Macchine a stati finiti

M. Favalli

Engineering Department in Ferrara

Sommario

Sommario

Introduzione

- Le macchine a stati si utilizzano per modellare di sistemi fisici caratterizzabili mediante:
  - un insieme di variabili di ingresso (controllabili)
  - un insieme di variabili di uscita (osservabili)
  - un insieme di variabili stato che non possono essere osservate o misurate direttamente
- La conoscenza dei valori delle variabili di stato consente per una dato ingresso di determinare le uscite del sistema
- Il valore corrente delle variabili di stato viene genericamente denotato come "stato" del sistema

Concetto di stato

- Poiché le uscite dipendono anche dallo stato, l'applicazione dello stesso ingresso puó produrre risultati diversi
- Questo non íl caso delle reti logiche combinatorie
- In pratica, lo stato del sistema rappresenta sinteticamente la storia del sistema
- Chiaramente, lo stato contiene le informazioni necessarie per calcolare l'uscita del sistema, non é in generale possibile l'inferenza della sequenza di ingressi che ha portato il sistema in un certo stato

Macchine a stati finiti

- Si suppone che l'insieme delle possibili configurazioni di ingresso e di uscita e che l'insieme degli stati abbiano una cardinalitá finita (realizzabilitá)
- $\mathcal{X}$ insieme finito di simboli di ingresso
- $\mathcal{Z}$ insieme finito di simboli di ingresso
- $\mathcal{S}$ insieme finito di stati

Modello del tempo

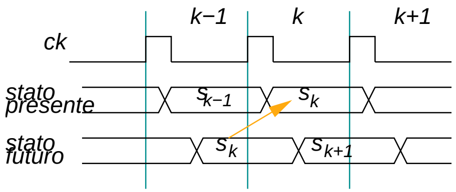
- In generale lo stato di una macchina a stati (che nel caso piú generale é di tipo asincrono) evolve in presenza di un evento sull'ingresso o sullo stato stesso
- Le macchine a stati sincrone possono invece evolvere esclusivamente in presenza di eventi (istanti di campionamento) sul segnale di sincronizzazione (clock)
- Come si é visto, in presenza di sistemi sincroni si puó astrarre un modello tempo discreto dal tempo continuo
- In tale caso la macchina si dice sincrona e si é interessati solo al valore di ingresso, uscita e stato negli istanti di sincronizzazione (t_k, con $k = 0, 1, 2, ...$)
- Si vedranno criteri precisi che consentono di progettare macchine di questo tipo

Determinismo

- I sistemi fisici (macroscopici) sono deterministici, per cui fissato l'ingresso e lo stato, uscita ed evoluzione dello stato sono fissati
- Esistono anche modelli non deterministici, in cui dato l'ingresso e lo stato possono esistere diversi modi in cui la macchina puó evolvere
- Tali modelli non corrispondono a sistemi fisici (macroscopici) reali, ma sono utili per descrivere ad esempio le incertezze che possono essere presenti al livello di specifiche

Significato dello stato

- Il simbolo prodotto in uscita all'istante t_k é univocamente determinato dal simbolo di ingresso e dallo stato all'istante t_k
- Lo stato all'istante successivo t_{k+1} é anch'esso determinato in modo univoco da ingresso e stato all'istante t_k
- Lo stato all'istante t_k viene comunemente definito stato presente, mentre quello all'istante successivo t_{k+1} viene definito stato futuro



Definizione di FSM (sincrona)

Una macchina a stati finiti sincrona (M) é un sistema sincrono caratterizzato da un alfabeto di ingresso finito $\mathcal{X} = \xi_1, \xi_2, ..., \xi_p$, un alfabeto di uscita $\mathcal{Z} = \zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_q$ e un insieme finito di stati $\mathcal{S} = \sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r$ e da una coppia di relazioni:

1. uscita: $z_k = \lambda(x_k, s_k)$
2. stato futuro (next state): $s_{k+1} = \delta(x_k, s_k)$

Ove $x_k \in \mathcal{X}$, $z_k \in \mathcal{Z}$ e $s_k \in \mathcal{S}$ rappresentano rispettivamente il simbolo di ingresso, di uscita e lo stato all'istante k.

Definizione di FSM sincrona

La definizione precedente corrisponde a una macchina detta di Mealy, ed é definita da:

$$M = \langle \mathcal{S}, \mathcal{X}, \mathcal{Z}, \lambda, \delta, \sigma_0 \rangle$$

ove σ_0 rappresenta lo stato a $t = t_0$ (stato iniziale)

La funzione λ é definita come $\lambda : \mathcal{X} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Z}$

La funzione δ é definita come $\delta : \mathcal{X} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$

Sommario

Macchine di Mealy e di Moore

- La macchina descritta in precedenza, viene definita di Mealy.
- Un suo caso particolare é la macchina di Moore dove l'uscita non dipende dall'ingresso corrente per cui: $\lambda : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Z}$ e quindi $z_k = \lambda(s_k)$
- La differenza principale é data dal fatto che l'automa di Moore non puó rispondere immediatamente a un cambiamento del simbolo presente in ingresso, ma solo con un ciclo di clock di ritardo
- Esistono metodi per passare da una rappresentazione all'altra

Trasformazione da un tipo di macchina a un altra

- Due macchine si dicono equivalenti se a paritá di stato iniziale e per ogni sequenza di ingressi le uscite sono le stesse
- Per una sequenza di j simboli di ingresso la macchina di Moore genera $j+1$ simboli di uscita e quella di Mealy ne genera j
- La differenza sta nel simbolo generato in presenza dello stato iniziale σ_0 che viene generato solo dalla macchina di Moore
- Se si vogliono confrontare le due macchine bisogna ignorare tale simbolo

Equivalenza

Una macchina di Mealy

$$M' = \langle \mathcal{S}', \mathcal{X}, \mathcal{Z}, \lambda', \delta', \sigma_0 \rangle$$

e una di Moore

$$M'' = \langle \mathcal{S}'', \mathcal{X}, \mathcal{Z}, \lambda'', \delta'', \sigma_0 \rangle$$

sono equivalenti se e solo se ignorando $z_0 = \lambda''(\sigma_0)$, le uscite sono coincidenti per ogni possibile sequenza di ingresso

Sommario

Trasformazioni

Moore ⇒ Mealy
Si tratta solo di associare l'uscita appartenente a uno stato a tutte le transizioni che partono da tale stato

Mealy ⇒ Moore
Ogni stato della macchina di partenza va replicato tante volte quante sono le transizioni con uscite differenti che portano a tale stato.
Tali nuovi stati avranno il valore di uscita uguale a quello della transizione da cui sono stati originati

Sommario

Rappresentazione di FSM

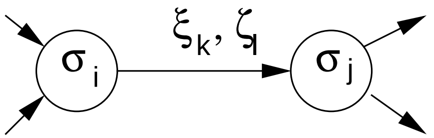
- Una macchina a stati finiti puó essere descritta sia in modo comportamentale che strutturale
- Si hanno 2 descrizioni comportamentali
  - grafo di transizione dello stato (STG)
  - tabella di transizione dello stato
- Si ha poi il modello di Huffman che é invece descrizione strutturale

Grafo di transizione dello stato

- É una rappresentazione grafica molto comoda nelle fasi iniziali di progetto in cui si passa da una descrizione formale della macchina al suo modello comportamentale
- Si tratta di un grafo orientato in cui ogni stato é rappresentato da un nodo, e ogni arco corrisponde a una transizione dello stato
- Per ogni coppia di stati appartenenti alla relazione (stato presente - stato futuro), esiste un arco orientato che va dallo stato presente a quello futuro

Esempi

Macchina di Mealy: ciascun arco é annotato dal simbolo di ingresso corrispondente alla transizione di stato e dal simbolo di uscita prodotto



Macchina di Moore: il simbolo di uscita é annotato all'interno del nodo

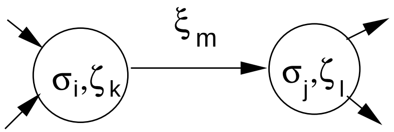


Tabella di transizione dello stato

- Si tratta di una descrizione tabellare in cui si ha una riga per ogni stato (presente) e una colonna per ogni simbolo di ingresso
- La casella σ_i, ξ_k di tale tabella contiene i valori di stato futuro e uscita forniti dalle funzioni δ e λ
- Nella macchina di Moore, per compattezza, l'informazione sull'uscita (che dipende solo dallo stato) é riportata in unica colonna

Rappresentazione utile per manipolazioni sistematiche della FSM

Tabella di transizione dello stato (Mealy)

	ξ_0	ξ_1	....	ξ_k	....	ξ_q
σ_0						
....						
σ_i				$\delta(\sigma_i, \xi_k), \lambda(\sigma_i, \xi_k)$		
....						
σ_p						

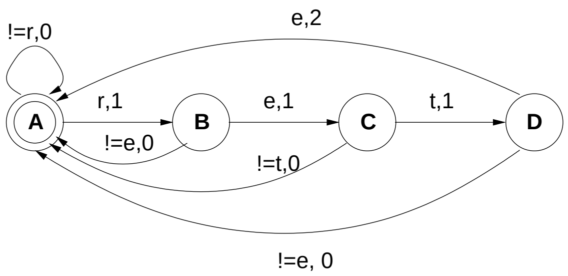
Tabella di transizione dello stato (Moore)

	ξ_0	ξ_1	....	ξ_k	....	ξ_q	
σ_0							$\lambda(\sigma_0)$
....							
σ_i				$\delta(\sigma_i, \xi_k)$			$\lambda(\sigma_i)$
....							
σ_p							$\lambda(\sigma_p)$

Esempio di STG

Si realizzi una macchina a stati (automa) che riceve in ingresso una sequenza di caratteri e riconosce la parola "rete". L'uscita prodotta é 0 se non si sta riconoscendo la parola, 1 mentre la si sta riconoscendo e 2 una volta che sia stat riconosciuta. Si utilizzi una macchina di Mealy. Nota: i simboli errati vengono scartati.

$$M = \langle \mathcal{S} = \{A, B, C, D\}, \mathcal{X} = \{a, b, c, d, ..., z\}, \mathcal{Z} = \{0, 1, 2\}, \lambda, \delta, \sigma_0 = A \rangle$$

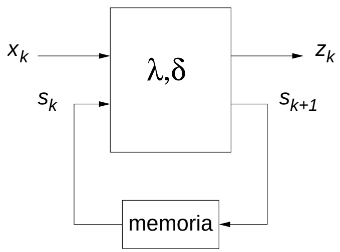


Simulazione

- Dato uno stato iniziale (σ_i) e una sequenza di ingressi, si puó calcolare la risposta del sistema in maniera piuttosto semplice sia utilizzando il grafo o la tabella di transizione dello stato
- Si noti che il processo di elaborazione descritto da una FSM é sequenziale

Modello di Huffman

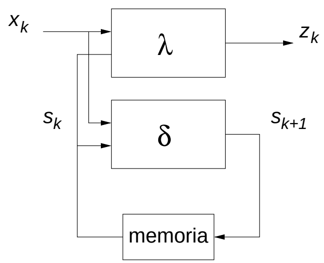
- Affinché le funzioni δ e λ possano calcolare lo stato futuro e l'uscita, lo stato presente deve rimanere stabile in ingresso per un periodo di clock.
- Questo richiede una opportuna rete di ritardo che impedisca che i cambiamenti dello stato futuro si riflettano immediatamente su quello presente



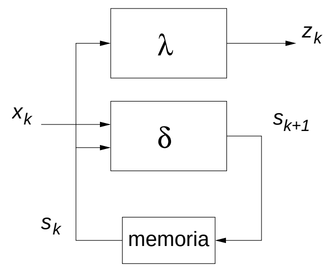
- Si nota che il blocco λ, δ non ha memoria e quindi puó essere realizzato in maniera combinatoria

Modello di Huffman

Modello di Mealy



Modello di Moore



Modello di Huffman: descrizione di λ e δ

Supponendo che i simboli di ingresso e di uscita abbiano una codifica binaria, tale blocco funzionale puó essere descritto in diversi modi:

- al livello comportamentale: espressioni dello stato futuro e dell'uscita (eventualmente rappresentate con ROBDD)
- al livello strutturale: rete logica combinatoria

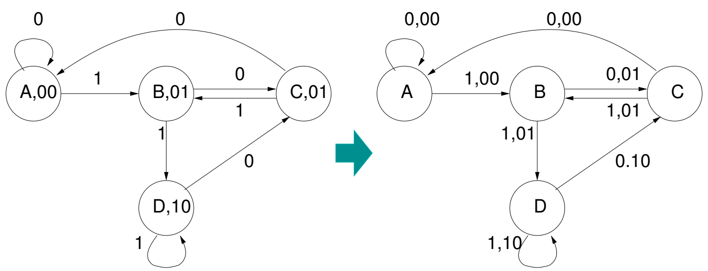
Procedura: Moore $\Rightarrow$ Mealy

- Ogni arco viene semplicemente annotato con il valore di uscita corrispondente allo stato da cui l'arco parte
- Le due macchine sono praticamente la stessa macchina

Procedura: Moore $\Rightarrow$ Mealy

Esempio

Macchina che conta il numero di 1 presenti negli ultimi due bit ricevuti



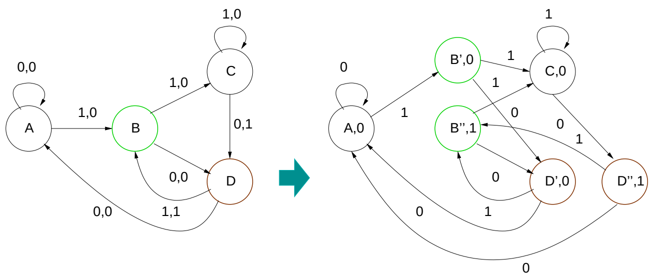
Procedura: Mealy $\Rightarrow$ Moore

- Le uscite associate a un arco vanno riportate sullo stato su cui esse terminano
- Puó darsi che archi con uscite diverse terminino sullo stesso stato che va quindi replicato per tutti i possibili valori di tali uscite
- I nuovi stati che sono stati generati devono presentare la stessa relazione di stato futuro uscita di quello da cui sono stati generati
- É possibile che alcuni autoanelli vengano eliminati

Procedura: Mealy ⇒ Moore

Esempio

Macchina che verifica che gli ultimi 3 bit ricevuti corrispondano alle configurazioni 101 o 110 ($x_{k-2}x_{k-1}x_k$). In tale caso porta a 1 l'uscita, che altrimenti vale 0.

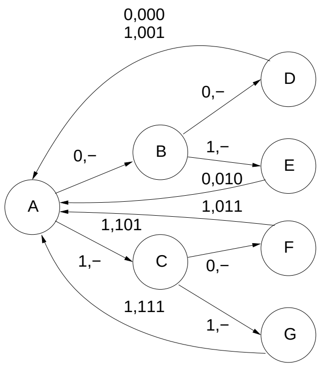


Macchine non completamente specificate

- Esistono macchine che risultano essere non completamente specificate
- Per alcuni valori di stato presente e di ingresso l'uscita puó non essere rilevante. In tale caso si indica un indifferenza nello STG o nella tabella di transizione
- Alcune configurazioni o sequenze di ingresso possono non essere possibili e quindi per alcuni stati presenti e ingressi le uscite possono non essere specificate
- Queste condizioni non vengono rappresentate sullo STG, mentre nella tabella si indica una condizione di indifferenza per lo stato futuro lo stato

Esempio

Macchina che analizza parole di 3 bit che rappresentano un numero intero senza segno ricevuto serialmente a partire dal bit di maggior peso. Compito della macchina é fornire in uscita (sull'ultimo bit ricevuto) la codifica binaria del numero ricevuto. La sorgente non invia numeri non primi



	0	1
A	B,-	C,-
B	D,-	E,-
C	F,-	G,-
D	A,000	A,001
E	A,010	A,011
F	-,-	A,101
G	-,-	A,111