

Sintesi di macchine a stati finiti

M. Favalli

6th June 2007

Sommario

- 1 Realizzazione del STG
- 2 Automa minimo di FSM completamente specificate
- 3 Ottimizzazione di FSM non completamente specificate

- 1 Realizzazione del STG
- 2 Automa minimo di FSM completamente specificate
- 3 Ottimizzazione di FSM non completamente specificate

- Passi nel progetto di un sistema digitale basato su macchine a stati finiti di tipo sincrono:
 - ➊ traduzione delle specifiche informali in specifiche formali (STG o tabella)
 - ➋ ottimizzazione della descrizione formale
 - ➌ scelta della codifica dello stato
 - ➍ realizzazione della rete combinatoria che realizza le funzioni di uscita e stato futuro, dimensionamento del segnale di clock
- Esiste un passo di verifica del quale non ci occuperemo

Realizzazione del grafo di transizione dello stato

- É la parte piú difficile in quanto, partendo da un modello informale, non esiste un approccio sistematico
- Si forniscono quindi solo una serie di suggerimenti per aiutare il progettista, il piú importante dei quali riguarda la corretta identificazione delle informazioni che lo stato deve contenere al fine di poter calcolare l'uscita
- Questo passo consente di evitare l'errore piú diffuso ovvero il considerare diverse sequenze di ingressi aggiungendo di volta in volta stati inutili

Sequenza principale

- In molti casi, come quello degli automi che riconoscono sequenze di simboli, si può identificare una sequenza principale di stati che portano al riconoscimento di tale simbolo
- In questi casi si può focalizzare l'attenzione su tale sequenza completando poi in seguito l'automa
- In alcuni casi si arriva alla sequenza principale tramite una sequenza di attivazione

Scelta dello stato di partenza

- In alcuni casi si può identificare una condizione di funzionamento di riposo indipendente dalla storia precedente del sistema
- In altri casi possono esistere piú condizioni di funzionamento che dipendono in maniera molto semplice dalla storia del sistema
- Se ci si trova in difficoltà, si può cercare di identificare una possibile storia del sistema che porta univocamente a una qualsiasi condizione di funzionamento

Macchine in cui lo stato dipende da un numero finito di valori dell'ingresso

- In generale si può esplicitare lo stato futuro in funzione di una sequenza di j ingressi e di uno stato iniziale
- Per fare questo si parte dalla relazione di stato futuro $s_{k+1} = \delta(s_k, x_k)$ e si esplicitano recursivamente gli stati presenti: $s_k = \sigma(s_{k-1}, x_{k-1}) \dots$; da cui $s_{k+1} = \delta(s_{k-j}, x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-j})$
- Se esiste un j per cui scompare la dipendenza dallo stato s_{k-j} , posso utilizzare j stati ciascuno per ogni configurazione di $x_{k-1}, \dots, x_{k-j}$
- Questo approccio può portare a un numero di stati ridondanti, ma é utile in presenza di specifiche che chiedono di analizzare gli ultimi $j + 1$ simboli di ingresso (Mealy)

Regole

Alcune regole che portano alla realizzazione di reti sincrone correttamente funzionanti

- Non devono comparire stati non raggiungibili
- Non devono comparire stati assorbenti

Sommario

- 1 Realizzazione del STG
- 2 Automa minimo di FSM completamente specificate
- 3 Ottimizzazione di FSM non completamente specificate

Automa minimo

- Si é visto che nel progetto di una FSM possono comparire alcuni stati ridondanti
- In particolare, alcuni sottoinsiemi di stati possono riassumere la stessa storia passata del sistema
- Quindi, per ogni sequenza di ingresso, l'evoluzione dello stato e le uscite della FSM a partire da tali stati sono le stesse
- Nei passi seguenti si vedrá che il numero di stati si riflette sul numero di FF da utilizzare e sulla complessitá della rete combinatoria che realizza λ e δ , converrá sostituire ciascuno di tali sottoinsiemi di stati con un un singolo stato
- Si può arrivare a un automa minimo

Relazione di indistinguibilità

- Consideriamo FSM completamente specificate
- Due stati σ_i e σ_j si dicono indistinguibili se per ogni sequenza di ingresso, le uscite della FSM a partire dallo stato iniziale σ_i sono uguali a quelle ottenute partendo dallo stato iniziale σ_j
- Tali stati sono allora sostituibili da uno stato α ottenendo un automa equivalente a quello di partenza e con un minor numero di stati
- Si noti che é immediato verificare che tale relazione ($\mathcal{R}$) é riflessiva ($(\sigma_i, \sigma_j) \in \mathcal{R}$), simmetrica (se $(\sigma_i, \sigma_j) \in \mathcal{R}$, allora $(\sigma_j, \sigma_i) \in \mathcal{R}$) e transitiva ($(\sigma_i, \sigma_j) \in \mathcal{R} \wedge (\sigma_j, \sigma_k) \in \mathcal{R} \Rightarrow (\sigma_i, \sigma_k) \in \mathcal{R}$)

Identificazione della relazione di indistinguibilità

- La definizione di relazione di indistinguibilità suggerisce un esperimento per determinare se due stati sono indistinguibili
- Si tratta di calcolare l'uscita per ogni possibile sequenza di ingressi a partire dal primo e dal secondo stato
- Un primo problema é dato dal significato di una "qualsiasi sequenza di ingresso". Quanto devono essere lunghe le sequenze?
- In teoria, il numero totale di valutazioni sarebbe proporzionale al numero di stati per quello dei simboli di ingresso
- L'operazione andrebbe ripetuta poi per ogni coppia di stati
- É evidente che questo approccio risulta non fattibile anche per automi poco complessi

Metodo di Paull e Unger

- Si tratta di un approccio efficiente all'individuazione di stati indistinguibili
- Il metodo utilizza la tabella di transizione dello stato e una struttura di appoggio detta tabella triangolare
- La tabella triangolare mette a disposizione una cella per ogni coppia di stati dell'automa
- Si considera una tabella triangolare e non una matrice quadrata perché la simmetria della relazione consente di eliminare la parte superiore della matrice e la proprietà riflessiva consente di eliminare la diagonale principale
- La tabella ha una colonna per ogni stato (tranne l'ultimo) e una riga per ogni stato (tranne il primo)

Definizione alternativa di indistinguibilità

- Si può utilizzare una definizione equivalente alla precedente che individua alcuni aspetti utili
- Due stati σ_i e σ_j sono indistinguibili se per ogni configurazione di ingresso ξ , l'uscita é la stessa $\lambda(\sigma_i, \xi) = \lambda(\sigma_j, \xi)$ e gli stati futuri $\delta(\sigma_i, \xi)$ e $\delta(\sigma_j, \xi)$ sono indistinguibili
- Questa definizione non suggerisce ancora un metodo pratico, ma fornisce le condizioni sufficienti per individuare direttamente sulla tabella di transizione dello stato:
 - Coppie di stati distinguibili: esiste un simbolo di ingresso per cui viene prodotta un uscita diversa
 - Coppie di stati indistinguibili: le righe della tabella sono uguali

Tabella triangolare

Esempio di tabella triangolare (o delle implicazioni) per un automa con 8 stati

Metodo di Paull e Unger

- Si analizzano sulla tabella di transizione dello stato tutte le possibili coppie di stati tracciando le condizioni identificate dalla negazione della seconda definizione di indistinguibilità, la quale può essere ridefinita in maniera induttiva:
 - 1 due stati sono distinguibili se esiste un simbolo di ingresso per cui producono uscite diverse o se
 - 2 hanno transizioni verso stati distinguibili
- Il cambiamento di prospettiva rende più semplice l'analisi dell'automa

Metodo di Paull e Unger - Passo 2

- Le caselle con il simbolo $\times$ rappresentano stati distinguibili (con sequenze di lunghezza 1), quelle con il simbolo $\checkmark$ rappresentano stati indistinguibili, degli altri stati non si può dire nulla
- É necessario (retro) propagare le condizioni di distinguibilità
 - 1 Per ogni casella contenente il simbolo $\times$ si verifica se tale coppia di stati compare in un'altra casella come condizione sugli stati futuri, in tale caso quest'ultima casella viene barrata con $\times$
 - 2 Questo processo viene ripetuto (dopo il primo passo vengono considerati solo i nuovi simboli $\times$) fino a quando non si hanno più nuove condizioni di distinguibilità
- Alla fine, le caselle in cui non compare il simbolo $\times$ corrispondono a stati indistinguibili
- A ogni iterazione, si individuano coppie di stati 2 -distinguibili, 3 -distinguibili

Metodo di Paull e Unger - Passo 1

- Vediamo in maggior dettaglio le operazioni da svolgere
 - 1 Se esiste un simbolo di ingresso per cui i due stati in esame differiscono per il simbolo di uscita, gli stati sono 1-distinguibili e la casella corrispondente nella t.t. viene annotata con il simbolo $\times$
 - 2 Se le righe sono uguali, la casella corrispondente nella t.t. viene annotata con il simbolo $\checkmark$ o lasciando vuota la casella
 - 3 Se si hanno le stesse uscite, ma transizioni verso stati futuri diversi per uno o più simboli di ingresso, tali stati vengono annotati nella casella della t.t. (questa operazione non va fatta se gli stati futuri sono uguali a quelli presenti)

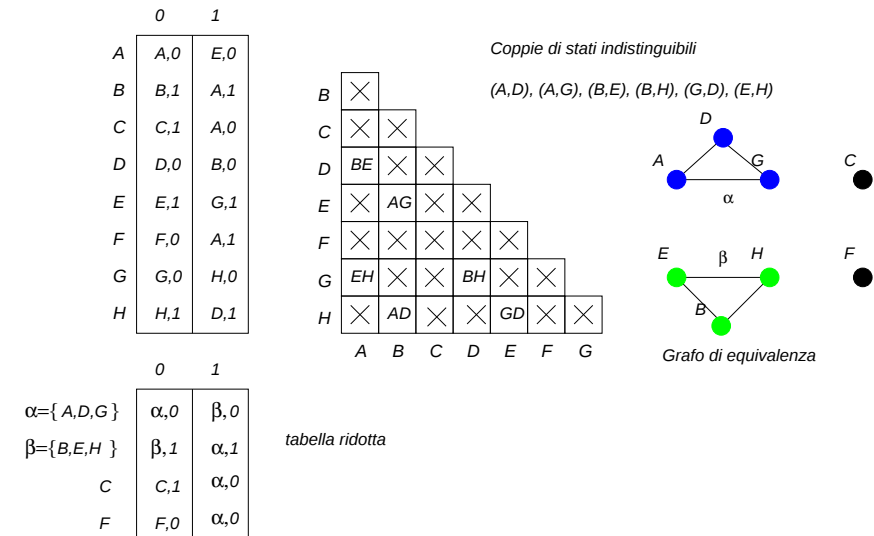
Grafo delle equivalenze

- Le coppie di stati indistinguibili che sono state così identificate possono essere riportate sul grafo delle equivalenze
- In tale grafo (non orientato), si ha un nodo per ogni stato e un arco fra due nodi che sono fra loro indistinguibili
- In questo grafo ogni sottografo completamente connesso corrisponde a uno stato della nuova macchina
- Si nota che i sottografi completamente connessi sono fra loro disgiunti. Questo é dovuto al fatto che la relazione di indistinguibilità é una relazione di equivalenza e pertanto induce un partizionamento nell'insieme degli stati
- Tali sottografi individuano le classi massime di indistinguibilità (ovvero sottoinsiemi di stati fra loro indistinguibili che non possono essere ulteriormente espansi)

Metodo di Paull e Unger - Passo 3

- 1 Si costruisce il grafo delle equivalenze
- 2 Si individuano le componenti completamente connesse e si associa un nuovo stato a ciascuna di esse
- 3 Si costruisce la tabella di transizione dello stato del nuovo automa:
 - utilizzando i simboli dei nuovi stati e di quelli non inclusi come in alcuna classe come insieme degli stati
 - per ognuno dei nuovi stati si utilizzano le transizioni di stato e le uscite di uno qualsiasi degli stati di partenza contenuti nella classe massima corrispondente
 - sostituendo i simboli dei nuovi stati ovunque compaia uno dei vecchi stati contenuti nella classe massima corrispondente

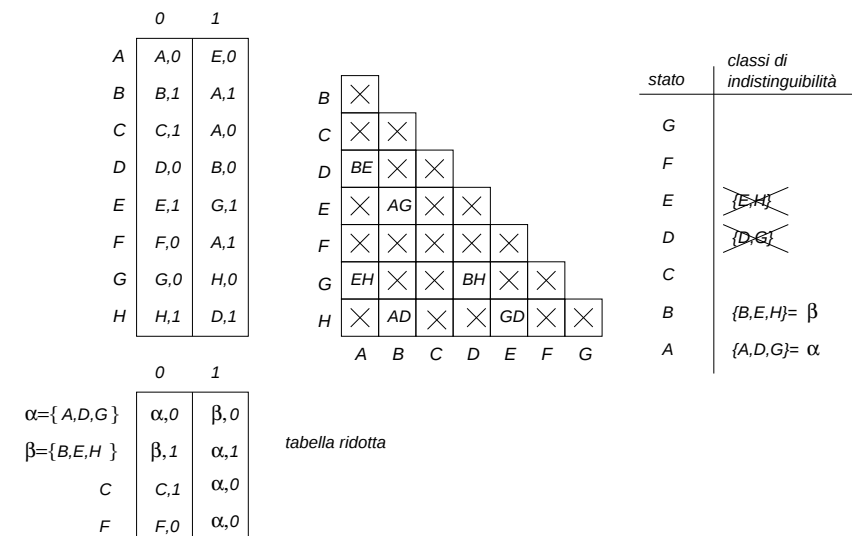
Esempio



Alternativa

- Si può fare a meno di disegnare il grafo delle equivalenze
- Si parte dalla casella di destra della tabella triangolare e ci si muove verso sinistra e si crea una classe di indistinguibilità contenente lo stato corrispondente a quella colonna e tutti quelli da esso indistinguibili
- Se la nuova classe ne contiene una delle precedenti, quest'ultima viene eliminata
- Si associa un nuovo stato a ciascuna delle classi così ottenute e si aggiungono gli stati non contenuti in alcuna classe

Esempio (alternativa)



Relazione di compatibilità

- Due stati σ_i e σ_j si dicono compatibili se per ogni sequenza di ingresso applicabile, le uscite della FSM a partire dallo stato iniziale σ_i sono uguali quando specificate a quelle ottenute partendo dallo stato iniziale σ_j
- Tali stati sono allora sostituibili da uno stato α ottenendo un automa equivalente a quello di partenza e con un minor numero di stati
- Si noti che é immediato verificare che tale relazione ($\mathcal{Q}$) é riflessiva (σ_i, σ_i) $\in \mathcal{Q}$ e simmetrica (se (σ_i, σ_j) $\in \mathcal{Q}$, allora (σ_j, σ_i) $\in \mathcal{Q}$)
- Si vedrá che non é transitiva

Definizione alternativa di compatibilità

- Si può utilizzare una definizione equivalente alla precedente
- Due stati σ_i e σ_j sono compatibili se per ogni configurazione di ingresso ξ , l'uscita é la stessa $\lambda(\sigma_i, \xi) = \lambda(\sigma_j, \xi)$ quando specificata in entrambi gli stati, e gli stati futuri $\delta(\sigma_i, \xi)$ e $\delta(\sigma_j, \xi)$ sono compatibili
- Negando tale condizione si ritrova la definizione di stati distinguibili di Paull e Unger (in questo caso si può anche dire "non compatibili"):
 - due stati sono distinguibili se esiste un simbolo di ingresso per cui producono uscite diverse quando sono entrambe specificate o se
 - hanno transizioni verso stati distinguibili (se entrambi specificati)

Proprietá transitiva

- Si consideri il seguente esempio:

	0	1
σ_i	$\sigma_l, \mathbf{0}$	$\sigma_m, -$
σ_j	$\sigma_l, -$	$\sigma_m, -$
σ_k	$\sigma_l, \mathbf{1}$	$\sigma_m, -$

- Si osserva che σ_i é compatibile con σ_j , che σ_j é compatibile con σ_k
- Poiché $\mathcal{Q}$ non é quindi una relazione di equivalenza, non induce un partizionamento su $\mathcal{S}$

Coppie di stati compatibili

- La definizione precedente consente di applicare quanto già visto per il calcolo delle coppie di stati indistinguibili al caso di automi completamente specificati
- Una volta individuate le coppie di stati compatibili, si può costruire un grafo di compatibilità
- I sottografi completamente connessi di tale grafo corrispondono a classi massime di compatibilità
- A causa dell'assenza della proprietà transitiva, tali sottografi non sono disgiunti

Metodo alternativo

componenti completamente connesse
classi massime di compatibilità: $\{ABCD\}$, $\{ABEF\}$

Metodo alternativo

- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ 🔍 ↺

- 6th June 2007 34 / 44

Esempio

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ▶ ↺ 🔍 ↻

Automa con le classi massime di compatibilit 

- L'automa costruito con le classi massime di compatibilità non ha alcuna garanzia di essere minimo e addirittura potrebbe avere più stati di quello di partenza
- Può comunque essere ottenuto con un procedimento piuttosto semplice
- La sua costruzione è simile a quella dell'automa con le classi massime di indistinguibilità

Esempio

Il nuovo stato α , ha $\gamma(\alpha, 00) = \{A, E\} \subset \beta$, $\gamma(\alpha, 01) = \{D\} \subset \alpha$,
 $\gamma(\alpha, 11) = \{C\} \subset \alpha$ e $\gamma(\alpha, 10) = \{B\} \subset \alpha \cap \beta$ (in quest'ultimo caso si può scegliere fra i due stati)

	00	01	11	10
A	A,0	-, -	-, -	B,0
B	E,-	-, -	C,0	B,0
C	-, -	D,0	C,0	-, -
D	A,0	D,0	-, -	-, -
E	E,-	F,-	-, -	-, -
F	A,0	F,1	-, -	-, -

$$\alpha = \{A, B, C, D\}$$
$$\beta = \{A, B, E, F\}$$

00	01	11	10
$\beta, 0$	$\alpha, 0$	$\alpha, 0$	$\alpha/\beta, 0$
$\beta, 0$	$\beta, 1$	$\alpha, 0$	$\alpha/\beta, 0$

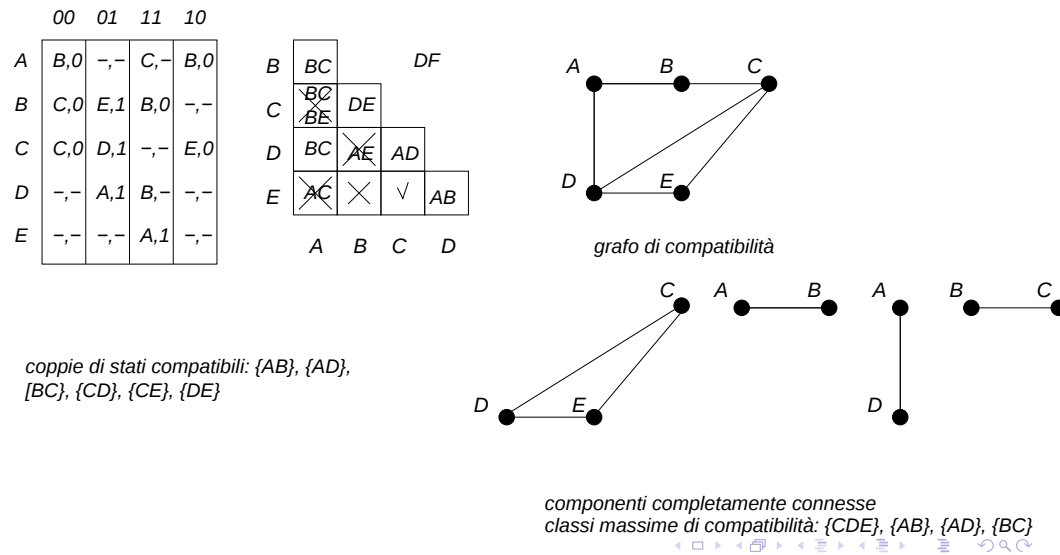
Automa con le classi massime di compatibilità

- 1 si associa un nuovo stato α_i a ciascuna classe massima di compatibilit  (G_i) (chiaramente bisogna tenere in conto anche degli stati non contenuti in alcuna classe)
- 2 per uno stato α_i e ingresso ξ , si esaminano tutti gli stati futuri $\sigma_k = \delta(\sigma_j, \xi) \forall \sigma_j \in G_i$ associati (nella tabella di partenza) agli stati contenuti in G_i (sia $\gamma(\alpha_i, \xi)$ tale insieme) e si individua una classe G_k che li contenga tutti, si inserisce il nuovo stato α_k associato a tale classe come stato futuro
- 3 come uscita, si inserisce il valore specificato (se esiste)) associato agli stati contenuti in $\gamma(\alpha_i, \xi)$ con ingresso ξ , se hanno tutti un'indifferenza si mette invece tale simbolo

Il problema dell'automa minimo

- Non é detto che le classi massime di compatibilit  diano luogo all'automa minimo che va quindi cercato nell'insieme contenente tutti le possibili collezioni di classi di compatibilit 
- Per dare luogo ad un automa compatibile con quello di partenza una possibile collezione di classi (non necessariamente massime) deve soddisfare le seguenti condizioni:
 - Copertura: ciascuno stato dell'automa di partenza deve essere contenuto in almeno una classe di quello finale
 - Chiusura: per ogni stato rappresentativo di una classe ed ingresso deve esistere una classe G_j che contenga tutti gli stati futuri individuati dagli stati contenuti in G_i ($\forall \alpha_i, \xi \in G_i \mid \gamma(\alpha_i, \xi) \subseteq G_j$)

Esempio



Esempio

Tabella costituita dalle classi massime di compatibilità

	00	01	11	10
$\alpha = \{A, B\}$	$\gamma, 0$	$\delta, 1$	$\gamma, 0$	$\alpha/\gamma, 0$
$\beta = \{A, D\}$	$\alpha/\gamma, 0$	$\alpha/\beta, 1$	$\gamma, -$	$\alpha/\gamma, 0$
$\gamma = \{B, C\}$	$\gamma/\delta, 0$	$\delta, 0$	$\alpha/\gamma, 0$	$\delta, 0$
$\delta = \{C, D, E\}$	$\gamma/\delta, 0$	$\beta, 1$	$\alpha, 1$	$\delta, -$

Esempio

Sipotrebbe pensare di coprire tutti gli stati utilizzando solo α e δ

	00	01	11	10
$\alpha = \{A, B\}$	violazione B, C	$\delta, 1$	violazione B, C	$\alpha, 0$
$\delta = \{C, D, E\}$	$\delta, 0$	violazione A, D	$\alpha, 1$	$\delta, 0$

Si hanno diverse violazioni sulla condizione di chiusura, ad esempio se $s_k = \alpha$ e $\xi = 00$ nell'automa originario si avevano transizioni $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow C$ e quindi $\gamma(\alpha, 00) = \{B, C\}$, ma tale insieme non é contenuto in alcuna classe

Supponiamo di partire da α e di applicare la sequenza 00, 11 se avessi usato (come stato futuro) α avrei prodotto in uscita 0, 0, mentre se usavo β avrei prodotto 0, 1

Esempio

Dall'esempio precedente si nota che la prima violazione della condizione di chiusura é data dall' insieme di stati $\{B, C\}$, quindi si può pensare di reintrodurre γ . Questo però non elimina la violazione data da $\{A, D\}$. Invece di reintrodurre β , si può notare che non é più necessario che δ contenga C che é già coperto da γ

	00	01	11	10
$\alpha = \{A, B\}$	$\gamma, 0$	$\delta, 1$	$\gamma, 0$	$\alpha/\gamma, 0$
$\gamma = \{B, C\}$	$\gamma, 0$	$\delta, 0$	$\alpha/\gamma, 0$	$\delta, 0$
$\delta = \{D, E\}$	$-, -$	$\alpha, 1$	$\alpha, 1$	$-, -$

La nuova copertura ha meno stati di quella che utilizza le classi massime di compatibilità e utilizza una classe che non é massima.

Sommario

- Nel caso di automi completamente specificati esiste un metodo che consente di arrivare alla tabella minima
- Nel caso di automi non completamente specificati il metodo delle classi massime di compatibilità non garantisce di arrivare a un automa minimo
- Esistono metodi euristici implementati in strumenti CAD che sono in grado di gestire tale caso
- Nel compito potrà comunque essere richiesta la verifica delle condizioni di chiusura per una tabella iniziale e una collezione di classi di compatibilità