Sintesi di reti combinatorie

Funzioni ⇒ Espressioni

M. Favalli

Engineering Department in Ferrara

Sommario

Motivazioni

- Si deve trovare una metodologia in grado di ottenere un espressione equivalente a una funzione di partenza
- Il numero di tali espressioni é peró infinito
- Si puó utilizzare come punto di partenza una forma canonica, ovvero un espressione che data la funzione é unica
- Questa espressione é poi il punto di partenza per possibili strategie di ottimizzazione che data una specifica (costo....) sfruttano le proprietá dell'algebra di commutazione per ottenere un espressione migliore di quella di partenza
- Le forme canoniche sono utili anche per la verifica

Sommario

Definizioni

Si definisce cofattore rispetto a una variabile x_i in forma vera, la valutazione della funzione con $x_i = 1$

$$f|_{x_i=1} = f(x_1, x_2, ..., 1, ..., x_n)$$

Si definisce cofattore rispetto a una variabile x_i in forma negata, la valutazione della funzione con $x_i = 0$

$$f|_{x_i=0} = f(x_1, x_2, ..., 0, ..., x_n)$$

Esempio di cofattori

- La funzione $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2' + x_3 x_4 + x_3' x_1$ ha i cofattori
  - $f|_{x_3=1} = x_1 x_2' + x_4$
  - $f|_{x_3=0} = x_1 x_2' + x_1 = x_1$
- Cosa significa se $f|_{x_i=0} = 0$ o $f|_{x_i=1} = 0$?
- Cosa significa se $f|_{x_i=0} = f|_{x_i=1}$?
- Si calcolino i cofattori di: $x_1 x_2 + (x_3 + x_4)'$

Teorema di espansione

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) &= x_i' f|_{x_i=0} + x_i f|_{x_i=1} = \\ & x_i' f(x_1, x_2, ..., 0, ..., x_n) + x_i f(x_1, x_2, ..., 1, ..., x_n) \end{aligned} \quad (1)$$

Dimostrazione

i. Funzioni costanti
ii. Funzioni proiezione
iii. Funzioni composte ottenute utilizzando gli operatori dell'algebra di commutazione ($f \cdot g$, $f + g$, f')

Espressione del teorema di espansione come prodotto di somme

Vale l'espressione duale:

$$f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) = (x_i + f|_{x_i=0})(x_i' + f|_{x_i=1}) \quad (2)$$

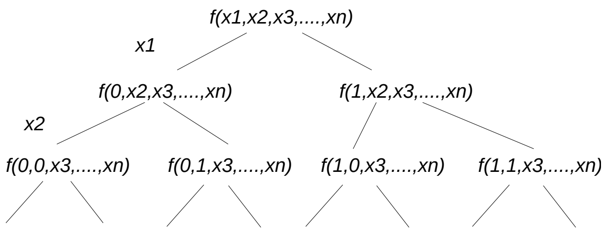
Infatti

Verifica

$$\begin{aligned} &(x_i + f|_{x_i=0})(x_i' + f|_{x_i=1}) = \\ &\quad x_i x_i' + x_i f|_{x_i=1} + f|_{x_i=0} x_i' + f|_{x_i=0} f|_{x_i=1} = x_i f|_{x_i=1} + f|_{x_i=0} x_i' \end{aligned}$$

Rappresentazione grafica

Il processo di escpansione con il teorema di Shannon puó essere rappresentato graficamente come un albero binario



Esempi

Sommario

1 Teorema di espansione di Shannon (Boole)

2 Forme canoniche

3 Metriche per il costo di una rete

4 Forme normali

Applicazione iterativa

Il teorema di espansione puó essere applicato iterativamente ai cofattori

Esempio ($n = 3$)

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, x_3) = x_1' f(0, x_2, x_3) + x_1 f(1, x_2, x_3) = \\
& x_1'(x_2' f(0, 0, x_3) + x_2 f(0, 1, x_3)) + x_1(x_2' f(1, 0, x_3) + x_2 f(1, 1, x_3)) = \\
& x_1' x_2'(x_3' f(0, 0, 0) + x_3 f(0, 0, 1)) + x_1' x_2(x_3' f(0, 1, 0) + x_3 f(0, 1, 1)) + \\
& x_1 x_2'(x_3' f(1, 0, 0) + x_3 f(1, 0, 1)) + x_1 x_2(x_3' f(1, 1, 0) + x_3 f(1, 1, 1)) = \\
& x_1' x_2' x_3' f(0, 0, 0) + x_1' x_2' x_3 f(0, 0, 1) + x_1' x_2 x_3' f(0, 1, 0) + x_1' x_2 x_3 f(0, 1, 1) + \\
& x_1 x_2' x_3' f(1, 0, 0) + x_1 x_2' x_3 f(1, 0, 1) + x_1 x_2 x_3' f(1, 1, 0) + x_1 x_2 x_3 f(1, 1, 1)
\end{aligned}
$$

Prima forma canonica

É ottenuta dall'applicazione iterattiva del teorema di Shannon

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, ..., x_n) &= x_1' x_2' .... x_n' f(0, 0, ..., 0) + \\
& \quad x_1' x_2' .... x_n f(0, 0, ..., 1) + \\
& \quad .... \\
& \quad x_1 x_2 .... x_n f(1, 1, ..., 1)
\end{aligned}
$$

Mintermini

- Si definiscono discriminanti i termini del tipo $f(0, 0, ..., 0), ..., f(1, 1, ..., 1)$
- I discriminanti corrispondono alle righe della tabella di veritá
- I termini prodotto contenenti discriminanti nulli possono essere eliminati dall'espressione precedente
- Si definiscono *mintermini*, quei termini prodotto in cui compaiono n variabili (in forma vera o complementata) che corrispondono a discriminanti non nulli
- Un mintermine é legato a una riga della tabella di veritá in quanto esso vale 1 solo se le variabili di ingresso hanno un valore corrispondente a quello indicato nella riga della tabella di veritá

Esempio

$x_1 x_2 x_3$	f (discr.)	termine prodotto	
000	0	$x_1' x_2' x_3'$	
001	0	$x_1' x_2' x_3$	
010	1	$x_1' x_2 x_3'$	mintermine
011	1	$x_1' x_2 x_3$	mintermine
100	0	$x_1 x_2' x_3'$	
101	1	$x_1 x_2' x_3$	mintermine
110	1	$x_1 x_2 x_3'$	mintermine
111	0	$x_1 x_2 x_3$	

Forma canonica SP

Si definisce forma canonica di tipo somma di prodotti (SP o SOP) la disgiunzione (somma) di tutti i mintermini della funzione

Nell'esempio precedente si ha:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1' x_2 x_3' + x_1' x_2 x_3 + x_1 x_2' x_3 + x_1 x_2 x_3'$$

Quindi si ha finalmente un espressione per f!!!!

Sommario

Una funzione di n variabili puó quindi essere descritta in funzione dei suoi valori per ogni configurazione delle variabili

$$f = \sum_{i=0}^{2^n-1} p_i f(i)$$

- i é un indice che corrisponde al numero naturale codificato da una configurazione degli ingressi - es. $x_1, x_2, x_3 = 100 \rightarrow i = 4$
- p_i é il termine prodotto corrispondente a i (es. $p_4 = x_1 x_2' x_3'$)

Nella forma canonica SP, si ha:

$$f = \sum_{\forall i \mid f(i)=1} m_i$$

- m_i é l'i-mo mintermine

Seconda forma canonica

Anche l'espressione duale del teorema di Shannon puó essere applicata in maniera iterattiva

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + f(0,x_2,x_3))(x_1' + f(1,x_2,x_3)) =$$
$$(x_1+(x_2+f(0,0,x_3))(x_2'+f(0,1,x_3)))(x_1'+(x_2+f(1,0,x_3))(x_2'+f(1,1,x_3))$$
$$(x_1 + (x_2 + (x_3 + f(0,0,0))(x_3' + f(0,0,1)))) \cdot$$
$$(x_1 + (x_2' + (x_3 + f(0,1,0))(x_3' + f(0,1,1)))) \cdot$$
$$(x_1' + (x_2 + (x_3 + f(1,0,0))(x_3' + f(1,0,1)))) \cdot$$
$$(x_1' + (x_2' + (x_3 + f(1,1,0))(x_3' + f(1,1,1)))) =$$
$$(x_1+x_2+x_3+f(0,0,0))(x_1+x_2+x_3'+f(0,0,1)) \cdot$$
$$(x_1+x_2'+x_3+f(0,1,0))(x_1+x_2'+x_3'+f(0,1,1)) \cdot$$
$$(x_1'+x_2+x_3+f(1,0,0))(x_1'+x_2+x_3'+f(1,0,1)) \cdot$$
$$(x_1'+x_2'+x_3+f(1,1,0))(x_1'+x_2'+x_3'+f(1,1,1)) \cdot$$

Seconda forma canonica

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) &= (x_1 + x_2 + ... + x_n + f(0,0,....,0)) \cdot \\ &\quad (x_1 + x_2 + ... + x_n' + f(0,0,....,1)) \cdot \\ &\quad .... \\ &\quad (x_1' + x_2' + ... + x_n' + f(1,1,....,1)) \end{aligned}$$

Attenzione: la seconda forma canonica non si ottiene complementando la prima

Maxtermini

- I termini somma contenenti discriminanti $= 1$ possono essere eliminati dall'espressione precedente
- Si definiscono *maxtermini*, quei termini somma in cui compaiono n variabili (in forma vera o complementata) che corrispondono a discriminanti nulli
- Un maxtermine é legato a una riga della tabella di veritá in quanto esso vale 0 solo se le variabili di ingresso hanno un valore corrispondente a quello indicato nella riga della tabella di veritá

Esempio

$x_1 x_2 x_3$	f (discr.)	termine somma	
000	0	$x_1 + x_2 + x_3$	maxtermine
001	0	$x_1 + x_2 + x_3'$	maxtermine
010	1	$x_1 + x_2' + x_3$	
011	1	$x_1 + x_2' + x_3$	
100	0	$x_1' + x_2 + x_3$	maxtermine
101	1	$x_1' + x_2 + x_3'$	
110	1	$x_1' + x_2' + x_3$	
111	0	$x_1 + x_2' + x_3'$	maxtermine

Forma canonica PS

Si definisce forma canonica di tipo prodotto di somme (PS o POS) la congiunzione (prodotto) di tutti i maxtermini della funzione

Nell'esempio precedente si ha:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3')(x_1' + x_2 + x_3)(x_1' + x_2' + x_3')$$

Sommario

Una funzione di n variabili puó quindi essere descritta in funzione dei suoi valori per ogni configurazione delle variabili

$$f = \prod_{i=0}^{2^n-1} (s_i + f(i))$$

- i é un indice che corrisponde al numero naturale codificato da una configurazione degli ingressi - es. $x_1, x_2, x_3 = 100 \rightarrow i = 4$
- s_i é il termine somma corrispondente a i (es. $s_4 = x_1' + x_2 + x_3$)

Nella forma canonica PS, si ha:

$$f = \prod_{\forall i \mid f(i)=0} M_i$$

- M_i é l'i-mo maxtermine

Esempi

Forme canoniche: il punto di vista del calcolo del proposizioni

- Forma canonica di tipo SP: la funzione vale 1 se la configurazione delle variabili di ingresso é una di quelle (disgiunzione) in cui la funzione vale 1
- Forma canonica di tipo PS: la funzione vale 1 se non si trova in alcuna (congiunzione) delle configurazioni in cui vale 0
  - supponiamo che 0101 sia una configurazione in cui $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$: devo trovare una espressione che é vera se non sono in tale configurazione, quindi $x_1 = 1$ o $x_2 = 0$ o $x_3 = 1$ o $x_4 = 0 \Rightarrow (x_1 + x_2' + x_3 + x_4')$ ovvero un maxtermine

Il ruolo dell'ottimizzazione nella sintesi di reti logiche

- Ingredienti:
  - funzione/espressione di partenza
  - un obbiettivo di progetto (costo, ritardo, consumo di potenza) e una metrica che descriva tale obbiettivo
- Il compito dell'ottimizzazione é quello di esplorare lo spazio delle possibili espressioni equivalenti cercando quella piú conveniente dal punto di vista della metrica considerata
- Questo puó essere fatto mediante:
  - una tecnica esatta che trova la soluzione migliore (es. rete dal costo minimo)
  - una tecnica euristica che porta a una soluzione approssimata (es. un minimo locale del costo) con un costo computazionale decisamente inferiore all'approccio esatto

Ottimizzazione del costo

- Le forme canoniche consentono di descrivere una funzione mediante l'algebra di commutazione
- In molti casi é possibile semplificare una forma canonica ottenendo un espressione equivalente piú semplice e quindi una rete meno costosa

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1' x_2 x_3' + x_1' x_2 x_3 + x_1 x_2' x_3 + x_1 x_2 x_3' \\ &= x_1' x_2 (x_3' + x_3) + x_1 x_3 (x_2' + x_2) \\ &= x_1' x_2 + x_1 x_3 \end{aligned}$$

- Occorre specificare meglio cosa vuole dire "meno costosa"

Sommario

Metriche per la stima del costo di una rete

- Il costo di una rete che é proporzionale all'area occupata dalla sua implementazione fisica (gate e interconnessioni)
- Chiaramente non si puó arrivare fino alla realizzazione fisica per valutare il costo di un espressione
- Bisogna trovare una metrica che fornisca una stima approssimata dell'area
- Esistono diverse metriche:
  1. numero di gate (non si considera il fatto che i gate con piú ingressi hanno maggiori dimensioni)
  2. numero di letterali nell'espressione
  3. numero di porte logiche pesate sui loro ingressi

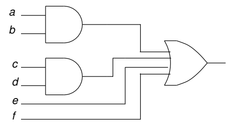
Numero di letterali

Si conta il numero di letterali (l) nell'espressione

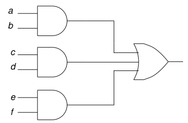
$$f = ab + c + d'e \qquad l = 5$$
$$f = abc + a'bce + d'e'f' \qquad l = 10$$

Questo metodo é semplice, ma puó essere reso piú accurato. Si considerino 3 funzioni con $l = 6$ e le reti corrispondenti

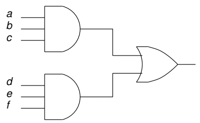
$f_1 = ab + cd + e + f$



$f_2 = ab + cd + ef$



$f_3 = abc + def$



Il numero totale di ingressi di gate (g) che é proporzionale all'area occupata dai gate é $g_1 = 8$, $g_2 = 9$, $g_3 = 8$

Esempi

Somma dei gate pesata sugli ingressi

- Questa metrica puó essere facilmente utilizzata se é disponibile la rete, mentre é difficile da applicare direttamente all'espressione
- A questo riguardo si possono mettere tutte le parentesi (compreso quelle non necessarie) e contare il numero di operandi di ciascun operatore somma e prodotto, aggiungendo 1 tutte le volte che si incontra un invertitore
- Esempio $f = abc + d' + e(f + g) = (abc) + d' + (e(f + g))$, si ha un OR a 3 ingressi, un AND a 3 ingressi, un OR a 2 ingressi, un AND a 2 ingressi e un NOT. Quindi $g = 10$ (mentre $l = 7$)

Il ruolo del fan-out

- Chiaramente la valutazione del costo di un espressione corrispondente a una rete deve essere attuata tenendo in conto dell'eventuale utilizzo del fan-out evitando cosí di contare piú volte letterali e operandi
- In effetti tutti i metodi considerati non tengono conto del costo delle interconnessioni

Esempi

Sommario

Forme normali e reti a 2 livelli

- Considereremo per primo un problema particolare: quello delle reti che realizzano espressioni del tipo somma di prodotti (SP) o prodotti di somme (PS)
- Tali espressioni vengono definite come forme normali (le forme canoniche ne sono un caso particolare)
- Le reti corrispondenti (trascurando i NOT) vengono definite a 2 livelli
- I motivi di questa restrizione sono:
  - la possibilitá di trovare una soluzione esatta del problema con tempi di calcolo ragionevoli
  - alcuni strumenti sviluppati in questo caso servono per risolvere il problema generale
  - l'interesse tecnologico (sorpassato) di metodologie di fabbricazione in grado di realizzare reti a 2 livelli in maniera molto efficiente

Sintesi di reti a 2 livelli

- Sono stati sviluppati diversi metodi per la sintesi a 2 livelli, sia di tipo esatto che euristico
- In questo ambito vedremo due metodi di carattere esatto:
  - Mappe di Karnaugh: un metodo grafico per la sintesi di funzioni con fino a 6 ingressi
  - Quine-Mc Cluskey: un metodo implementabile in uno strumento di sintesi automatica (computazionalmente fattibile fino a circa 20 ingressi)
- Si vedrá anche uno strumento CAD (Espresso) in grado di trattare funzioni di dimensioni maggiori eventualmente ricorrendo a strumenti euristici

Implicanti e implicati

- Siano n il numero di variabili
- In una forma normale di tipo SP di una funzione f, un termine prodotto P di k letterali corrispondenti a $k \leq n$ variabili diverse viene detto *implicante*
- Infatti $P = 1 \rightarrow f = 1$
- In una forma normale di tipo PS di una funzione f, un termine somma S di k letterali corrispondenti a $k \leq n$ variabili diverse viene detto *implicato*
- Infatti $S = 1 \leftarrow f = 1$

Diagrammi di Venn

Espansione

- Sia P un termine prodotto di $k \leq n$ letterali, vale la proprietá:

$$x'P + xP = (x' + x)P = 1 \cdot P = P$$

- L'espressione di partenza ha $2(k+1)$ letterali, e quella finale ne ha k
- La regola puó essere applicata iterattivamente

$$\begin{aligned} f &= a'b'c'd' + a'b'c'd + a'bc'd' + a'bc'd \\ &= a'b'c'(d' + d) + a'bc'(d' + d) \\ &= a'b'c' + a'bc' \\ &= a'c'(b + b') \\ &= a'c' \end{aligned}$$

L’espansione non é sufficiente

- Si consideri un ulteriore caso

$$f = abc'd + abcd + a'bcd$$

- La proprietá di espansione puó essere applicata in 2 modi diversi, si ha:

$$f = abd(c + c') + a'bcd = abd + a'bcd$$

$$f = bcd(a + a') + abc'd = bcd + abc'd$$

- La proprietá di espansione non puó piú essere applicata

Idempotenza

- Si potrebbe passare per un espressione multilivello per semplificare ulteriormente le espressioni (utilizzando la proprietá di semplificazione)

$$f = abd + a'bcd = bd(a + a'c) = bd(a + c) = abd + bcd$$

$$f = bcd + abc'd = bd(c + ac') = bd(a + c) = abd + bcd$$

- Come alternativa si puó utilizzare la proprietá di idempotenza ($P + P = P$) per poi applicare l’espansione

$$f = abc'd + abcd + a'bcd = abc'd + abcd + abcd + a'bcd =$$

$$= abd(c' + c) + bcd(a + a') = abd + bcd$$

Espansione in espressioni PS

- Le proprietá duali possono essere applicate a espressioni di tipo PS

$$(x + S)(x' + S) = S$$

- Vediamo ad esempio il caso dell’espansione:

$$f = (a + b + c + d)(a + b + c' + d)(a + b' + c + d)(a + b' + c' + d)$$

$$= ((a+b+d)+c)((a+b+d)+c')((a+b'+d)+c)((a+b'+d)+c')$$

$$= (a + b + d)(a + b' + d) = ((a + d) + b)((a + d) + b') = a + d$$

Implicanti e implicati primi

Un implicante o implicato che non puó essere ulteriormente espanso si definisce come primo

Si vedrá in seguito il significato di tali termini

Distanza Hamming (forme SP)

- Selezione di coppie di termini per l'espansione: termini prodotto con lo stesso numero di letterali che differiscono per un solo letterale corrispondente alla stessa variabile in forma vera e complementata
- Nel caso dei mintermini l'operazione puó essere fatta sia analizzando l'espressione che analizzando la tabella di veritá
- In particolare, possono essere espanse le configurazioni corrispondenti a uni della funzione che si trovano a distanza Hamming unitaria
- Si considerino ad esempio i mintermini:

$xywz$	1111
$xywz'$	1110

- Questi possono essere espansi come $xyw(z+z') = xyw$

Rappresentazione dei termini prodotto come configurazioni

- Il ragionamento sulle configurazioni binarie puó essere esteso a termini prodotto con un qualsiasi numero di letterali
- Questo puó essere fatto utilizzando configurazioni di $\{0, 1, -\}^n$ che utilizzano lo stesso ordinamento delle variabili usato nella tabella di veritá
  - in particolare si associa a ogni letterale presente nel termine prodotto il simbolo 1 se il letterale é in forma vera e 0 se é in forma negata
  - si associa il simbolo $-$ a quelle variabili che non compaiono nel prodotto
- Ad esempio $f(x, y, w, z)$: $xyw \Leftrightarrow 111-$, $xy' \Leftrightarrow 10--$

Generalizzazione della distanza Hamming

- La distanza Hamming puó essere generalizzata a quelle configurazioni di $\{0,\ 1,\ -\}^n$ che hanno il simbolo $-$ nelle stesse posizioni
- Ad esempio, $01-0$ e $01-1$ hanno distanza 1, mentre $11--$ e $00--$ hanno distanza 2
- Termini prodotto corrispondenti a configurazioni a distanza 1 possono essere espansi sostituendo il valore per cui differiscono con il simbolo $-$
- Esempio $01-0$ e $01-1$ possono essere espansi come $01--$
- Infatti, i termini prodotto corrispondenti sono $x'yz + x'yz' = x'y(z+z') = xy'$

Esempi

Conclusioni

- Si é visto come si possa rappresentare una funzione mediante un espressione
- É stata sviluppata una metrica per valutare il costo di un espressione
- Sono stati sviluppati alcuni concetti utili per la semplificazione di un espressione
- Non si ha ancora un approccio sistematico