rotazione;
verso = positivo (secondo la regola mano destra).



Sia θ l'angolo tra il versore $\hat{u}$ e l'asse di rotazione; in quell'istante, θ é costante ($\dot{\theta} = 0$). Nel tempo dt, la variazione $d\hat{u} = \hat{u}(t + dt) - \hat{u}(t)$ é normale sia al versore $\hat{u}(t)$ che al vettore $\vec{\omega}$: quindi, la direzione del vettore $d\hat{u}$ é data dal vettore $\vec{\omega} \times \hat{u}$. Detta r la proiezione del versore $\hat{u}(t)$ sul piano normale all'asse di rotazione, il modulo di $d\hat{u}$ risulta:

$$|d\hat{u}| = r\, d\phi = \sin\theta\, d\phi = \sin\theta\, \omega\, dt = |\vec{\omega} \times \hat{u}|\, dt$$

da cui segue:

$$\boxed{\frac{d\hat{u}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{u}}$$