Ingegneria Elettronica e Informatica
Analisi Matematica 1b (Foschi)
Compito del 19.6.2018

1. Determina tutte le soluzioni in campo complesso dell'equazione

$$z^8 + (4+\mathrm{i})z^4 + 4\mathrm{i} = 0. \tag{1}$$

Soluzione: Si tratta di una equazione di secondo grado per z^4 e dunque

$$z^4 = \frac{-(4+\mathrm{i}) \pm \sqrt{(4+\mathrm{i})^2 - 4\cdot 1\cdot 4\mathrm{i}}}{2} = \frac{-4-\mathrm{i} \pm \sqrt{15-8\mathrm{i}}}{2}. \tag{2}$$

Sia $a + \mathrm{i}b$ una radice quadrata di $15 - 8\mathrm{i}$. Abbiamo

$$15 - 8\mathrm{i} = (a+\mathrm{i}b)^2 = (a^2 - b^2) + 2ab\mathrm{i},$$

e dunque

$$a^2 - b^2 = 15, \qquad 2ab = -8. \tag{3}$$

ma anche $|a+\mathrm{i}b|^2 = |15 - 8\mathrm{i}|$, ovvero

$$a^2 + b^2 = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17. \tag{4}$$

Dal sistema di equazioni (3) e (4) ricaviamo che

$$a^2 = 16, \qquad b^2 = 1, \qquad ab = -4.$$

Otteniamo quindi che $\pm\sqrt{15-8\mathrm{i}} = \pm(4-\mathrm{i})$ e la (2) diventa

$$z^4 = \frac{-4-\mathrm{i} \pm (4-\mathrm{i})}{2},$$

ovvero $z^4 = -\mathrm{i}$ oppure $z^4 = -4$. Dunque le soluzioni dell'equazione (1) sono date dalle radici quarte di $-\mathrm{i}$ e di -4.

Il numero $-\mathrm{i}$ ha modulo 1 e argomento $-\pi/2$, pertanto le sue quattro radici quarte avranno modulo 1 e argomenti $-\pi/8$, $3\pi/8$, $7\pi/8$ e $11\pi/8$, si tratta dei numeri:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{8}\mathrm{i}} = c - \mathrm{i}c,\\
z_2 &= \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{8}\mathrm{i}} = s + \mathrm{i}c,\\
z_3 &= \mathrm{e}^{\frac{7\pi}{8}\mathrm{i}} = -c + \mathrm{i}s = -z_1,\\
z_4 &= \mathrm{e}^{\frac{11\pi}{8}\mathrm{i}} = -s - \mathrm{i}c = -z_2,
\end{aligned}$$

dove abbiamo posto $c = \cos(\pi/8)$ e $s = \sin(\pi/8)$.

Apriamo una piccola parentesi per calcolare c ed s. Sia $w =: c + \mathrm{i}s = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{8}\mathrm{i}}$, abbiamo

$$\begin{aligned}
c^2 - s^2 &= \mathrm{Re}(w^2) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\\
c^2 + s^2 &= \left|w^2\right| = \left|\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right| = 1.
\end{aligned}$$

Ricaviamo che

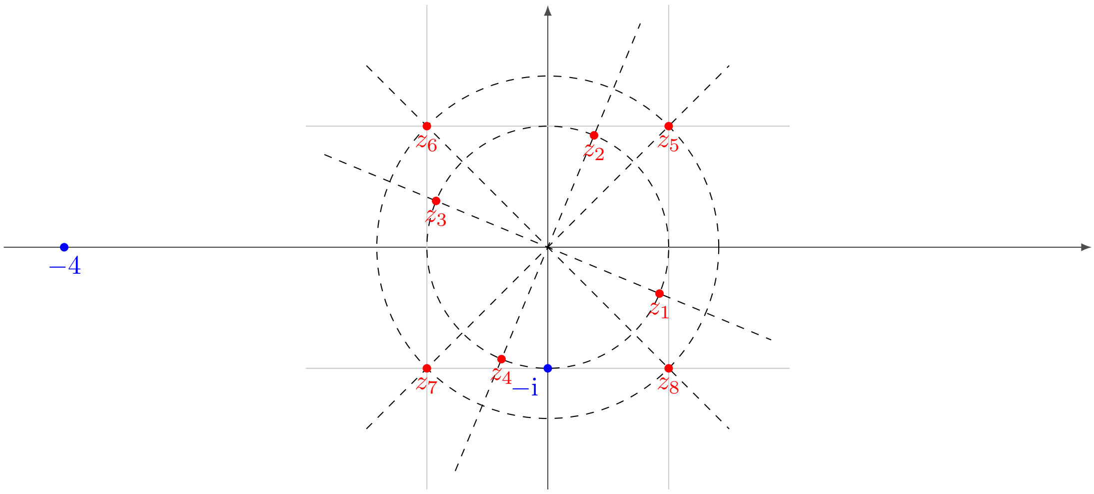
$$\begin{aligned}
c^2 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4},\\
s^2 &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Siccome w si trova nel primo quadrante otteniamo che

$$c = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \qquad s = \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Il numero -4 ha modulo 4 e argomento π, pertanto le sue quattro radici quarte avranno modulo $\sqrt{2}$ e argomenti $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$ e $7\pi/8$, si tratta dei numeri:

$$\begin{aligned} z_5 &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1+\mathrm{i}, \\ z_6 &= \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}} = -1+\mathrm{i}, \\ z_7 &= \mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}\mathrm{i}} = -1-\mathrm{i} = -z_5, \\ z_8 &= \mathrm{e}^{\frac{7\pi}{4}\mathrm{i}} = 1-\mathrm{i} = -z_6. \end{aligned}$$



2. Determina la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^2 y + t^5 y^2, \\ y(0) = 2. \end{cases} \tag{5}$$

Soluzione: Se applichiamo la sostituzione $y(t) = z(t)^\alpha$, avremo $y'(t) = \alpha z(t)^{\alpha-1} z'(t)$. Sostituendo nell'p.d.C. (5) otteniamo

$$\alpha z^{\alpha-1} z' = t^2 z^\alpha + t^5 z^{2\alpha}, \quad z(0)^\alpha = 2,$$

da cui ricaviamo

$$z' = \frac{1}{\alpha} t^2 z + \frac{1}{\alpha} t^5 z^{\alpha+1} \quad z(0) = 2^{1/\alpha}.$$

Scegliendo $\alpha = -1$ l'equazione diventa una e.d.o. lineare non omogena:

$$z' = -t^2 z - t^5, \quad z(0) = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

L'equazione omogena associata è $z' = -t^2 z$. Una primitiva del coefficiente $-t^2$ è $-\frac{1}{3}t^3$ e dunque le soluzioni dell'equazione omogenea sono della forma $z(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t^3}$, con k costante.

Applichiamo il metodo della variazione della costante e cerchiamo una soluzione di (6) della forma
$$z(t) = k(t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t^3}.$$
La derivata è
$$z' = (k' - t^2 k)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t^3},$$
che sostituita in (6) dopo qualche semplificazione porta all'equazione
$$k'(t) = -t^5 \mathrm{e}^{\frac{1}{3}t^3}.$$
Integrando, tramite la sostituzione $s = \dfrac{1}{3}t^3$ e $\mathrm{d}s = t^2\,\mathrm{d}t$, e poi procedendo per parti, troviamo
$$k(t) = -\int t^3 \mathrm{e}^{\frac{1}{3}t^3} t^2\,\mathrm{d}t = -3\int s\mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s = -3\left(s\mathrm{e}^s - \mathrm{e}^s\right) + c = \left(3 - t^3\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{3}t^3} + c.$$
Per determinare la costante di integrazione c imponiamo le condizioni iniziali
$$\frac{1}{2} = z(0) = k(0)\mathrm{e}^0 = 3 + c,$$
da cui otteniamo $c = 5/2$.

Dunque la soluzione cercata sarà
$$y(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{k(t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t^3}} = \frac{1}{3 - t^3 + \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t^3}},$$
definita sull'intervallo $]-\infty, t_\star[$, dove $t_\star > \sqrt[3]{3}$ è l'unico valore di t per il quale si annulla il denominatore nell'ultima formula.

3. Considera le funzioni $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^3_+$, $g\colon \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}^2$, $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definite da
$$f(t) := \left(t, t^2, t^3\right), \quad g(x,y,z) := \left(\log(xyz), 1 - \mathrm{e}^{x+2y-3z}\right), \quad h(a,b) := \int_a^b \cos(\pi r^2)\,\mathrm{d}r.$$
- Calcola tutte le derivate parziali di f, g e h.
- Sia $k\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la funzione composta $k(t) := h(g(f(t)))$; calcola il valore della derivata $k'(1)$.

Soluzione: Derivata di f:
$$f'(t) = \left(1, 2t, 3t^2\right). \tag{7}$$
Matrice jacobiana di g:
$$J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x}, & \frac{1}{y}, & \frac{1}{z} \\ -\mathrm{e}^{x+2y-3z}, & -2\mathrm{e}^{x+2y-3z}, & 3\mathrm{e}^{x+2y-3z} \end{pmatrix}. \tag{8}$$
Gradiente di h:
$$\nabla h(a,b) = \left(-\cos(\pi a^2), \cos(\pi b^2)\right). \tag{9}$$
Il calcolo delle derivate di h segue dal teorema fondamentale del calcolo: infatti abbiamo che $h(a,b) = H(b) - H(a)$, dove la funzione $H(r)$ è una qualsiasi primitiva di $\cos(\pi r^2)$, e dunque conosciamo la derivata $H'(r) = \cos(\pi r^2)$.

Per $t = 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} f(1) &= (1,1,1), \\ g(f(1) &= g(1,1,1) = (0,0), \\ h(g(f(1))) &= h(0,0) = 0. \end{aligned}$$

Per la regola di derivazione delle funzioni composte abbiamo che la derivata di k si ottiene come prodotto delle matrici jacobiane delle funzioni che la compongono

$$k'(1) = J_h(0,0)J_g(1,1,1)J_f(1).$$

La matrice jacobiana di f é il vettore colonna con tre componenti ottenuto come trasposto della derivata (7):

$$f'(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobiana di g é stata calcolata in (8):

$$J_g(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobiana di h é il vettore riga che coincide con il gradiente (9):

$$J_h(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo allora

$$k'(1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2.$$

4. Considera la regione D del piano x-z definita da

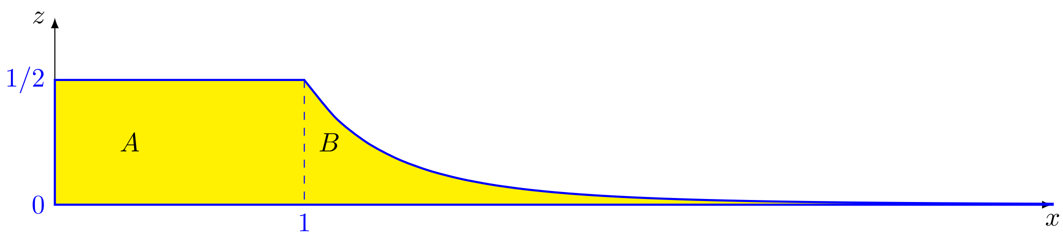
$$D := \left\{ (x,z) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leqslant z \leqslant 1/2,\ x \geqslant 0,\ z \leqslant \frac{1}{x^4 + x^2} \right\}.$$

- Calcola l'area della regione D.
- Calcola il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando la regione D intorno all'asse z.

Soluzione:

La regione D si può decomporre nell'unione disgiunta $D = A \cup B$ del rettangolo $A = [0,1] \times [0,1/2]$ con la regione B data dal sottografico della funzione $\dfrac{1}{x^4 + x^2}$ per $x \in [1, +\infty[$,

$$B := \left\{ (x,z) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{x^4 + x^2} \right\}.$$



L'area di D è la somma delle aree di A e di B. L'area del rettangolo A è $1/2$. L'area di B si ottiene dall'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Che tale integrale converge segue dal criterio del confronto, in quanto

$$0 \leqslant \frac{1}{x^4+x^2} \leqslant \frac{1}{x^4},$$

e l'integrale $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x$ converge. Per calcolare il valore dell'integrale cerchiamo una primitiva della funzione integranda. Si tratta di una funzione razionale:

$$\frac{1}{x^4+x^2} = \frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}.$$

Dunque

$$\int \frac{1}{x^4+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} - \arctan x + c.$$

Quindi

$$\int_1^L \frac{1}{x^4+x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{L} - \arctan L + 1 + \arctan(1),$$

e passando al limite per $L \to \infty$ otteniamo

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4+x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

L'area di D è allora $\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$.

Per calcolare il volume del solido di rotazione possiamo procedere integrando per strati. Per ogni $z \in]0, 1/2]$ lo strato del solido ad altezza z è un disco di raggio $r > 0$, dove r è la soluzione dell'equazione

$$z = \frac{1}{r^4+r^2}.$$

Essa equivale all'equazione biquadratica

$$r^4 + r^2 - \frac{1}{z} = 0,$$

la cui unica soluzione positiva è data da

$$r = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+\frac{4}{z}}}{2}}.$$

L'area dello strato di altezza z allora sarà

$$\pi r^2 = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{z}} - 1\right),$$

e il volume del solido è dato dall'integrale

$$V = \int_0^{1/2} \pi r(z)^2\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}\int_0^{1/2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{z}} - 1\right)\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}\int_0^{1/2}\sqrt{1+\frac{4}{z}}\,\mathrm{d}z - \frac{\pi}{4}.$$

Calcoliamo l'integrale nell'ultima espressione: procedendo con la sostituzione

$$t = \sqrt{1+\frac{4}{z}}, \quad z = \frac{4}{t^2-1}, \quad \mathrm{d}z = -\frac{8t}{(t^2-1)^2}$$

ricaviamo che

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1+\frac{4}{z}}\,\mathrm{d}z = \int_3^{\infty} 4t \cdot \frac{2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Ora procediamo per parti

$$\begin{aligned}\int_3^{\infty} 4t \cdot \frac{2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t &= \left[4t \cdot \left(-\frac{1}{t^2-1}\right)\right]_3^{\infty} - \int_3^{\infty} 4 \cdot \left(-\frac{1}{t^2-1}\right)\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{4\cdot 3}{3^2-1} + 4\int_3^{\infty} \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2} + 2\int_3^{\infty}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{3}{2} + 2\left[\log\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_3^{\infty} = \frac{3}{2} + 2\log 2.\end{aligned}$$

Otteniamo quindi che il volume del solido è

$$V = \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{2} + 2\log 2\right) - \frac{\pi}{4} = \pi\left(\frac{1}{2} + \log 2\right).$$