Metodi di soluzione delle tabelle di copertura

M. Favalli

Engineering Department in Ferrara

Sommario

Sommario

Introduzione

- Tramite il calcolo delle proposizioni trasforma il problema di copertura in un problema algebrico che descrive le seguenti proposizioni:
    1. si devono coprire tutti i mintermini
    2. ogni mintermine puó essere coperto a uno o piú implicanti
- La prima condizione si trasforma in una congiunzione logica, mentre la seconda in una disgiunzione dando cosí luogo a un espressione di tipo PS che descrive tutte le possibili coperture

Metodo di Petrick

- Sia $\mathcal{P}$ l'insieme di tutti (k) gli implicanti primi (calcolabile con Quine-McCluskey)
- Sia $\mathcal{P}_j$ l'insieme di k_j implicanti primi che copre il mintermine m_j (deducibile dalla tabella di copertura)
- L'idea base del metodo é di associare una variabile $S_i \in \{0, 1\}$ a ciascun implicante primo P_i

  $S_i = 1$ se P_i viene utilizzato in una copertura
  $S_i = 0$ altrimenti

Condizione di copertura

- Sia $c(m_j)$ una funzione che vale 1 se m_j é coperto e 0 altrimenti
- La condizione di copertura é quindi data da:

$$\gamma = c(m_0)c(m_1)....c(m_k) = 1$$

- $c(m_j)$ puó essere espresso specificando che m_j sia coperto da almeno un implicante

$$c(m_j) = \sum_{\forall i \in \mathcal{P}_j} S_i$$

- Quindi γ é un espressione PS

Coperture

- L'espressione puó essere semplificata con le proprietá dell'algebra di commutazione ($S(S + Q) = S$)
- Si nota che gli implicanti primi essenziali corrispondono a termini somma di un solo letterale
- Eseguendo i prodotti (usando anche la proprietá $(S + P)(S + Q) = S + PQ$), si ottiene un espressione SP in cui ciascun termine prodotto corrisponde a una possibile copertura
- Si tornati al problema di partenza? In realtá no, perché nell'espressione non compaiono letterali (S) negati e quindi non sono possibili espansioni

Coperture cicliche

- Il metodi visti non tengono in conto del numero di letterali, ma solo della cardinalitá dell'insieme di implicanti
- Rispetto al numero di implicanti la soluzione ottenuta é minima indipendentemente dall'ordine con cui sono applicate le proprietá di essenzialitá e dominanza sono applicate
- Nel caso di coperture "cicliche" non sono in grado di decidere quali implicanti utilizzare perché nella tabella non si hanno né relazioni essenzialitá, né relazioni di dominanza

Esempio

Si consideri di nuovo la funzione $f(a,b,c,d) = \{1,2,3,4,5,6,8,9,12,13\}$ per la quale sono stati calcolati implicanti primi e nella tabella di copertura a ogni implicante é associato il costo come numero di letterali

Esempio

	1	2	3	4	5	6	8	9	12	13	
$P_0 = ac'$							$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	2
$P_1 = bc'$				$\times$	$\times$				$\times$	$\times$	2
$P_2 = c'd$	$\times$				$\times$			$\times$		$\times$	2
$P_3 = a'b'd$	$\times$		$\times$								3
$P_4 = a'b'c$		$\times$	$\times$								3
$P_5 = a'cd'$		$\times$				$\times$					3
$P_6 = a'bd'$				$\times$		$\times$					3

$c(1) = S_2 + S_3$ $\quad c(2) = S_4 + S_5$ $\quad c(3) = S_3 + S_4$
$c(4) = S_1 + S_6$ $\quad c(5) = S_1 + S_2$ $\quad c(6) = S_5 + S_6$
$c(8) = S_0$ $\quad c(9) = S_0 + S_2$ $\quad c(12) = S_0 + S_1$
$c(13) = S_0 + S_1 + S_2$

Esempio

$$
\begin{aligned}
\gamma &= (S_2+S_3)(S_4+S_5)(S_3+S_4)(S_1+S_6)(S_1+S_2)(S_5+S_6) \\
&\quad S_0(S_0+S_2)(S_0+S_1)(S_0+S_1+S_2) \\
&= (S_2+S_3)(S_4+S_5)(S_3+S_4)(S_1+S_6)(S_1+S_2)(S_5+S_6)S_0 \\
&= S_0S_1S_2S_4S_5 + S_0S_2S_4S_6 + S_0S_1S_3S_4S_6 + \\
&\quad +S_0S_1S_3S_5 + S_0S_3S_5S_6
\end{aligned}
$$

Sono quindi possibili 5 coperture diverse, di cui due presentano un numero di implicanti $C = 4$ e altre $C = 5$

Ogni possibile copertura puó essere annotata con il suo costo come numero di letterali

$$
\begin{aligned}
\gamma &= (S_0S_1S_2S_4S_5)_{12} + (S_0S_2S_4S_6)_{10} + (S_0S_1S_3S_4S_6)_{13} + \\
&\quad +(S_0S_1S_3S_5)_{10} + (S_0S_3S_5S_6)_{11}
\end{aligned}
$$

Come si vede le coperture di costo minimo sono 2 con costo $l = 10$:
$S_0S_1S_3S_5 \to \mathcal{C}(f) = \{P_0, P_1, P_3, P_5\} \to f = ac' + bc' + a'b'd + a'cd'$
$S_0S_2S_4S_6 \to \mathcal{C}(f) = \{P_0, P_2, P_4, P_6\} \to f = ac' + c'd + a'b'c + a'bd'$

Esempio

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	1	0	1
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

$S_0S_1S_3S_5$

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	1	0	1
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

$S_0S_2S_4S_6$

Esempi

Conclusioni

- Si é visto un metodo in grado di ottenere la copertura di costo minimo in maniera esatta
- Il limite principale di tale metodo consiste nel fatto che calcola tutte le soluzioni
- Esistono metodi basati su algoritmi di branch and bound che in pratica esplorano lo spazio di tutte le soluzioni cercando di evitare quelle di cui si conosce giá il fatto che non sono minime